MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

2. BAND

QA1
Z88
v.1-3

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

2. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

Inhaltsverzeichnis

Seite

eberbach, L., Über einen Osgoodschen Satz aus der Integralrechnung . . . 155
eberbach, L., Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen 158
eberbach, L., Zur Theorie der komplexen Zahlen 171
amér, H., Über die Nullstellen der Zetafunktion 237
stein, P., Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche 412
oß, W., Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen 242
nsel, K., Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen 433
lles, S., Der rotatorische elliptische Komplexbüschel und die neue Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes 316
lles, S., Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve 318
neser, A., Kleinste Wirkung und Galileische Relativität 326
nopp, K., Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen 1
oebe, P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung) 198
ndau, E., Über Ideale und Primideale in Idealklassen 52
ndau, E., Ein Satz über Riemannsche Integrale 350
kács, F., Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome 295
eyer, W. Fr., Über die Möbiussche Figur zweier einander ein- und umbeschriebener Tetraeder, und die Figur einer einem Tetraeder umbeschriebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung 453
ohrmann, H., Über eine besondere Klasse von Linienkomplexen 27
lya, G., Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen 352
ademacher, H., Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen 306
esz, F., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung 312
heffers, G., Flächentreue Abbildungen in der Ebene 180
eplitz, O., Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér 187
eyl, H., Reine Infinitesimalgeometrie 384
richtigung 474

Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen.[1])

Von

Konrad Knopp in Berlin.

Einleitung.

An einfachen und befriedigenden Beispielen von stetigen nirgends ifferenzierbaren Funktionen ist kein Mangel. Seit Weierstraß[2]) als erstes eispiel die Funktion

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \qquad \begin{cases} b \text{ ungerade, ganz;} \\ 0<a<1, \quad ab>1+\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

egeben hat, sind immer neue Funktionen oder Klassen von Funktionen ieser Art angegeben worden, die einfacher sind oder die sonst nach einer ichtung hin einen Vorteil gegenüber der Weierstraßschen Funktion ıfweisen. Die Frage hat bis heute die Forschung gereizt; bezeichnet es ɔch P. du Bois-Reymond[2]) in der Arbeit, in der er das Weierstraßsche eispiel bekannt gibt, als „eins der ergreifendsten Ergebnisse der neueren athematik, daß eine Funktion in allen Punkten eines Intervalles stetig in kann, ohne für irgendeinen Punkt dieses Intervalles einen bestimmten ifferentialquotienten zu haben".

Alle bisherigen Beispiele aber tragen einen sehr zufälligen Charakter ıd gestatten keinen einigermaßen allgemeinen Einblick in die Tatsache

[1]) Diesen Gegenstand habe ich zu einem Teile in der Berliner Mathematischen sellschaft vorgetragen und auszugsweise in deren Sitzungsberichten, XVI. Jahrgang, 17, S. 97—106, veröffentlicht.

[2]) Abhandlungen zur Funktionenlehre, S. 92 u. 97; Werke II, S. 223. Dies eierstraßsche Beispiel wurde zuerst veröffentlicht in einer Arbeit von du Bois-Reymond, Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen ller Argumente, Journal für Mathematik, Bd. 79, 1875, S. 21—37.

der Nichtdifferenzierbarkeit. Überdies gehen sie rein analytisch zuwege, so daß man von der heraus springenden Kurve keine Anschauung gewinnt.

Neben diesen vereinzelten Beispielen, auf die wir noch genauer eingehen, ist von Dini[3]) ein allgemeineres Verfahren zur Herstellung solcher Funktionen entwickelt worden, das als speziellen Fall die Weierstraßsche Funktion enthält. Seine gleichfalls rein analytischen Betrachtungen sind aber sehr verwickelt — nimmt doch allein die Formulierung seines ersten Ergebnisses in dem bekannten Werk von Dini-Lüroth etwas über drei volle Seiten (S. 210—213) in Anspruch! — und liefern auch keinerlei Anschauung der Funktion bzw. des Grundes ihrer Nichtdifferenzierbarkeit.

Später haben E. Steinitz[4]) und G. Faber[5]) von ganz anderer Seite her sehr allgemeine Kriterien für die Nichtdifferenzierbarkeit stetiger Funktionen bzw. Verfahren zur Herstellung solcher Funktionen gegeben, indem sie lediglich die Funktionswerte in gewissen (dicht gelegenen) rationalen Punkten in Betracht ziehen.

Es ist von vornherein wahrscheinlich, daß bei allen diesen Konstruktionsverfahren trotz ihrer Verschiedenheit der tiefere Grund für die Nichtdifferenzierbarkeit der heraus springenden Funktion derselbe oder doch wesentlich derselbe sein wird, und daß sie sich alle unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte werden betrachten lassen.

Dem ist in der Tat so. Ich werde im folgenden alle diese Methoden bzw. einzelnen Beispiele aus einem ganz einfachen und einheitlichen Konstruktionsverfahren heraus entwickeln, dessen Vorzug nicht so sehr darin bestehen soll, wesentlich neue Gesichtspunkte für die vorliegende Frage zu eröffnen, als vielmehr die bisherigen Antworten so sehr zu vereinheitlichen und zu vereinfachen, daß die Tatsache der Nichtdifferenzierbarkeit für gewisse Funktionen zu einer geradezu selbstverständlichen wird[6]).

---

[3]) U. Dini, Su alcuni funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata, Annali di Matematica, Ser. 2, Bd. 8, 1877, S. 121. Vgl. auch Dini-Lüroth, Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, Leipzig 1892, S. 205—229.

[4]) E. Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, Mathematische Annalen, Bd. 52, 1899, S. 58—69.

[5]) G. Faber, Über stetige Funktionen I, Mathematische Annalen, Bd. 66, 1908, S. 81—93; II, ebenda, Bd. 69, 1910, S. 372—443.

[6]) Unser Verfahren umfaßt jedoch *nicht* mehr die sehr tief gehenden Untersuchungen ganz neuen Datums von G. H. Hardy (Weierstraß' non differentiable function, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 17, Heft 3, 1916, S. 301—325), in denen gezeigt wird, daß es in $\sum \alpha^n \cos(b^n \pi x)$ anzunehmen genügt, daß $0 < \alpha < 1$ und $\alpha b > 1$ ist, um schließen zu können, daß die Reihe eine nirgends differenzierbare Funktion darstellt. Der Weierstraßsche Beweis verlangt bekanntlich, daß b eine ungerade ganze Zahl und $\alpha b > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist. Auch das zuerst von G. Peano (Sur une combe qui remplit tonte une aire plane, Mathematische Annalen

nser Verfahren wird überdies fast jede Rechnung vermeiden und das ometrische Bild der resultierenden nirgends differenzierbaren Funktion - soweit so etwas überhaupt möglich ist — unmittelbar anschaulich achen [7]).

Unter „*nirgends* differenzierbaren" Funktionen wollen wir dabei im lgenden ausschließlich solche verstehen, die an *keiner* inneren Stelle res Definitionsintervalles *eine bestimmte endliche noch auch bestimmt nendliche* Ableitung besitzen. Bekanntlich spielen daneben auch solche unktionen in der Literatur eine große Rolle, denen *an dicht gelegenen ellen* ihres Definitionsintervalles eine Ableitung fehlt [8]), und solche, die n keiner Stelle *eine bestimmte endliche* Ableitung [9]) haben. Auf sol-

---

d. 36, 1890, S. 157) und D. Hilbert (Über die stetige Abbildung einer Linie auf n Flächenstück, Mathematische Annalen, Bd. 38, 1891, S. 459) ohne Beweis gegebene eispiel wird von unserm Verfahren nicht umfaßt. Beide sagen, daß jede Komponente r von ihnen aufgestellten Funktionenpaare, die die Einheitsstrecke stetig auf das inheitsquadrat abbilden, eine nirgends differenzierbare Funktion des Parameters ist. ine genaue Ausführung der Beweise hiervon findet sich bei E. H. Moore, (On cer- in crinkly curves, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 1, 1900, 72), der insbesondere zeigt, daß diese Funktionen an jeder Stelle *entweder* ohne estimmte rechte *oder* ohne bestimmte linke Ableitung sind. Neuerdings sind diese eispiele von L. Bieberbach (Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, Leipzig 1917) nd H. Hahn (Über stetige Funktionen ohne Ableitung, Jahresber. d. Deutschen athematiker-Vereinigung, Bd. 26, 1918, S. 281—284) wiedergefunden worden. Das n letzterem gegebene ist ganz unabhängig aus einer Modifikation des Steinitz- hen Beispiels entstanden und zwar im Auschluß an ein ähnliches, aber sehr viel ühsameres, das W. Sierpiński in dem Bulletin de l'Académie des sciences de acovie, 1914, S. 112 gab. Es deckt sich aber im wesentlichen mit dem von Peano- ore herrührenden.

[7]) Eine geometrische Interpretation des Weierstraßschen Beispiels findet sich wenn auch mit mancherlei Unklarheiten; vgl. dazu die Weierstraßsche Replik dessen Abhandlungen zur Funktionenlehre, S. 100 — bei Ch. Wiener, Geometrische d analytische Untersuchung der Weierstraßschen Funktion, Journal für Mathematik, d. 90, 1881, S. 221—252. Eine klarere Vorstellung der Funktion gewinnt man aus rer Behandlung bei F. Klein in dessen autographierten Vorlesungen.

[8]) Solche Funktionen sind, zum Teil schon vor Weierstraß, von Riemann, A. Schwarz, Darboux, Brodén u. a. angeregt oder angegeben worden. Von nigen dieser Funktionen, z. B. der Schwarzschen, die eine monotone Funktion ist, gibt sich auf Grund neuerer Sätze sogar, daß sie „*fast überall*" — d. h. überall, ßer in einer Menge von Punkten des (Lebesgueschen) Inhaltes 0 — eine be- mmte Ableitung besitzen. — Eingehende historische und sachliche Angaben über ese Funktionen findet man bei E. Pascal, Esercizi critici di calcolo differenziale integrale, Milano 1895, S. 85—128.

[9]) Funktionen, die in diesem weiteren Sinne nirgends differenzierbar sind, haben ßer Dini [3]), Steinitz [4]) und Faber [5]) noch angegeben: Lerch, Über die Nicht- fferenzierbarkeit gewisser Funktionen, Journal für Mathematik, Bd. 103, 1888, 126—138. — H. v. Koch, Une méthode géometrique élémentaire pour l'étude de

cherlei Funktionen soll hier gar nicht eingegangen werden. Wir verlangen vielmehr, daß an *jeder* Stelle die beiden Hauptlimites ($\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$) des Differenzenquotienten der Funktion verschieden ausfallen, oder also daß an *keiner* Stelle ihre vier Hauptderivierten sämtlich untereinander gleich sind.

Die Zahl der Beispiele von Funktionen, die in diesem schärferen Sinne nirgends differenzierbar sind, ist schon gar nicht mehr so groß[10]; mit ihnen allein aber wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

Um das Fehlen einer Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 festzustellen, werden wir uns dabei ausnahmslos des folgenden Kriteriums bedienen: Ist $x_1 < x_0$ und $x_2 > x_0$, so ist $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ein mittlerer Wert zwischen

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Haben also diese letzteren Differenzenquotienten bei $x_1 \to x_0$ und $x_2 \to x_0$ denselben bestimmten (endlichen oder unendlichen) Grenzwert, so hat auch der erstere diesen selben Grenzwert. Und da das Umgekehrte evident ist, so können wir sagen, daß $f(x)$ dann und nur dann in x_0 differenzierbar ist, wenn für $x_1 \leqq x_0 \leqq x_2$, $x_1 < x_2$, $(x_2 - x_1) \to 0$ der Grenzwert $\lim \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ein bestimmter ist[11].

Um dies noch anschaulicher zu fassen, nennen wir die die Kurvenpunkte mit den Abszissen x_1 und x_2 verbindende Sehne *eine den Punkt* (x_0) *überspringende oder von ihm ausgehende Sehne*, und können nun sagen:

---

certaines questions de la théorie des courbes planes, Acta mathematica, Bd. 30, 1906, S. 145–174. — E. Cesàro, Fonctions continues sans dérivées, Archiv für Mathematik und Physik, Serie 3, Bd. 10, 1906, S. 57–63. — T. Brodén, Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen, Journal für Mathematik, Bd. 118, 1897, S. 1–60; sowie: Über die elementare Konstruktion sogenannter Kurven ohne Tangente, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 2, Nr. 2, 1905, 12 S. und die daran anknüpfende Remarque sur une communication de M. Brodén, von H. v. Koch, ebenda Nr. 27, 2. S. — T. Takagi, A simple example of continuous function without derived function, Journal of the Physical School in Tokyo, Bd. 14, 1904, S. 1–2; abgedruckt in Y. Mikami, Mathematical Papers from the Far East, Leipzig 1910, S. 108. — G. Landsberg, Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17, 1908, S. 46–51.

[10]) Außer der Weierstraßschen Funktion und den aus den allgemeinen Dinischen Entwicklungen sich ergebenden sind mir nur die Beispiele von Steinitz[4]) und Faber[5]) sowie die in Fußnote [6]) genannten bekannt geworden; vgl. auch G. Faber, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16, 1907, S. 538.

[11]) Diesen Differenzenquotienten benutzen zu gleichen Zwecken schon J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, 2. Aufl., Paris 1914, S. 415 ff., T. J. I'a Bromwich, Introduction to the theory of series, London 1908, S. 490 ff., sowie E. Steinitz[4]) und G. Landsberg[9]).

ne Funktion ist dann und nur dann in x_0 differenzierbar, wenn die ichtungskoeffizienten einer jeden Folge zu 0 abnehmender Sehnen dieser rt sich einem bestimmten Grenzwerte nähern. Oder endlich: *Eine Funkon ist dann und nur dann in x_0 nicht differenzierbar, wenn man vei verschiedene Folgen zu 0 abnehmender Sehnen angeben kann, die en Punkt (x_0) überspringen oder von ihm ausgehen und deren Richngskoeffizienten sich nicht demselben Grenzwerte nähern.* Mit Hilfe eses einfachen Kriteriums werden wir im folgenden stets die Nichtfferenzierbarkeit unserer Funktionen feststellen.

§ 1.

Das Konstruktionsverfahren.

Es sei in der xy-Ebene eine Folge von Zickzackzügen Z_n für $= 0, 1, 2, \ldots$ vorgelegt. Wir wollen hierunter geradlinig-gebrochene inienzüge verstehen, deren Strecken abwechselnd positive und negative eigung haben und die sich in der Form $y = \varphi_n(x)$ als eindeutige und etige Funktionen von x darstellen lassen.

Von den Z_n nehmen wir zunächst an, daß sie alle dasselbe x-Intervall $\leqq x \leqq b$ überlagern; doch erweitern wir sie nun sofort folgendermaßen ch rechts und links: Wir spiegeln sie erst an der Geraden $x = b$ und rschieben nun das ganze Bild unbegrenzt oft nach rechts und links um e Strecke $2(b - a)$, so daß die so fortgesetzten Züge Z_n nun in periosscher Wiederholung die *ganze* x-Achse schlicht überlagern [12]). Die Funkonen $\varphi_n(x)$ sind dann für alle x definiert, durchweg stetig und behränkt, d. h. es gibt für jedes n eine Konstante C_n, so daß für alle x ets $|\varphi_n(x)| \leqq C_n$ bleibt.

Wir bezeichnen nun die obere Grenze von $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)|$ für alle x i festem $n = 1, 2, \ldots$ — sie fällt sicher endlich aus, da sie $\leqq C_n + C_{n-1}$ — mit c_n und verlangen zunächst:

(A) *Es soll* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergent sein.*

Das hat natürlich zur Folge, daß

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)]$$

alle x gleichmäßig konvergiert und also eine durchweg stetige Funkn $f(x)$ definiert. Die stetige Kurve, der sich sonach auf Grund von

[12]) Dies soll nur besagen, daß sich die Projektionen ihrer Punkte auf die x-Achse ht überdecken.

(A) die Züge Z_n als ihrer Grenzlage nähern, heiße *die Kurve* Γ. Da alle $\varphi_n(x)$ die Periode $2(b-a)$ hatten, so fällt auch $f(x)$ periodisch aus; überdies muß es beschränkt sein, denn es ist

$$|f(x)| \leqq |\varphi_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leqq C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = K.$$

Die nach unten und oben weisenden Spitzen unserer Zickzackzüge sind nun deren Minima und Maxima. Greifen wir zwei aufeinander folgende Minima eines bestimmten Z_n heraus, so wollen wir diese über Kreuz mit den unmittelbar links und rechts danebenliegenden Maxima verbinden, d. h. das linke der beiden Minima mit dem unmittelbar rechts vom rechten gelegenen Maximum und umgekehrt, wie dies Fig. 1 in den dünn gestrichelten Geraden veranschaulicht. Diese Konstruktion denken wir uns für *je* zwei aufeinander folgende Minima aller Züge Z_n ausgeführt und nennen die dabei gezogenen Geraden kurz *die Verbindungsgeraden* (v). Sie sollen stets vom Minimum nach dem Maximum hin orientiert gedacht werden.

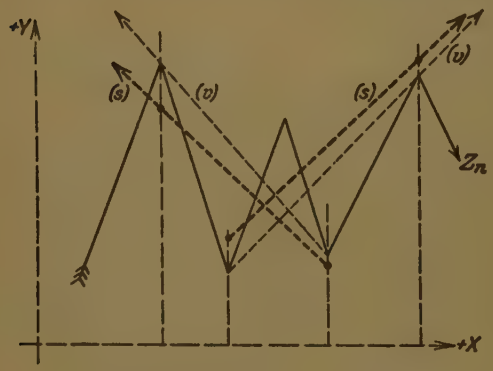


Fig. 1.

Außer diesen Geraden ziehen wir endlich noch diejenigen Sehnen der Kurve Γ, die die Kurvenpunkte (in Fig. 1 stark markiert) mit denselben Abszissen wie die eben benutzten Minima und Maxima — und zwar in derselben Reihenfolge und mit derselben Orientierung — verbinden. Diese Sehnen nennen wir kurz die zu den Verbindungsgraden (v) gehörigen *Sehnen* (s). Zwei dieser Sehnen veranschaulicht Fig. 1 in den stark gestrichelten Geraden.

Wir messen nun bei jedem n die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Abweichung ihrer Richtungen von der der positiven y-Achse und bezeichnen die obere Grenze der Beträge aller dieser Winkel mit γ_n. Dann verlangen wir weiter:

(B) *Es soll* $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ *sein.*

Daß und wie diese Forderungen (A) und (B) erfüllt werden können, werden die folgenden Paragraphen, besonders § 5, genauer zeigen. Doch können wir es uns auch jetzt schon in wenigen Worten klar machen:

A) verlangt ja nur, daß sich jeder Zickzackzug Z_n hinreichend dicht an en vorangehenden anschmiegt, was selbstverständlich erreicht werden kann.)enkt man sich weiter diese Züge so gezeichnet, daß eine Spitze von Z_n ets auch Spitze von Z_{n+1} ist ($n = 0, 1, 2, \ldots$), so wird sie auch ein unkt der Grenzkurve Γ werden und die Verbindungsgeraden (v) sind dann it den Sehnen (s) identisch. Für die Verbindungsgeraden (v) aber ist ie Forderung (B) offenbar erfüllt, wenn die Spitzen der Züge Z_n mit achsendem n hinreichend eng liegen und zugleich hinreichend spitz ge- acht werden.

Erfüllen nun die Züge Z_n lediglich diese beiden einfachen Bedingungen A) und (B), so gilt schon der

Satz: *Für jedes reelle x ist*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

orhanden und $y = f(x)$ ist eine durchweg stetige aber nirgends diffe- enzierbare Funktion. Oder: *Die Züge Z_n nähern sich mit wachsen- em n einer bestimmten stetigen Kurve Γ, die die ganze x-Achse schlicht berlagert*[12]) *und die dort nirgends eine bestimmte Tangente besitzt.*

Beweis: Daß das Verfahren gegen eine für alle x stetige Funk- ion $f(x)$ konvergiert, war schon oben im Anschluß an die Aufstellung er Forderung (A) gezeigt. Daß aber $f(x)$ nirgends differenzierbar sein ann, erkennt man so:

Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl; dann wird sie für jedes n *ent- eder* zwischen den Abszissen zweier aufeinanderfolgender Minima von Z_n iegen — und dann soll das Intervall dieser Abszissen mit J_n bezeichnet erden — *oder* x_0 ist selbst Abszisse eines Minimums von Z_n; dann ollen wir das rechts anschließende Intervall der eben genannten Art it J_n bezeichnen. Dadurch ist bei gegebenem x_0 die Folge der J_n ein- eutig bestimmt, d. h. bei jedem $n = 0, 1, 2, \ldots$ sind zwei bestimmte ufeinanderfolgende Minima von Z_n herausgegriffen, zwischen denen (die inima selbst einschließlich) der Punkt mit der Abszisse x_0 liegt. Ziehen ir nun (bei jedem n) die zu diesen beiden Minima gehörigen Sehnen (s), o liefern diese Sehnenpaare zwei verschiedene Folgen von Sehnen, die den unkt x_0 überspringen oder von ihm ausgehen und deren Richtungs- oeffizienten sich *nicht* demselben Grenzwert nähern; denn die Steigung er von links nach rechts gehenden Sehne jedes Paares ist $> \operatorname{ctg} \gamma_n$, die er andern $< -\operatorname{ctg} \gamma_n$. Wegen (B) wachsen also beide, aber schließlich it entgegengesetzten Vorzeichen[13]), über jeden Betrag hinaus.

---

[13]) Sobald n so groß ist, daß $\gamma_n < \frac{\pi}{2}$ bleibt, haben *alle* von links nach rechts rientierten Sehnen (s) *positive*, die andern *negative* Steigung.

Nach dem am Schluß der Einleitung genannten Kriterium folgt aber hieraus die Nichtdifferenzierbarkeit von $f(x)$ in x_0, sofern wir noch zeigen, daß die Längen der betrachteten Sehnen zu 0 abnehmen. Das ist aber gewiß der Fall. Denn eine stetige und bezüglich ihrer Ordinaten beschränkte Kurve kann nicht beliebig steile Sehnen haben, deren Länge oberhalb einer positiven Schranke bleibt[14]). Damit ist der Beweis schon in allen Teilen vollendet.

Die Existenz einer solchen Folge von Sehnenpaaren, die sich jeweils über (x_0), d. h. über dem Kurvenpunkt mit der Abszisse x_0, kreuzen, deren Längen zu 0 abnehmen und deren Steigungen mit beiderlei Vorzeichen jeden Betrag überschreiten, wird im folgenden immer die geradezu *typische Situation für die Nichtdifferenzierbarkeit abgeben*[15]).

Die Tatsache, daß die Längen der Sehnen unserer Folge zu 0 abnimmt, lehrt noch, daß der größte Abstand δ_n zweier aufeinanderfolgender Minima von Z_n mit wachsendem n gegen 0 strebt.

§ 2.

Abänderungen und Erweiterungen.

Man erkennt nun ohne Schwierigkeit, daß gewisse unserer Voraussetzungen nicht wesentlich waren und durch allgemeinere ersetzt werden können.

1. So erweist es sich zunächst als gleichgültig, daß die Züge Z_n aus geradlinigen Strecken bestanden[16]). Denken wir uns bei einem unserer Zickzackzüge die Minima- und Maximapunkte festgehalten, diese aber statt

---

[14]) Denn für alle Sehnen, die den Punkt (x_0) überspringen oder von ihm ausgehen und deren Längen $\geqq l > 0$ bleiben, liegt die Abszisse mindestens eines ihrer Endpunkte außerhalb eines passenden festen Intervalles der Form $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Dann ist aber ihre Steigung absolut genommen $< \frac{2M}{\delta}$, wenn M eine Schranke von $|f(x)|$ bedeutet; die Steigungen sind dann also nicht beliebig großer Werte fähig.

[15]) Da diese Situation zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die Nichtdifferenzierbarkeit ist (da es genügen würde, wenn sich die Steigungen der Sehnen der beiden Folgen, statt gerade den Werten $\pm\infty$, *irgend zwei verschiedenen* Grenzwerten näherten), so sind hiermit auch die Grenzen für die Tragweite unseres Verfahrens gekennzeichnet; vgl. die Fußnote [6]).

[16]) Die methodische Benutzung von Polygonzügen zur Herstellung von Kurven mit vorgeschriebenen Besonderheiten geht wohl auf H. v. Koch[9]) zurück und ist dann weiter im Anschluß an Cesàro von einigen jüngeren italienischen Mathematikern weiter ausgebildet worden; vgl. T. Broglio, Giornale di Matematiche, Ser. 2, Bd. 44, 1906, S. 168—180 u. S. 354—369; A. Sellerio, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 28, 1909, S. 153—184, und G. Andreoli, Giornale di Matematiche, Ser. 3, Bd. 51, 1913, S. 41—56.

rch geradlinige Verbindungsstrecken durch irgendeine etwa stetige und notone Kurve verbunden, so leisten diese allgemeineren Zickzackzüge nau dasselbe wie die bisherigen, denn von ihrer Geradlinigkeit ist ja gends Gebrauch gemacht worden.

2. Nun sieht man aber weiter, daß auch die Punkte eines Z_n, von nen aus und nach denen hin die Verbindungsgeraden (v) gezogen wur-, nicht notwendig selbst die Minima und Maxima von Z_n zu sein uchen. Vielmehr genügt es, wenn bei jedem Z_n irgendwelche *Punkte ter Art* (an Stelle der Minima) mit solchen *zweiter Art* (an Stelle der xima) abwechseln. Von diesen Stellen wollen wir jedoch der Einfach- t halber und in Übereinstimmung mit der Konstruktion des § 1 an- men, daß sie eine mit $2(b-a)$ periodische Lage haben und in jedem iodizitätsabschnitt nur in endlicher Anzahl sind. Erfüllen die von den llen erster Art aus gezogenen und nach den Stellen zweiter Art hin ntierten Verbindungsgeraden (v) bzw. die zugehörigen Sehnen (s) nach vor die Bedingung (B), so bleibt Satz und Beweis des § 1 völlig un- etastet, denn wir haben bei unsern Schlüssen nirgends davon Gebrauch nacht, daß jene Stellen wirklich Extremstellen von Z_n waren; dies hatten vielmehr nur der größeren Bequemlichkeit und der größeren Anschau- keit wegen angenommen. In den meisten Einzelfällen (vgl. § 5) wird h die bisherige Wahl der Stellen erster und zweiter Art die günstigere sein.

Im folgenden lassen wir nun stets die beschriebenen allgemeineren e Z_n zu und sprechen statt von den Extremstellen stets von den auf n gelegenen *ausgezeichneten Stellen*, die in solche erster Art und solche iter Art zerfallen.

§ 3.

Vereinfachungen.

Unser noch sehr allgemein gehaltenes Verfahren läßt nun mancherlei eliegende Vereinfachungen zu, von denen ich im Anschluß an die orisch vorliegenden Beispiele nirgends differenzierbarer Funktionen vier en entwickeln will.

1. Wie schon in § 1 hinter (B) angedeutet, werden die Dinge be- lers einfach, wenn man die Z_n so wählt, daß die ausgezeichneten Stellen Z_{n-1} auch solche von Z_n sind (für $n = 1, 2, \ldots$); denn in diesem e sind alle diese Punkte auch Kurvenpunkte von Γ selbst, die Ver- ungsgeraden (v) werden also mit den Sehnen (s) identisch und man leichter verifizieren können, ob die Bedingung (B) erfüllt ist. Diese infachung wird noch gesteigert, wenn wir überdies annehmen, daß eder stets die Stellen erster Art von Z_n oder stets die Stellen zweiter

Art von Z_n auf dem Zuge Z_{n-1} liegen und daß die ausgezeichneten Stellen, wie in § 1, stets die wahren Extremstellen der Züge sind.

Es handelt sich dann um das in Fig. 2 für geradlinige Züge angedeutete Schema, oder um dessen Spiegelbild an der x-Achse. Die durch dies Verfahren entstehenden Kurven ohne Tangente wollen wir im folgenden kurz als den Typ 1 bezeichnen. Er liegt also vor, *wenn Z_n stets oberhalb (unterhalb) von Z_{n-1} verläuft und nur die Stellen erster (zweiter) Art von Z_n auf Z_{n-1} liegen und wenn alle ausgezeichneten Stellen von Z_{n-1} wieder solche von Z_n sind.*

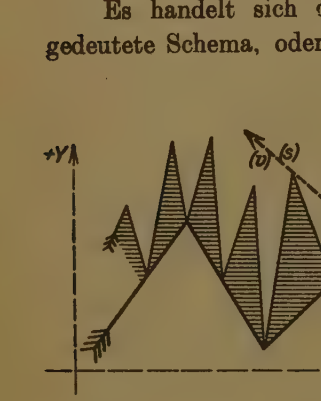


Fig 2.

Die Entstehung dieser Kurven kann man auch noch in einer etwas anderen Art darstellen, und in dieser Auffassung habe ich die Spezialfälle dieses Paragraphen in dem in Fußnote [1]) genannten Auszuge entwickelt. Da mir diese Art wegen ihrer vielleicht noch größeren Anschaulichkeit manche Vorteile, besonders für Vorlesungszwecke, zu bieten scheint, so sei sie hier noch einmal kurz wiedergegeben:

Wenn in der xy-Ebene eine nicht zur x-Achse senkrechte Strecke PQ gegeben ist, wenn man dann *oberhalb* ihrer einen dritten Punkt R so wählt, daß seine Projektion auf die x-Achse *innerhalb* derjenigen der Strecke PQ (mit Ausschluß der Grenzen) liegt, und endlich das Dreieck PQR zeichnet, so wollen wir kurz sagen, *wir hätten das Dreieck PQR auf die Strecke PQ aufgesetzt*, und nennen dann PQ die Basis, PR und QR die Schenkel und R die Spitze des aufgesetzten Dreiecks.

Wir gehen nun von einer beliebigen, nicht zur x-Achse senkrechten Strecke S_0 aus, deren Endpunkte die Koordinaten a und b $(> a)$ haben mögen, teilen diese Strecke in eine beliebige Anzahl (die nur endlich sein soll, aber auch $= 1$ sein darf) gleicher oder ungleicher Teile und setzen in der eben beschriebenen Art auf jeden Teil ein wohlbestimmtes Dreieck auf. Deren Gesamtheit wird dann eine *Kette* K_1 von Dreiecken bilden, die bis auf einen gemeinsamen Eckpunkt je zweier Nachbardreiecke völlig getrennt liegen. Mit jedem Schenkel jedes Dreiecks von K_1 machen wir nun genau dasselbe, wie soeben mit S_0, usw., so daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Dreieckskette K_n eine wohlbestimmte ist; vgl. Fig. 2, in der ein Stück der Kette K_n schraffiert ist. Die Bilder dieser Ketten spiegeln wir nun

ch an der Geraden $x = b$ und verschieben das ganze periodisch nach ks und rechts um die Strecke $2(b - a)$.

Dann erkennt man sofort, daß die Schenkelzüge der so erweiterten eieckketten K_n genau eine Folge von Zügen Z_n bilden, wie sie zum p 1 erfordert wurde, falls wir die Basisendpunkte zu Stellen erster, die itzen zu Stellen zweiter Art nehmen. Bezeichnet man noch die größte ter den Seiten der Dreiecke von K_n (es kommen nur endlich viele in tracht) mit c_n', so ist die Forderung (A) für diese Schenkelzüge Z_n sicher üllt, wenn wir jetzt verlangen:

(A′) *Es soll* $\sum c_n'$ *konvergent sein,*

nn es ist ja $c_n \leqq c_n'$. Die Forderung (B) bedarf gar keiner sachlichen derung und kann hier etwa so formuliert werden: Man verbinde die dpunkte der Basis eines jeden Dreiecks von K_n über Kreuz mit den itzen der Nachbardreiecke (also den linken Basisendpunkt mit der Spitze rechten Nachbardreiecks und umgekehrt; vgl. die beiden in Fig. 2 gechelten Geraden), messen für diese stets nach den Spitzen hin zu entierenden *Verbindungsgeraden* (v') die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genen Abweichungen ihrer Richtungen von der der positiven y-Achse d bezeichnen den größten Betrag dieser Winkel — es kommen wieder r endlich viele in Betracht — mit γ_n'. Dann lautet jetzt die Forderung:

(B′) *Es soll* $\lim \gamma_n' = 0$ *sein,*

ne Forderung, die indessen bei dem vorliegenden Typ 1 mit der Forderung (B) völlig gleichen Inhalts ist. Sind diese beiden Forderungen (A′) d (B′) erfüllt, so konvergieren also die Ketten K_n gegen eine durchweg etige Kurve ohne Tangente vom Typus 1.

Definiert man dem „Aufsetzen" genau analog das „Anhängen" von eiecken, indem man den oben benutzten Punkt R *unterhalb* der Strecke PQ ihlt, sonst aber genau ebenso verfährt, so kommt man natürlich gleichls zu einer Kurve vom Typ 1, wenn man die Dreiecke *stets anhängt*, att sie aufzusetzen. Nur hat man dann auch die Abweichung der Richngen der — nach wie vor nach den Spitzen der Nachbardreiecke hin zu ientierenden — Verbindungsgeraden (v') von der der *negativen* y-Achse messen.

2. Eine etwas weniger enge Forderung als die am Anfang von 1. stellte ist die, daß man verlangt, daß durch die ausgezeichneten Stellen n Z_{n-1} alle folgenden Züge (für $n = 1, 2, \ldots$) wenigstens hindurch hen sollen. Denn schon in diesem Falle werden diese Stellen zugleich urvenpunkte von Γ, so daß die Verbindungsgeraden (v) mit den zuhörigen Sehnen (s) identisch sind.

Zwei aufeinanderfolgende Züge dieser Art sind in Fig. 3 angedeutet. Die so entstehenden Kurven ohne Tangente sollen den *Typ 2* bilden, der also vorliegt, *wenn durch die ausgezeichneten Stellen eines Zuges alle folgenden Züge hindurchgehen.*

Nimmt man bei ihrer Bildung weiter an, daß die Stellen erster Art von Z_n alle unterhalb, die Stellen zweiter Art alle oberhalb von Z_n liegen (wie dies in Fig. 3 für die Extreme tatsächlich der Fall ist), so kann man sich diesen Typ auch wieder durch alternierendes Aufsetzen und Anhängen von Dreiecken entstanden denken, wie dies nach der unter 1. gegebenen Anleitung sich jeder selbst wird in allen Einzelheiten zurechtlegen können (vgl. auch den unter 1. genannten Auszug). Und man erkennt sofort, daß, wenn die dabei entstehenden Dreiecksketten K_n wieder die Forderung (B′) erfüllen, für die Züge Z_n ihrer Schenkel die Forderung (B) von selbst erfüllt ist; denn da jede Verbindungsgerade (v) mit zwei Verbindungsgeraden (v') ein Dreieck bildet und die Steigung jener somit ein mittlerer Wert zwischen den Steigungen dieser ist, so ist $\gamma_n \leqq \gamma_n'$, und es folgt also (B) aus (B′).

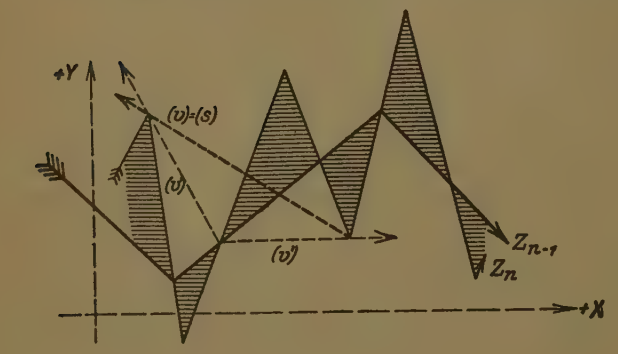


Fig. 3.

Auch wenn hierbei die Dreiecke nicht gerade alternierend, sondern in einem anderen Rhythmus wechselnd aufgesetzt oder angehängt werden, kann auf mannigfache Art eine Kurve vom Typ 2 entstehen, wie wir dies in § 5, 4 an dem Steinitzschen Beispiel noch genauer erkennen werden.

3. Zu einem dritten speziellen Typ gelangen wir, wenn wir, ähnlich wie bei 1, annehmen, daß alle Stellen erster Art von Z_{n-1} auch wieder Stellen erster Art von Z_n sind (ohne das entsprechende für die Stellen zweiter Art zu verlangen), daß auch alle anderen Stellen erster Art von Z_n auf Z_{n-1} liegen und daß der Zug Z_n sonst ganz oberhalb von Z_{n-1} verläuft.

Hierbei sind dann die Sehnen (s) nicht mehr mit den Verbindungsgeraden (v) identisch, da zwar die Minima, nicht aber die Maxima zugleich Kurvenpunkte von Γ sind. Diese Kurvenpunkte liegen aber nach den gemachten Annahmen keinesfalls unterhalb jener Maxima, so daß die Sehne (s), die zu einer Verbindungsgeraden (v) gehört, mindestens ebenso steil ist wie diese. Damit also (B) erfüllt sei, genügt es auch hier, wie

i 1., daß — kurz gesagt — die Verbindungsgeraden (v) mit wachsendem n liebig steil werden, denn dann ist es mit den Sehnen (s) erst recht : Fall.

Die so erhaltenen Kurven, deren Entstehungsschema in Fig. 4 andeutet ist, oder die durch Spiegelung des Verfahrens an der x-Achse stehenden, sollen als *yp 3* bezeichnet werden, : also vorliegt, *wenn oberhalb (unterhalb)* Z_{n-1} *liegt, nur seine llen erster (zweiter) Art* Z_{n-1} *hat und wenn diesen Stellen erster veiter) Art auch alle llen erster (zweiter) Art* Z_{n-1} *gehören.*

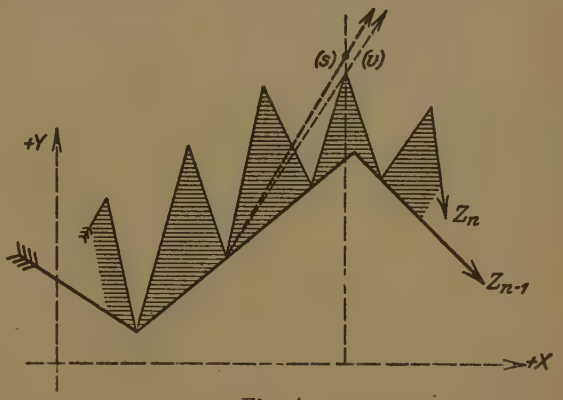


Fig. 4.

4. Als *Typ 4* endlich llen wir die entstande- Kurven bezeichnen, nn wir verlangen, *daß* $Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots$ *niemals unterhalb einer Stelle eiter Art von* Z_{n-1} *und niemals oberhalb einer Stelle erster Art von* $_{-1}$ *verläuft.*

Fig. 5 veranschaulicht das Entstehungsschema dieses Typs unter der iteren (aber ganz unwesentlichen) Annahme, daß alle Stellen zweiter Art Z_n oberhalb, alle llen erster Art unterb von Z_{n-1} liegen.

Auch hier erkennt n mit einem Blick, daß Sehnen (s) mindestens enso steil sind, wie die rbindungsgeraden (v), denen sie gehören; vgl. . 5. Zur Erfüllung von) genügt es also wieder, bisher, wenn die Verdungsgeraden (v) mit chsendem n beliebig l werden.

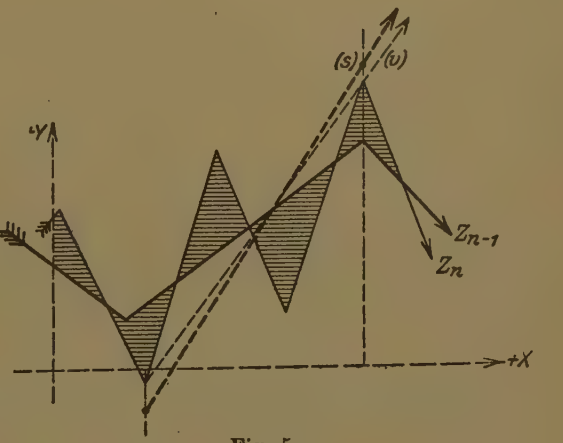


Fig. 5.

Auch die Entstehung der beiden letzten Typen 3 und 4 läßt sich sehr chaulich mit Hilfe von Dreiecksketten K_n darstellen, die durch Auf-

setzen (bei Typ 3) bzw. alternierendes Aufsetzen und Anhängen (bei Typ 4) entstehen. Das wird dem Leser keine Schwierigkeit machen; auch findet er dies in dem schon erwähnten Auszuge[1]) genauer dargestellt.

Bei allen diesen 4 Typen können wir natürlich — und wollen es nachträglich tun — auf die Geradlinigkeit der Züge Z_n verzichten. Alles Dargelegte bleibt nämlich seinem wesentlichen Inhalte nach ungeändert, wenn wir die in § 2, 1 eingeführten allgemeineren Züge Z_n benutzen. Auch die Dreiecksketten lassen sich entsprechend verallgemeinern.

Wir werden nun im folgenden sehen, daß in diesen vier speziellen Typen schon alle bisher bekannt gewordenen expliziten Beispiele von nirgends differenzierbaren Funktionen mit Ausnahme des einen in Fußnote [6]) genannten Typs enthalten sind.

§ 4.

Die analytische Darstellung des Verfahrens.

Wir haben bisher bei unseren Betrachtungen die geometrische Ausdrucksweise bevorzugt, um nach Möglichkeit eine Anschauung von der Nichtdifferenzierbarkeit der resultierenden Funktion zu geben, die stets in dem Auftreten der dafür als typisch erkannten Situation zu sehen ist. Doch bietet die Übertragung in die Sprache der Analysis keinerlei Schwierigkeiten.

Bei dem ganz allgemeinen, gemäß § 2, 1 und 2 noch erweiterten Hauptverfahren liegen die Dinge besonders einfach. Die Bedingung:

(A) *Es soll* $\sum c_n$ *konvergieren,*

hat von vornherein eine analytische Fassung.

Bezüglich (B) haben wir zunächst zu fordern: Jedem n entsprechen auf der x-Achse abwechselnd gelegene Punkte erster und zweiter Art, die eine mit $2(b-a)$ periodische Lage haben und in jedem Periodizitätsabschnitt nur in endlicher Anzahl sind. Wir bezeichnen dann allgemein mit x_n' die Abszisse eines beliebigen Punktes erster Art von Z_n und mit x_n'' die Abszisse eines der beiden Punkte zweiter Art, die durch genau einen weiteren solchen Punkt von x_n' getrennt liegen, — also kurz die Abszissen eines Punktpaares, wie es durch eine beliebige unserer Verbindungsgeraden (v) verbunden wird. Dann soll zunächst von einem gewissen Index m ab stets $f(x_n'') > f(x_n')$ sein (d. h. einfach: die Sehnen (v) zeigen stets nach oben) und wenn wir mit B_n den kleinsten unter den (nur in endlicher Anzahl zu berücksichtigenden) Beträgen der Quotienten

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'}$$

zeichnen, so soll $B_n \to +\infty$ streben (d. h. einfach: die Sehnen (s) werden erdies beliebig steil). Wir ersetzen also (B) durch die sachlich gleichdeutende Forderung:

(B_1) *Es soll für* $n > m$ *stets* $f(x_n'') > f(x_n')$ *sein, und es soll* $\lim B_n = +\infty$ *sein.*

In den meisten Einzelfällen wird man diese Bedingung noch in die nnigfachsten anderen Formen kleiden oder durch leichter zu verifizierende d wenigstens hinreichende ersetzen können. Dies gilt insbesondere für vier vereinfachten Typen des § 3. Da hier jedes Z_n im Verhältnis zu nem Vorgänger gewisse Bedingungen zu erfüllen hat, so liegt es nahe,

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \varrho_n(x), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\varphi_0(x) = \varrho_0(x)$$

setzen, so daß

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n(x)$$

rd. Die für die vier Sondertypen charakteristischen Bedingungen der Z_n ertragen sich dann ohne weiteres auf die Funktionen $\varrho_n(x)$:

In allen Fällen sind die $\varrho_n(x)$ stetige mit $2(b-a)$ periodische Funknen, die in jedem Periodizitätsabschnitt nur endlich viele Extreme oen. *Wir wollen nun diese Extremstellen von* $\varrho_n(x)$ *zu ausgezeichneten llen von* $\varphi_n(x)$, *die Minima zu Stellen erster Art, die Maxima zu llen zweiter Art, machen.*

Dann sind ersichtlich die weiteren Forderungen für

Typ 1: Die $\varrho_n(x)$ sind für $n = 1, 2, \ldots$ dauernd positiv (negativ), r ihre Minima (Maxima) sind sämtlich $= 0$, und zu diesen Nullstellen n $\varrho_n(x)$ gehören stets die sämtlichen Extremstellen von $\varrho_{n-1}(x)$, d. h. o alle ausgezeichneten Stellen von $\varphi_{n-1}(x)$.

Typ 2: Die Extremstellen von $\varrho_{n-1}(x)$ sind für alle folgenden Funknen Nullstellen.

Typ 3: Die $\varrho_n(x)$ sind wie bei Typ 1 beschaffen, nur brauchen zu n Nullstellen von $\varrho_n(x)$ nicht die sämtlichen Extremstellen von $\varrho_{n-1}(x)$ gehören, sondern nur die Minima, also nur die Stellen erster Art von $_{-1}(x)$.

Typ 4: An jeder Stelle erster (zweiter) Art von $\varphi_{n-1}(x)$ haben die genden Funktionen $\varphi_\nu(x)$, $\nu = n, n+1, \ldots$, kleineren (größeren) Wert.

Damit dann die Züge $\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varrho_\nu(x)$ die Forderung (A) erfüllen, muß fach $|\varrho_n(x)| \leqq c_n$ bleiben, und (B) kann folgendermaßen erfüllt werden:

Es sei A_n die absolut größte Steigung von $\varrho_n(x)$, oder genauer: die obere Grenze der Beträge ihrer Differenzenquotienten. Dann ist

$$(A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1})$$

eine obere Schranke der Steigung von $\varphi_{n-1}(x)$. Haben nun x_n' und x_n'' dieselbe Bedeutung wie oben, ist ferner auch von einem gewissen Index ab $\varrho_n(x_n'') - \varrho_n(x_n') > 0$ und bedeutet endlich B_n' den absolut kleinsten unter den Quotienten

$$\frac{\varrho_n(x_n'') - \varrho_n(x_n')}{x_n'' - x_n'}$$

— von denen wieder nur endlich viele in Betracht kommen — so genügt es zur Erfüllung von (B) bzw. (B_1) zu fordern, daß

$$B_n' - (A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}) \to +\infty$$

streben soll. Denn diese Differenz ist nichts anderes als eine untere Schranke für die absolute Steigung der Verbindungsgeraden (v) des Zuges Z_n, und bei den vier Sondertypen genügte es ja, von diesen zu fordern, daß sie beliebig steil werden. (B) ist also erfüllt, wenn wir verlangen:

(B_2) *Es soll für* $n > m$ *stets* $\varrho_n(x_n'') > \varrho_n(x_n')$ *sein, und es soll* $\lim [B_n' - (A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1})] = +\infty$ *sein.*

§ 5.

Die älteren Beispiele.

Wir gehen nun die bisher bekannt gewordenen Beispiele stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen (siehe [10]) durch und zeigen, daß sie sich sämtlich ganz zwanglos unter unser Verfahren einbeziehen lassen.

1. Das einfachste dieser Beispiele ist wohl dasjenige von G. Faber[10]). Er geht von der Funktion

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{in } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{in } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

aus, die sofort — wie auch alle folgenden Funktionen — mit der Periode 1 in die Intervalle $k \leqq x \leqq k+1$ für $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ fortgesetzt wird. Dann nimmt Faber weiter

$$\varrho_0(x) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \varrho_n(x) = \frac{1}{10^n}\psi(2^{n!}x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

so daß es sich um die Zickzackzüge

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{10^\nu}\psi(2^{\nu!}x)$$

ndelt. Da die Funktion $\psi(x)$ beschränkt ist, so ist hier offenbar die nvergenzbedingung (A) erfüllt; c_n kann $= \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ gesetzt werden.

Das Bild von $\varrho_n(x)$ ist der Schenkelzug von gleichschenkligen Dreiten, die mit der Basis $\frac{1}{2^{n!}}$ und der Höhe $\frac{1}{2 \cdot 10^n}$ nebeneinander auf der Achse stehen. Daher überzeugt man sich ganz unmittelbar — es genügt Feststellung, daß $2^{n!}$ stets ein *gerades* Vielfaches von $2^{(n-1)!}$ ist —, daß für *Typ 1* charakteristischen Bedingungen erfüllt sind. Ebenso untelbar sieht man, daß (B_2) erfüllt ist. Denn $\varrho_n(x_n'') > \varrho_n(x_n')$ ist *stets* illt, da die rechte Seite stets 0, die linke stets positiv ist; ferner ist

$$A_n = \frac{2^{n!}}{10^n} \quad \text{und} \quad B_n' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n!}}{10^n},$$

ein Blick auf das geschilderte Bild von $\varrho_n(x)$ lehrt. Es ist also

$$B_n' - (A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}) = \frac{1}{3} \frac{2^{n!}}{10^n} - \left(\frac{2^{1!}}{10^1} + \ldots + \frac{2^{(n-1)!}}{10^{n-1}} \right).$$

aber für $\nu \geqq 3$ stets $\frac{2^{\nu!}}{10^\nu} > \frac{2^{(\nu-1)!}}{10^{\nu-1}} > \frac{2^{1!}}{10^1}$ ist, so ist der eben hingeriebene Ausdruck für $n \geqq 4$

$$> \frac{1}{3} \frac{2^{n!}}{10^n} - (n-1) \frac{2^{(n-1)!}}{10^{n-1}} = \frac{2^{(n-1)!}}{10^{n-1}} \left[\frac{2^{(n-1)(n-1)!}}{30} - (n-1) \right],$$

daß (B_2) reichlich erfüllt ist. Die Fabersche Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \psi(2^{n!} x)$$

eine durchweg stetige aber nirgends differenzierbare Funktion. Da sie er unsern Typ 1 fällt, so erweist sie sich auch von unserm Standkte aus als ein besonders einfaches Beispiel.

Die eben durchgeführte Rechnung zeigt, daß die Faktoren $2^{n!}$ und $\frac{1}{10^n}$ den vorliegenden Zweck unnötig vorsichtig gewählt sind[17]). Nimmt n statt $2^{n!}$ ganze Zahlen b_n, für die $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ für $n \geqq 2$ stets eine gerade ze Zahl ist, und statt $\frac{1}{10^n}$ irgendwelche positive Zahlen α_n, für die $\Sigma \alpha_n$ vergiert, so würde es sich um

[17]) Faber bezweckt mehr mit seiner Funktion, denn er zeigt, daß auch $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\varepsilon} \right|$ für jedes noch so kleine positive ε bei $x \to x_0$ beliebig große Werte ; ist.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(b_n x)$$

handeln. Es wäre dann

$$A_n = a_n b_n \quad \text{und} \quad B_n' = \tfrac{1}{3} a_n b_n$$

und es brauchte nur die Forderung

$$\tfrac{1}{3} a_n b_n - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1}) \to +\infty$$

erfüllt zu werden. Nimmt man also etwa $0 < a < 1$ und $a_n = a^n$, ferner b als gerade ganze Zahl und $b_n = b^n$, so ist

$$a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} = \frac{a^n b^n - ab}{ab - 1} < \frac{a^n b^n}{ab - 1},$$

wobei wir uns sogleich $ab > 1$ denken. Jene Forderung ist daher sicher erfüllt, wenn

$$a^n b^n \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{ab - 1}\right] \to +\infty$$

strebt, was für $ab > 4$ gewiß der Fall ist. Wir haben also in Vereinfachung des Faberschen Beispiels das Ergebnis:

Bedeutet $\psi(x)$ die oben angegebene Funktion, ist $0 < a < 1$, b eine gerade ganze Zahl, und ist $ab > 4$, so ist

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \psi(b^n x)$$

eine durchweg stetige aber nirgends differenzierbare Funktion.

2. Im Anschluß an die Fabersche Funktion, die uns ein Beispiel zu unserm Typ 1 lieferte, lassen sich nun leicht ähnlich angelegte Beispiele zu den andern Typen — mit geradlinigen oder krummlinigen Z_n — bilden, wodurch wir u. a. auch das Weierstraßsche Beispiel als unter unsere Typen fallend erkennen werden.

a) Wählt man an Stelle der Funktion $\psi(x)$ die wesentlich dasselbe Bild bietende Funktion $|\sin \pi x|$, so handelt es sich um die Funktion

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n |\sin b^n \pi x|,$$

die aus denselben Gründen wie $f_1(x)$ zum Typ 1 gehört. Für sie ist nun — wie ein Blick auf das Bild der Funktion $\varrho_n(x) = a^n |\sin b^n \pi x|$ lehrt —

$$A_n = a^n b^n \pi, \qquad B_n' = \tfrac{2}{3} a^n b^n.$$

(B_2) ist daher sicher erfüllt, falls

$$\tfrac{2}{3} a^n b^n - \frac{a^n b^n \pi}{ab - 1} \to +\infty$$

ebt, was für

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0 \quad \text{oder} \quad ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi$$

r Fall ist.

b) Geht man statt von $\psi(x)$ von dem geradlinig-gebrochenen Streckenge aus, der die Punkte $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $(2, 0)$ verbindet d bezeichnet diese mit der Periode 2 auf alle x erweiterte Funktion t $\chi(x)$, so ist

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \chi(b^n x) \quad \text{oder} \quad \bar{f}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n \chi(b^n x)$$

ein Beispiel zum (geradlinigen) Typ 2, falls a und b dieselben Bengungen erfüllen wie bisher. Denn die für Typ 2 charakteristischen dingungen sind — wie aus der Geradheit von b folgt — erfüllt und beglich (B_2) ergibt sich genau dieselbe Rechnung wie vorher.

c) Ersetzt man nun $\chi(x)$ durch $\sin \pi x$, so lehren dieselben Ergungen wie unter a), daß auch

$$g_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin b^n \pi x \quad \text{und} \quad \bar{g}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n \sin b^n \pi x$$

gends differenzierbare Funktionen des (krummlinigen) Typ 2 sind, wenn $< a < 1$, b gerade ganz und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist[18]).

---

[18]) Die Funktion $g_2(x)$ scheint mir ein besonders einfaches Beispiel einer nirds differenzierbaren Funktion und auch dem Weierstraßschen Beispiel an rchsichtigkeit überlegen. Darum lohnt es sich vielleicht, den aus dem übrigen ammenhang herausgeschälten lückenlosen *Beweis* unseres Ergebnisses hier besons anzugeben:

Für ein gegebenes x_0 sei k_n bei jedem $n = 1, 2, \ldots$ diejenige ganze Zahl, für $\frac{k_n}{b^n} \leqq x_0 < \frac{k_n + 1}{b^n}$ ist. Dann bilde man

$$\Delta(x_1, x_2) = \frac{g_2(x_2) - g_2(x_1)}{x_2 - x_1}$$

1) für $x_1 = \frac{k_n}{b^n}$, $x_2 = \frac{k_n + \frac{3}{2}}{b^n}$, 2) für $x_1 = \frac{k_n - \frac{1}{2}}{b^n}$, $x_2 = \frac{k_n + 1}{b^n}$,

daß beidemal $x_1 \leqq x_0 < x_2$ ist und $x_2 - x_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{b^n}$ mit $\frac{1}{n}$ zu 0 abnimmt. Es ist , wenn sich das obere Vorzeichen auf die Wahl 1), das untere auf 2) bezieht,

$$\Delta(x_1, x_2) = \frac{2}{3} b^n \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu \left[\sin b^\nu \pi x_2 - \sin b^\nu \pi x_1 \right] \mp (-1)^{k_n} \cdot a^n \right\}.$$

nun stets $|\sin x'' - \sin x'| \leqq |x'' - x'|$, so ist im einen der beiden Fälle

$$\Delta > \frac{2}{3} a^n b^n - \pi \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^\nu > a^n b^n \left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right],$$

d) Wählt man in der Darstellung von $f_1(x)$ und $g_1(x)$ die ganze Zahl b *ungerade*, so hat man in den Funktionen

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \psi(b^n x),$$

$$g_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n |\sin b^n \pi x|$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1, \ b \text{ ungerade ganz,} \\ \alpha b > 4 \text{ bzw. } > 1 + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

einfache Beispiele zum Typ 3; denn jetzt sind die Maxima von $\varrho_{n-1}(x)$ nicht Nullstellen, sondern wieder Maxima von $\varrho_n(x)$, vgl. Fig. 4. Alle übrigen Betrachtungen sind dieselben wie bei den vorangehenden Beispielen.

e) Wählt man analog in $f_2(x)$ und $g_2(x)$ die ganze Zahl b ungerade und von der Form $4m+1$ oder in $\bar{f}_2(x)$ und $\bar{g}_2(x)$ ungerade und von der Form $4m+3$, so hat man in

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \chi(b^n x),$$

$$g_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin b^n \pi x,$$

$$\begin{cases} b = 4m+1, \ 0 < \alpha < 1, \\ \alpha b > 4 \text{ bzw. } > 1 + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\bar{f}_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \chi(b^n x),$$

$$\bar{g}_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \sin b^n \pi x$$

$$\begin{cases} b = 4m+3, \ 0 < \alpha < 1, \\ \alpha b > 4 \text{ bzw. } > 1 + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

einfache Beispiele zum Typ 4. Denn bei $f_4(x)$ und $g_4(x)$ liegen die Maxima von $\varrho_{n-1}(x)$ an den Stellen der Form $\frac{2k+\frac{1}{2}}{b^{n-1}}$, die Minima an den Stellen $\frac{2k+\frac{3}{2}}{b^{n-1}}$, ($k$ beliebig, ganz). An den ersten Stellen ist aber $\varrho_n(x)$ positiv, an den andern negativ, denn es handelt sich dort um $\chi(z)$ bzw. $\sin \pi z$ für $z = b(2k+\frac{1}{2})$ im ersten, für $z = b(2k+\frac{3}{2})$ im zweiten Fall. Da $b = 4m+1$ sein soll, so sind dies wieder Zahlen der Form $2k+\frac{1}{2}$ bzw. $2k+\frac{3}{2}$, woraus die Behauptung folgt. Analog schließt man für $\bar{f}_4$ und $\bar{g}_4$.

f) Ersetzt man in $g_4(x)$ *oder* $\bar{g}_4(x)$ die Variable x durch $x+\frac{1}{2}$, so gehen beide in die Weierstraßsche Funktion

---

im andern Falle < als der entgegengesetzte Wert. Dieser Wert steigt aber, da $\alpha b > 1 + \frac{3}{2}\pi$ sein soll, mit n über alle Grenzen, so daß die Differenzenquotienten mit entgegengesetzten Vorzeichen beliebig großer Werte fähig sind. Nach dem Kriterium vom Ende der Einleitung ist daher $g_2(x)$ nirgends differenzierbar. Vgl. meine kurze Note hierüber und über das Fabersche Beispiel in den Jahresberichten d. Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. 26 (1918), S. 278–280.

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos b^n\pi x$$

er, bei der nun b irgendeine ungerade Zahl sein darf und $0<a<1$, $>1+\frac{3}{2}\pi$ sein muß.

Damit haben wir nun einfachste Beispiele für alle unsere Typen ge-nnen und gleichzeitig auch die Weierstraßsche Funktion unter unser gemeines Verfahren untergeordnet [19]).

3. E. Steinitz [4]) entwickelt ein Verfahren, nach dem man beliebig ele nirgends differenzierbare Funktionen konstruieren kann. Bei Funk-nen, die nur einer endlichen Ableitung entbehren, gelangt er, wie auch ber [5]), zu einem sehr allgemeinen hinreichenden Kriterium zur Er-nnung solcher Funktionen. Für die Herstellung von Funktionen, die in serm strengeren Sinne nirgends differenzierbar sind, beschränkt er sich f die Durchführung eines Beispiels, — dem sich allerdings beliebig viele dere zur Seite stellen lassen. Das Verfahren ist äußerlich von dem sern durchaus verschieden.

Die Kurve soll in (0,0) beginnen und in (1,1) enden. Der geradlinig-brochene Weg T_0, der von (0,0) über (1,0) nach (1,1) führt, wird nun rch einen Treppenweg T_1 ersetzt, dessen Stufen die Abszissen $\frac{0}{6},\frac{1}{6},\ldots,\frac{6}{6}$ d die Ordinaten $\frac{0}{6},\frac{4}{6},\frac{8}{6},\frac{3}{6},-\frac{2}{6},+\frac{2}{6},\frac{6}{6}$ haben; vgl. den in Fig. 6 stark sgezogenen Weg. Jede Stufe von T_1 wird analog durch 6 Stufen ersetzt, dem allgemein eine Stufe von der Breite b und der Höhe h ($\gtrless 0$) durch

---

[19]) Der unabhängige *Beweis*, vgl. [18]), geht hier so: Für gegebenes x_0 sei k_n durch $-\frac{1}{2}\leqq b^n x_0<k_n+\frac{1}{2}$ bestimmt und $\Delta(x_1,x_2)=\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

1) für $x_1=\dfrac{k_n-1}{b^n}$, $x_2=\dfrac{k_n+\frac{1}{2}}{b^n}$; 2) für $x_1=\dfrac{k_n-\frac{1}{2}}{b^n}$, $x_2=\dfrac{k_n+1}{b^n}$

ildet. Es wird, wenn sich wieder das obere Zeichen auf die Wahl 1), das untere 2) bezieht:

$$\Delta(x_1,x_2)=\frac{2}{3}b^n\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\alpha^\nu\left[\cos b^\nu\pi x_2-\cos b^\nu\pi x_1\right]\pm(-1)^{k_n}\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right\}.$$

auch stets $|\cos x''-\cos x'|\leqq|x''-x'|$, so ist in einem der beiden Fälle wieder

$$\Delta>\alpha^n b^n\left[\frac{1}{3}-\frac{\pi}{\alpha b-1}\right],$$

andern $<$ als der entgegengesetzte Wert, woraus unsere Behauptung folgt. — rigens ergibt sich hier sogar das bessere, von Bromwich [11]) herrührende Resultat, schon die Annahme $\alpha b>1+\frac{3}{2}\pi(1-\alpha)$ für die Nichtdifferenzierbarkeit von) ausreicht.

6 Stufen von der Breite $\frac{1}{6}b$ und mit den Höhen $\frac{0}{6}h$, $\frac{4}{6}h$, $\frac{8}{6}h$, $\frac{3}{6}h$, $-\frac{2}{6}h$, $+\frac{2}{6}h$, $\frac{6}{6}h$ ersetzt wird. Dies führt zu T_2 und durch Wiederholung allgemein zum Treppenweg T_n, und Steinitz zeigt nun, daß die T_n einer Grenzlage zustreben und daß diese eine stetige nirgends differenzierbare Funktion darstellt[20]). Da die Treppenwege, entgegen unsern Zügen Z_n, nicht durch stetige Funktionen dargestellt werden können, so macht bei Steinitz schon der Stetigkeitsbeweis einige Mühe; auch daß die Funktionen nirgends differenzierbar sind, ergibt sich nicht ganz einfach.

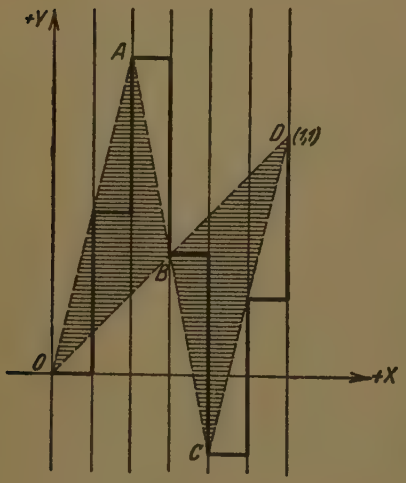


Fig. 6.

Nach einer leichten Abänderung aber — nicht der Funktion, sondern nur des Verfahrens, das zu ihr führt — ordnet sich auch die Steinitzsche Kurve unter unser allgemeines Verfahren. Nehmen wir nämlich statt des Treppenweges T_0 die direkte Strecke OD (s. Fig. 6) als Zug Z_0 und nun statt T_1 den geradlinig-gebrochenen Schenkelzug $OABCD$ als Z_1 und machen das Entsprechende bei jedem Übergang von T_{n-1} zu T_n, so gelangen wir zu einer Folge von (sehr unregelmäßigen und daher nicht so leicht zu überschauenden) Zickzackzügen Z_n, für die unsere allgemeinen Bedingungen (A) und (B_1) erfüllt sind, auch wenn wir uns noch der Vollständigkeit halber das entstehende Bild an der Geraden $x=1$ gespiegelt und nun die ganze Figur beliebig oft nach rechts und links um die Strecke 2 verschoben denken.

Man erkennt das folgendermaßen: Der größte Vertikalabstand des Zuges $OABCD$ von der Strecke OD ist gleich der Stufenhöhe von OD; allgemein ist also der größte Abstand der Züge Z_n und Z_{n-1} gleich der größten Stufenhöhe von Z_{n-1} bzw. T_{n-1}. Nun hat aber T_1 als größte

---

[20]) Steinitz' allgemeine Betrachtungen beruhen auf der Erzeugung stetiger Funktionen durch Folgen solcher k^n-stufigen Treppenwege T_n. Er erhält: Ist α_n die *Maximal*stufenhöhe, so ist die Konvergenz von $\Sigma\alpha_n$ hinreichend zur Stetigkeit der erzeugten Funktion; ist β_n die *Minimal*höhe, so ist die Bedingung $k^n\beta_n \to +\infty$ hinreichend dafür, daß nirgends ein *endlicher* Differentialquotient existiert. Soll die Funktion in unserm Sinne nirgends differenzierbar sein, so müssen die T_n noch weitere Bedingungen erfüllen, die nicht ganz leicht allgemein zu formulieren sind und die von ihm nur an dem obigen Beispiel erläutert werden. — Sehr verwandt liegen die Dinge bei dem allgemeinen Verfahren, das Faber[5]) angibt.

ufenhöhe $\frac{5}{6}$, also allgemein T_ν als größte Stufe $(\frac{5}{6})^\nu$, so daß $c_n \leqq (\frac{5}{6})^{n-1}$ d somit (A) erfüllt ist.

Weiter sieht man sofort, daß die kleinste Steigung einer Strecke von viermal so groß ist als die Steigung von Z_0, welche $= 1$ ist. Allgemein gibt sich durch Wiederholung dieses Schlusses, daß die kleinste Steigung einer Strecke von Z_ν notwendig $\geqq 4^\nu$ ist. Überdies haben die Strecken n Z_ν *immer abwechselnd* positive und negative Steigung.

Endlich handelt es sich um die Verbindungsgeraden (v) des Zuges Z_n, e hier wieder mit den Sehnen (s) identisch sind. Ihre Steigung kann an so abschätzen: Ein Minimum von Z_n ist *entweder* auch schon ein nimum von Z_{n-1} und dann sind, wie ein Blick auf eine Skizze lehrt, e von ihm ausgehenden Verbindungsgeraden (v) noch steiler als die von n ausgehenden Strecken von Z_{n-1}, *oder* es ist neu entstanden. Hat er allgemein eine Strecke von Z_{n-1}, d. h. eine Stufe von T_{n-1} die eite b und die (absolute) Höhe h, also die (absolute) Steigung $\frac{h}{b} = A$, d wird sie, wie in Fig. 6 (oder deren Spiegelbild) die Strecke OD, durch n Zickzackzug $OABCD$ ersetzt, so ist C das neue Minimum von Z_n. e beiden Maxima, mit denen diese Stelle nun verbunden werden muß, gen sicher höher als O, so daß die erste Hälfte von (B_1) erfüllt ist; d ihr Horizontalabstand von C ist notwendig $< 2b$. Da nun C um $\frac{1}{3}h$ terhalb O liegt, so ist die (absolute) Steigung der Verbindungsgeraden (v) ter allen Umständen $\geqq \frac{1}{6}A$. Folglich ist — wenn B_n dieselbe Bedeutung e in der Forderung (B_1) hat —

$$B_n \geqq \tfrac{1}{6} a_{n-1} \geqq \tfrac{1}{6} 4^{n-1},$$

daß auch die zweite Hälfte von (B_1) reichlich erfüllt ist: Auch die einitzsche Funktion erweist sich auf Grund unserer Bedingungen als rgends differenzierbar.

4. Das Dinische Konstruktionsverfahren, dem wir uns als letztem wenden, ist sehr allgemein gehalten und die entwickelten Kriterien sind, e schon erwähnt, recht kompliziert, und zwar in einem Maße, daß nicht mal die *Möglichkeit* ihrer Erfüllbarkeit einzusehen ist. Dies gilt insondere von dem letzten Teil der Kriterien, die, wenn sie sich erfüllen ßen, zu Funktionen führten, denen an jeder Stelle sowohl eine bestimmte chtsseitige als auch eine bestimmte linksseitige Ableitung fehlte. Über e etwaige Existenz solcher Funktionen ist aber bis heute noch nichts kannt[21]). Ja, die letzten Sätze auf S. 213 müssen sogar so aufgefaßt rden, als ob die entwickelten Kriterien auch zu Funktionen führten,

[21]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, 594, sowie H. Hahn[10]).

für die an jeder Stelle die beiden oberen Derivierten $+\infty$, die beiden unteren Derivierten $-\infty$ wären. Solche Funktionen kann es aber unmöglich geben. Denn nimmt man in einem (beliebig kleinen) x-Intervall J diejenige Stelle x_0 desselben, an der die Funktion z. B. das absolute Maximum erreicht, so ist dort gewiß die rechte obere Derivierte nicht positiv, die linke untere nicht negativ (bzw. das eine von beiden, falls x_0 an einem Ende von J liegt), also sicher nicht $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Die Funktionen bzw. Klassen von Funktionen, die dann Dini tatsächlich angibt, genügen sehr viel engeren Bedingungen und fallen ohne weiteres unter unser Konstruktionsverfahren. Auf sie wollen wir daher nicht im einzelnen eingehen, da die Betrachtungen den bisherigen ganz ähnlich sein würden. Aber auch seine allgemeinsten Sätze lassen sich mit ganz unwesentlichen (und bei seinen späteren Spezialisierungen reichlich eingehaltenen) Einschränkungen unter unser Verfahren aufnehmen. Es würde zuweit führen, dies mit allen Einzelheiten bei allen Dinischen Konstruktionen zu zeigen. Wir greifen einen der weitestgehenden Sätze heraus, der folgende sechs Ausnahmen macht:

1. Die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ sind in $a \leqq x \leqq b$ stetig und haben dort beschränkte Ableitungen.

2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ist dort konvergent und definiert dort eine stetige Funktion $f(x)$[22]).

3. Jedes $u_n(x)$ habe dort endlich viele Maxima und Minima; und wenn δ_n der *größte* Abstand der Abszissen zweier konsekutiver Extreme und D_n die absolut *kleinste* Differenz zweier konsekutiver Extremwerte bedeutet, so ist neben $\delta_n \to 0$ auch $\frac{\delta_n}{D_n} \to 0$.

4. Wenn für jedes x mit h_n diejenigen *beiden* Inkremente bezeichnet werden (das eine > 0, das andere < 0), für die $x + h_n$ das erste rechts bzw. links liegende Extremum liefert, für das $|u_n(x+h_n) - u_n(x)| \geqq \frac{1}{2} D_n$ ist, — so soll es positive Zahlen $\overline{R_n}$ geben, so daß für alle x in (a, b) und die beiden jedesmal zugehörigen h_n

$$|R_n(x+h_n) - R_n(x)| \leqq 2\overline{R_n}$$

bleibt. Hierbei ist $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu(x) = R_\nu(x)$ gesetzt.

5. Wenn in (a, b) stets $|u_n'(x)| \leqq \overline{u}_n$ ist, so soll, wenigstens von einem gewissen Index ab,

[22]) Daß Dini die Stetigkeit von $f(x)$ *voraussetzt*, während wir sie durch die Forderung (A) erzwingen, ist natürlich ganz belanglos.

$$\frac{4\delta_n}{D_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\bar{u}_\nu + \frac{4\overline{R_n}}{D_n} \leqq \vartheta < 1$$

iben.

6. Das Vorzeichen von $[u_n(x+h_n) - u_n(x)]$ hängt für kein x und n $n \geqq m$ von demjenigen von h_n ab.

Sind alle diese Voraussetzungen erfüllt und wird dann $f(x)$ wie bis- durch Spiegelung und Verschiebung auf alle x erweitert, *so ist* $f(x)$ *e durchweg stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion.*

Außer dem eben aufgestellten gibt Dini noch gewisse in bezug auf und 5. etwas abgeänderte Voraussetzungssysteme, auf die wir indessen ht eingehen wollen, da, wie wir gleich sehen werden, die Voraus- zung 6. dem ganzen Verfahren fast ganz dasjenige Interesse nimmt, 3 es etwa über die uns schon geläufigen Spezialfälle hinaus haben nte. Denn dieses System von Bedingungen ist nur scheinbar so außer- lentlich allgemein. Tatsächlich ist es ziemlich eng. Ja, streng ge- mmen sind die Bedingungen überhaupt gar nicht erfüllbar, da die Forde- ng 6. etwas Unmögliches verlangt. Wählt man nämlich zwei aufein- derfolgende Extreme E_1 und E_2 der Kurve $u_n(x)$, deren Ordinaten- erschied gerade $= D_n$ ist, ist ferner x_0 die Abszisse desjenigen zwischen und E_2 auf $u_n(x)$ gelegenen Punktes, dessen Ordinate das arithmetische tel der Ordinaten von E_1 und E_2 ist, so sind nach 4. für $x_0 + h_n$ die szissen von E_1 und E_2 zu nehmen, so daß das in 6. gebrauchte Vor- chen gerade mit h_n wechselt.

Beseitigt man diese kleine Unstimmigkeit, indem man etwa bei 4. in chem Falle *linker Hand* nicht das erste, sondern erst das zweite tremum als $x + h_n$ bezeichnet, so sind die Bedingungen doch noch ht sehr allgemein; denn die eben durchgeführte Betrachtung lehrt ter, daß die Differenz irgend zweier Extremwerte von $u_n(x)$ niemals D_n sein darf. *Für die Kurven* $u_n(x)$ *haben also alle Maxima und alle nima denselben Wert*; die Kurven gehören demnach nur den relativ fachsten Typen an.

Auch die Forderung 4. ist in der angegebenen Form bei einer vor- gten Reihe schwerlich anders zu verifizieren, als daß angenommen d, es sei für alle x stets $|R_n(x)| \leqq \overline{R_n}$. Tatsächlich ist das in allen eren Entwicklungen bei Dini der Fall; und die in 4. von ihm ge- lte Bezeichnung „$2\overline{R_n}$“ für die Abschätzung der Differenz, weist auch auf hin, daß es so bei dem allgemeinen Kriterium zugrunde liegend acht ist. Ersetzen wir nun 4. durch die bequemere Forderung, daß alle x in (a, b) stets $|R_n(x)| \leqq \overline{R_n}$ bleibt — und dies ist die oben ähnte Einschränkung, die wir machen müssen —, so läßt sich das nische Verfahren folgendermaßen als Spezialfall des unseren auffassen:

Wir identifizieren die $u_n(x)$ mit unseren $\varrho_n(x)$ und wählen deren Extreme als ausgezeichnete Stellen auf $\varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x)$. Dann ist aber wenn wir uns an die Bezeichnungen des § 3 anschließen,

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_\nu(x_n'') - u_\nu(x_n')}{x_n'' - x_n'} + \frac{u_n(x_n'') - u_n(x_n')}{x_n'' - x_n'} + \frac{R_n(x_n'') - R_n(x_n')}{x_n'' - x_n'}$$

Hier ist der mittlere Summand $\geqq \frac{D_n}{4\delta_n}$, die beiden anderen aber sind $\leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} \bar{u}_\nu$ bzw. $\leqq \frac{2\overline{R_n}}{4\delta_n}$. Nach der Dinischen Voraussetzung 5. ist also für hinreichend große n das Vorzeichen des mittleren Summanden für den ganzen Ausdruck maßgebend; und da sicher $u_n(x_n'') > u_n(x_n')$ ist, so ist auch — wenigstens von einem gewissen Index an — $f(x_n'') > f(x_n')$. Weiter ist aber jetzt

$$B_n \geqq \frac{D_n}{4\delta_n} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \bar{u}_\nu - \frac{2\overline{R_n}}{4\delta_n},$$

was nach den Voraussetzungen 5. und 3. sicher positiv unendlich wird. Beide Teile unserer Forderung (B_1) sind somit erfüllt, d. h. das Dinische Verfahren ist als Spezialfall in dem unseren enthalten.

Berlin-Lichterfelde, den 9. März 1918.

(Eingegangen am 12. März 1918.)

Über eine besondere Klasse von Linienkomplexen.

Von

Hans Mohrmann in Karlsruhe i. B.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Gleichung und Erzeugung der Komplexe.

II. Gestalt der Komplexe.

a) Komplexkurven und -kegel.

b) Singuläre und mehrfache Komplexstrahlen.

III. Anwendungen.

a) Der Vosssche Komplex (4. Grades) der Tangenten aller gewundenen Kurven 3. Ordnung, die drei gegebene Geraden berühren.

b) Die Komplexe (1., 2. und 3. Grades), deren Strahlen mit drei gegebenen Geraden Graßmannsche Doppelverhältnisse konstanter Summe bilden.

Einleitung.

1. Der besonderen Klasse von Linienkomplexen, die im folgenden achtet werden soll, gehören außer den *linearen Komplexen* (die für sie t charakteristisch sind) alle die *Komplexe 2. Grades* an, deren singu- Fläche (im weiteren Sinne) eine nicht-spezielle doppelte Fläche 2. Gra- ist, die also unter Verwendung der Bezeichnungsweise der Weierstraß- n Elementarteilertheorie durch die Symbole

$$[(111)\ 111],\ [(111)\ 21],\ [(111)\ 3],$$
$$[(111)\ (21)],\ [(111)\ (11)\ 1],\ [(111)\ (111)]$$

akterisiert werden können; ferner der *Vossche Komplex 4. Grades*, ldet von den Tangenten aller gewundenen kubischen Kurven, die drei bene (zueinander windschiefe) Geraden berühren; sodann die *Kluyver- n Komplexe (1. und) 4. Grades*, die Örter der vierten Geraden g, die

zusammen mit drei festen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ Quadrupel zu einander wind schiefer Wendepunktstangenten gewundener Kurven 4. Ordnung 1. Ar bilden[1]); endlich *allgemein sämtliche Komplexe von Plückerschen gera den Linien, die mit drei gegebenen (festen) Geraden in einer Weise ver knüpft sind, die in irgendeiner algebraischen Beziehung zwischen de Graßmannschen (Momenten-) Doppelverhältnissen der Komplexstrahle mit den gegebenen Geraden ihren analytischen Ausdruck findet*, für di also z. B. die Werte zweier der sechs Doppelverhältnisse beständig ein ander gleich sind (lineare und quadratische Komplexe)[2]), oder für die etw die Summe aller Doppelverhältnisse konstant ist[3]) (Komplexe 1., 2. un 3. Grades) usw.

Alle diese Komplexe enthalten ∞^1 (erzeugende) lineare Kongruenze (Strahlennetze), deren Leitgeraden mit den drei gegebenen Geraden (di nicht selbst Komplexstrahlen zu sein brauchen) einer und derselben Regel schar 2. Ordnung angehören, die also unter den Erzeugenden dieser Regel schar eine gewisse *involutorische Korrespondenz* hervorrufen. Umgekehrt erzeugen die ∞^1 Strahlennetze, deren Leitgeraden in einer und derselbe Regelschar 2. Ordnung einer involutorischen Korrespondenz genügen, einen Komplex, dessen Strahlen mit drei festen Geraden in einer Weise ver knüpft sind, die in einer Beziehung zwischen den Graßmannschen Dop pelverhältnissen jener drei festen Geraden und den Komplexstrahlen ihrer Ausdruck findet.

2. Die drei festen (zueinander windschiefen) Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ bestim men eine Regelschar 2. Ordnung $(g_1\, g_2\, g_3)$, der sie angehören. Eine Ebene die nicht Tangentialebene der Trägerfläche φ jener Regelschar ist, ha

[1]) Auf die betreffende Arbeit J. C. Kluyvers in den „Verslagen en mededeelingen der Amsterdamer Akademie der Wissenschaften (III, 8 (1891), S. 346 ff.) bin ich erst nach Fertigstellung vorliegender Arbeit aufmerksam geworden. Von kurzen, nach träglich hinzugefügten Bemerkungen abgesehen, konnte ich daher hier auf die Kluyverschen Komplexe nicht mehr eingehen. Ich gedenke jedoch bei andere Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurück zu kommen und dann auch gewisse Fra gen zu erledigen, die Kluyver, dem offenbar Begriff und Bedeutung der Graßmann schen Doppelverhältnisse unbekannt gewesen ist, nicht vollständig beantwortet hat wie z. B. die Frage nach der Anzahl der Scharen von Raumkurven 4. Ordnung 1. Art die vier gegebene zueinander windschiefe Geraden zu Wendepunktstangenten haben sowie die (aufs engste damit zusammenhängende) Frage der Kollinearität solcher Quadrupel von Wendepunktstangenten. (Vgl. Anm. [20])).

[2]) Vgl. Mohrmann, Über die Graßmannschen Doppelverhältnisse von vier geraden Linien im Raum, Mathematische Annalen, Bd. 79 (1918), Heft 1/2.

[3]) Die Summe der gewöhnlichen Doppelverhältnisse d_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 6)$ von vier Elementen eines binären Gebietes ist immer konstant; es ist identisch $\sum_{i=1}^{6} d_i = 8$

dem Komplex die Tangenten einer ebenen Kurve (Komplexkurve), mit jeder der ∞^1 erzeugenden linearen Kongruenzen *eine* gerade ie gemein. Jede Tangente der Komplexkurve trifft zwei Erzeugende Regelschar $(g_1\ g_2\ g_3)$. Die Komplexkurve ruft daher in der Regel- ar $(g_1\ g_2\ g_3)$ eine involutorische Korrespondenz hervor, durch die der nplex definiert werden kann, sie ist Direktionskurve[4]) der von der elschar $(g_1\ g_2\ g_3)$ getragenen involutorischen Korrespondenz.

Durch die Regelschar 2. Ordnung $(g_1\ g_2\ g_3)$ und die Komplexkurve irgendeiner Ebene allgemeiner Lage ist daher ein Komplex der hier betrachtenden Klasse vollständig und eindeutig bestimmt. Es steht lgedessen zu vermuten, daß sich die Behandlung derartiger Komplexe wesentlichen auf eine Aufgabe der ebenen Geometrie zurückführen en muß, was in der Tat der Fall ist. Und zwar gewährt die Verfol- g dieses Gedankens einen so übersichtlichen und vollständigen Einblick den Bau dieser Komplexe, einschließlich ihrer Realitätsverhältnisse, sie wie spielend zugänglich werden, wie am Beispiel des so interessanten sschen Komplexes (III, a) gezeigt werden soll, sowie an dem Beispiel kubischen Komplexe, deren Strahlen mit drei festen Geraden $g_1\ g_2\ g_3$ ßmannsche Doppelverhältnisse konstanter Summe bilden (III, b)[5]).

I. Gleichung und Erzeugung der Komplexe.

3. Sind $(g_i\ g_k)$ die bekannten bilinearen Invarianten der Cayleyschen ordinaten zweier Plückerscher geraden Linien g_i und g_k, deren Ver- winden die Bedingung des Schneidens der beiden Geraden ausdrückt; bezeichnet man mit U, V, W die quadrilinearen Kollineations-In- ianten:

$$U = (g\,g_1)(g_2\,g_3), \quad V = (g\,g_2)(g_3\,g_1), \quad W = (g\,g_3)(g_1\,g_2)$$

vier Geraden $g\ g_1\ g_2\ g_3$, so sind ihre sechs Graßmannschen Doppel- hältnisse

$$[g\,g_i\,g_k\,g_l] = \frac{(g\,g_k)}{(g\,g_l)} : \frac{(g_i\,g_k)}{(g_i\,g_l)} \qquad (i + k + l = 1, 2, 3)$$

ch die folgenden Quotienten gegeben:

$$D_1 = \frac{V}{W}, \quad D_2 = \frac{W}{U}, \quad D_3 = \frac{U}{V}; \quad D_1' = \frac{W}{V}, \quad D_2' = \frac{U}{W}, \quad D_3' = \frac{V}{U}.$$

---

[4]) Vgl. R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie ynthetischer Behandlung, III. Teil, Leipzig 1896, S. 450.

[5]) In der Schar dieser Komplexe befinden sich auch reduzible. Daraus ergibt insbesondere die merkwürdige Tatsache, daß *jeder nicht-spezielle lineare Komplex weifacher Weise* als (Teil-) Ort von Geraden aufgefaßt werden kann, die mit je Tripeln fester Geraden Graßmannsche Doppelverhältnisse bilden, deren Summe stant ($= -2$ und $= -3$) ist (Nr. 27 und 28).

Die drei letzten haben die reziproken Werte der drei ersten; und zwischen diesen besteht die Identität

$$D_1 D_2 D_3 = 1. \tag{3}$$

Es sind daher *zwei* und nur zwei der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse *voneinander unabhängig.*

4. Eine *beliebige algebraische Relation* zwischen den Graßmannschen Doppelverhältnissen:

$$F(D_1 D_2 D_3 \; D_1' D_2' D_3') = C$$

führt, wie aus den Gleichungen (2) unmittelbar folgt, immer auf eine in den U, V, W *homogene* Gleichung

$$f(U:V:W) = 0.$$

Sind $g_1 g_2 g_3$ drei fest gegebene Geraden, während g eine variable Gerade bezeichnet, so sind die Gleichungen (1) die Komplexgleichungen der gegebenen Linien $g_1 g_2 g_3$, d. h. die Geraden erscheinen als die Achsen der speziellen linearen Komplexe, die diese Gleichungen (1) darstellen. Die Gleichung

$$f(U:V:W) = 0 \tag{4}$$

ist, betrachtet als Gleichung in den Linienkoordinaten, die in den U, V, W stecken, die Gleichung eines Linienkomplexes. Da f in U, V, W *homogen* ist, mithin für $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ verschwindet, so enthält dieser Komplex f sämtliche Treffgeraden (gemeinsame Sekanten) der drei gegebenen Geraden, d. h. die mit der Regelschar $(g_1 g_2 g_3)$ *verbundene Regelschar* (2. Ordnung) $[g_1 g_2 g_3]$, die ja durch das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0 \tag{5}$$

gegeben ist.

5. Die Gleichungen

$$A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0 \quad \text{und} \quad A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0, \tag{6}$$

in denen die A, B, C Konstante bedeuten, stellen zwei lineare Komplexe dar, deren jedem die Regelschar $[g_1 g_2 g_3]$ (5) angehört. Diese gehört daher auch dem Schnitt der beiden Komplexe (6) an, d. h. jede lineare Kongruenz

$$U:V:W = \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

enthält die Regelschar $[g_1 g_2 g_3]$ vollständig. Die Leitgeraden jeder Kongruenz (7) gehören daher notwendig der verbundenen Regelschar $(g_1 g_2 g_3)$ an, woraus unmittelbar folgt, daß jeder Komplex (4) ∞^4 (erzeugende) lineare

ngruenzen enthält, deren sämtliche Leitgeraden der Regelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$ ehören. Man hat also den

Satz 1. *Alle Geraden g, die mit drei festen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ in einer ise verknüpft sind, die in einer algebraischen Relation zwischen den ißmannschen Doppelverhältnissen, den einfachsten (absoluten) In-ianten der vier Geraden $g\, g_1\, g_2\, g_3$ ihren Ausdruck findet, erfüllen en algebraischen Linienkomplex, der ∞^1 (erzeugende) lineare Kon-enzen enthält, deren Leitgeraden sämtlich mit den festen Geraden $_2\, g_3$ einer und derselben Regelschar 2. Ordnung $(g_1\, g_2\, g_3)$ angehören. Gleichung eines solchen Komplexes kann immer auf die Form*

$$f(U:V:W)=0$$

racht werden, wo

$$U=(g\,g_1)(g_2\,g_3),\quad V=(g\,g_2)(g_3\,g_1),\quad W=(g\,g_3)(g_1\,g_2)$$

und $(g_i\, g_k)$ die bekannten bilinearen Invarianten der Koordinaten der aden g_i und g_k sind.

6. Ist umgekehrt ein algebraischer Linienkomplex als Ort von ∞^1 eugenden linearen Kongruenzen gegeben, deren Leitgeraden einer und selben Regelschar 2. Ordnung $(g_1\, g_2\, g_3)$ angehören, und stellen die Glei-ngen (5) $[U=0,\ V=0,\ W=0]$ die verbundene Regelschar $[g_1\, g_2\, g_3]$, deren Erzeugende notwendig sämtlichen erzeugenden linearen Kon-enzen angehören, so kann die Gleichung dieses Komplexes auf die m (4) gebracht werden, deren linke Seite eine in den U, V, W homo-e Funktion ist. Das gibt den

Satz 2. *Jeder algebraische Linienkomplex, der von ∞^1 linearen ngruenzen erzeugt wird, deren Leitgeraden einer und derselben Regel-ar 2. Ordnung $(g_1\, g_2\, g_3)$ angehören (in dieser also eine gewisse involu-sche Korrespondenz hervorrufen), kann als Ort von Geraden g betrachtet den, deren Graßmannsche Doppelverhältnisse mit den festen Geraden $_2\, g_3$ einer algebraischen Bedingung genügen.*

Wie man diese Beziehung zwischen den Graßmannschen Doppel-hältnissen wirklich auffinden kann, wenn die genannte involutorische rrespondenz, etwa durch die Gleichung einer Direktionskurve, d. i. einer mplexkurve allgemeiner Lage, gegeben ist, wird sich aus dem folgenden e Mühe ergeben, desgleichen, wie man umgekehrt aus der Gleichung (4) es derartigen Komplexes die Gleichung der in Frage stehenden involu-schen Korrespondenz (mittels Eliminationen) aufstellen kann.

II. Die Gestalt der Komplexe.

7. Sind

$$U:V:W=\left\|\begin{matrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{D_3}:D_1:1 \tag{7}$$

die Gleichungen einer linearen Kongruenz, so sind ihre Leitgeraden die Achsen der beiden speziellen linearen Komplexe des Büschels:

$$\lambda(A_1U+B_1V+C_1W)+\mu(A_2U+B_2V+C_2W)=0.$$

Zwischen den sechs homogenen Cayleyschen Linienkoordinaten einer Plückerschen geraden Linie besteht die quadratische Identität.

$$p\equiv p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0. \tag{8}$$

Die Gleichungen

$$U=0,\quad V=0,\quad W=0 \tag{5}$$

stellen in Verbindung mit der Gleichung (8), wenn $g_1\,g_2\,g_3$ drei zueinander windschiefe Geraden sind, und wenn man in wohlbekannter Weise die Linienkoordinaten als Punktkoordinaten im Raume von fünf Dimensionen deutet, einen *irreduziblen Kegelschnitt* dar, dessen (zweidimensionale) Ebene keinen weiteren Punkt mit der Hyperfläche (8) $p=0$ gemein hat. Es gibt ∞^2 (vierdimensionale) Hyperebenen, welche die Ebene (5) dieses Kegelschnitts [(5), (8)] enthalten. Ihre Gleichungen haben die Form:

$$AU+BV+CW=0. \tag{9}$$

Unter diesen Hyperebenen (9) gibt es ∞^1 *Tangential*-Hyperebenen an $p=0$. Ihre Berührungspunkte erfüllen einen zweiten (mit dem ersten) *irreduziblen Kegelschnitt* k[6]). Die zweidimensionale Ebene E dieses Kegelschnitts ist durch die drei Berührungspunkte $G_1\,G_2\,G_3$ der Tangentialhyperebenen (5) (mit $p=0$) völlig bestimmt. Da nun den Berührungspunkten $G_1\,G_2\,G_3$ der letztgenannten Hyperebenen mit $p=0$ in der Liniengeometrie die Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ entsprechen, so sind überhaupt die Punkte des letztgenannten Kegelschnitts k die Bilder der Erzeugenden der Regelschar $(g_1\,g_2\,g_3)$, während den Punkten des Kegelschnitts [(5), (8)] die Erzeugenden der verbundenen Regelschar $[g_1\,g_2\,g_3]$ zugeordnet sind.

---

[6]) Bezieht man die (Fundamental-)Hyperfläche (8) auf ein Polarhexaeder, so hat sie (in Kleinschen Koordinaten) die Gleichung $\sum_{i=1}^{6}{}' x_i^2=0$. Die Hyperebenen $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ schneiden aus ihr einen irreduziblen Kegelschnitt aus, dessen zugeordneter durch die Hyperebenen $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=0$ aus der Fundamental-Hyperfläche ausgeschnitten wird.

Die ∞^2 geraden Linien der Ebene E sind die Schnittgeraden von E it den Hyperebenen (9); und zwar sind die Schnittgeraden mit den ngentialhyperebenen die Tangenten des durch E aus $p = 0$ ausgeschnitte- n Kegelschnitts k. Jeder dreidimensionale Raum (7) wird von E in nem Punkte geschnitten: *jeder linearen Kongruenz* (7) *ist mithin ein d nur ein Punkt Q der Ebene E zugeordnet, und die Leitgeraden der ongruenz entsprechen den Berührungspunkten der von Q aus an k henden Tangenten.*

Diese wenigen Betrachtungen aus der mehrdimensionalen Geometrie nügen nun völlig, um die Theorie der hier zu behandelnden besonderen lasse von Komplexen in überaus einfacher Weise zu erschließen.

a) Komplexkurven und -kegel.

8. Eine Ebene allgemeiner Lage E' schneidet die Trägerfläche der egelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$ nach einem irreduziblen Kegelschnitt k', dessen Punkte f die Erzeugenden der Regelschar umkehrbar eindeutig bezogen sind. a auch die Punkte des Kegelschnitts k in der Ebene E eindeutig um- hrbar auf die Erzeugenden dieser (k in der Liniengeometrie entsprechen- n) Regelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$ bezogen sind, so besteht auch zwischen den iden Kegelschnitten k und k' eine umkehrbar eindeutige Beziehung. eisen wir den Punkten $G_1\, G_2\, G_3$ (von k) auf k' die Schnittpunkte $G_1'\, G_2'\, G_3'$ r Ebene E' von k' mit den Erzeugenden $g_1\, g_2\, g_3$ zu, so ist damit die ischen k und k' bestehende projektive Beziehung völlig bestimmt.

Die geraden Linien der Ebene E erscheinen, wie schon gesagt, als re Schnittgeraden mit den Hyperebenen (9). Faßt man die $U:V:W$ homogene Punktkoordinaten in der Ebene E auf, so stellen die Glei- ungen (9) zugleich die Geraden der Ebene E dar, bezogen auf ein oordinatendreieck, dessen Seiten $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ die Tangenten n k in den Punkten $G_1\, G_2\, G_3$ sind.

Ordnen wir diesen Tangenten die entsprechenden Tangenten des egelschnitts k' in der Ebene E' zu, so ist damit auch zwischen den nzen Ebenen E und E' eine projektive Beziehung hergestellt: *die enen E und E' mit den in ihnen liegenden gleichbezeichneten Figuren* ie den Kegelschnitten k und k' usw.) *sind reell projektiv äquivalent.*

9. Die Gleichung der Schar-Schar von Kegelschnitten, die die drei raden $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ berühren, hat die Form:

$$a^2U^2 + b^2V^2 + c^2W^2 - 2bcVW - 2caWU - 2abUV = 0,$$

a, b, c Konstante sind. Nun gehört aber dem linearen Komplex $= W$ oder $(g\,g_2)(g_3\,g_1) = (g\,g_3)(g_1\,g_2)$ die Achse g_1 des speziellen linearen

Komplexes $U \equiv (g\, g_1)(g_2\, g_3) = 0$ an, usw. (zyklische Vertauschung). Für den Kegelschnitt k ist mithin:

$$a = b = c,$$

so daß sich als Gleichung von k ergibt:

$$(10) \qquad k \equiv U^2 + V^2 + W^2 - 2VW - 2WU - 2UV = 0.$$

Hiermit ist die (auf ganz anderem Wege und in irrationaler Form $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \sqrt{W} = 0$ zuerst von Cayley[7]) ermittelte) *Bedingung dafür* (wieder) gewonnen, *daß die Geraden* $g\, g_1\, g_2\, g_3$ *einer speziellen linearen Kongruenz angehören oder*, was dasselbe besagt, *daß die variablen Geraden* g *Tangenten der Trägerfläche* φ *der von den festen Geraden* $g_1\, g_2\, g_3$ *bestimmten Regelschar 2. Ordnung* $(g_1\, g_2\, g_3)$ *sind.*

Wollen wir die projektive Äquivalenz der Ebenen E und E' augenfällig zum Ausdruck bringen, so müssen wir dem Kegelschnitt k' in E' dieselbe Gleichung wie dem Kegelschnitt k in E geben, d. h. wir haben als Einheitspunkt des Koordinatensystems in der Ebene E' den Schnittpunkt der Ecktransversalen des Koordinatendreiecks nach den Berührungspunkten $G_1'\, G_2'\, G_3'$ seiner Seiten mit dem Kegelschnitt k' zu wählen. Alsdann sind *die Gleichungen aller Figuren in der Ebene* E' *identisch mit den Gleichungen der entsprechenden Figuren in der Ebene* E.

10. Jede Komplexgerade eines Linienkomplexes (4) $f(U:V:W) = 0$ in der Ebene E' trifft zwei Erzeugende der Regelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$, die Leitgeraden einer und derselben in dem Komplex f enthaltenen linearen Kongruenz (7) $U:V:W = A:B:C$ sind, wo die A, B, C der Komplexgleichung $f = 0$ genügen. Die beiden Treffpunkte sind die Berührungspunkte des Kegelschnitts k' mit den beiden Tangenten, die von dem Punkte Q mit dem Koordinaten $U:V:W = A:B:C$ an k' gezogen werden können. Die Komplexkurve in der Ebene E' erscheint demnach als Enveloppe der Polaren der Punkte der Kurve $f(U:V:W) = 0$ in bezug auf den Kegelschnitt k'. Das gibt den

Satz 3. *Die Komplexkurve eines Linienkomplexes mit der Gleichung* $f(U:V:W) = 0$ [Satz 1] *in einer Ebene allgemeiner Lage* E (d. h. einer beliebigen Ebene, die nicht Tangentialebene der Trägerfläche φ von $(g_1\, g_2\, g_3)$ ist) *ist die Polarenenveloppe* (Polarkurve) *der Punkte* $U:V:W$ *der Kurve* $f(U:V:W) = 0$ *in bezug auf den Kegelschnitt:*

$$k \equiv U^2 + V^2 + W^2 - 2VW - 2WU - 2UV = 0,$$

wenn man die Gleichungen von f *und* k *auf ein Koordinatensystem be-*

---

[7]) Cayley, Comptes Rendus 61 (1865), S. 830, wieder abgedruckt in Coll. Pap. 5, S. 540.

ht, dessen Seiten die drei Tangenten der genannten Trägerfläche φ in Schnittpunkten $G_1\ G_2\ G_3$ der Ebene E mit den drei festen Geraden $g_2\ g_3$ sind und dessen Einheitspunkt in den Schnittpunkt der drei Eckensversalen des Koordinatendreiecks nach $G_1\ G_2\ G_3$ fällt.

Wie man mit Hilfe dieses Satzes einen Komplex der von uns bechteten Klasse, auch hinsichtlich seiner Realitätsverhältnisse, mühestudieren kann, ist ohne weiteres klar: Punkten Q der Kurve $U:V:W)=0$, die außerhalb des Kegelschnitts k liegen, entsprechen perbolische lineare Kongruenzen, Punkten im Innern elliptische, den nittpunkten beider Kurven endlich parabolische Strahlennetze. Man vinnt somit zunächst den

Satz 4. *Ein Komplex $f(U:V:W)=0$ vom n. Grade enthält $2n$ spelle lineare Kongruenzen.*

11. Ein *Komplex 2. Grades* also 4. Diese können, den Schnittpunkten k mit f entsprechend, zu zweien, dreien oder vieren, sowie auch paarse zusammenrücken. Das gibt die vier Unterfälle der quadratischen mplexe, die den mittleren der in der Einleitung angegebenen Symbole Theorie der Weierstraßschen Elementarteiler entsprechen. Endlich nen f und k identisch werden: der Komplex f enthält alsdann unlich viele parabolische lineare Kongruenzen, d. h. er ist der *Tangentenmplex $k=0$ (10) der Trägerfläche φ von $(g_1\ g_2\ g_3)$* mit dem Symbol 11)(111)].

Die Komplexe [(111) 3] enthalten (wenn überhaupt ∞^1 reelle) immer wohl hyperbolische als auch elliptische lineare Kongruenzen, die Komxe [(111)(21)] und [(111)(11) 1] hingegen enthalten entweder keine perbolischen oder keine elliptischen Strahlennetze; denn die ihnen entechenden Kurven f verlaufen entweder ganz im Innern oder ganz im ßern des Fundamentalkegelschnitts k (von den Berührungspunkten, wenn se reell sind, abgesehen).

12. Ist g ein Strahl einer linearen Kongruenz, deren Leitgeraden h h' Erzeugende der Regelschar $(g_1\ g_2\ g_3)$ sind, so ist auch die konjurte Polare g' von g in bezug auf die Trägerfläche φ von $(g_1\ g_2\ g_3)$ ngruenzgerade. Denn g' ist Schnitt der Tangentialebenen von φ in den nittpunkten mit g und diese Tangentialebenen enthalten die Erzeugenden nd h', die somit von g' getroffen werden.

Eine lineare Kongruenz, deren Leitgeraden einer Regelschar $(g_1\ g_2\ g_3)$ gehören und damit auch ein aus solchen Kongruenzen aufgebauter Komplex t daher notwendig durch die mit der Trägerfläche φ von $(g_1\ g_2\ g_3)$ veripfte Polarität in sich über. Unter Berücksichtigung des 3. Satzes ergibt hieraus mühelos der folgende

Satz 5. *Ein Linienkomplex* $f(U:V:W)=0$ [Satz 1] *ist autopolar in bezug auf die Trägerfläche* φ *der Regelschar* $(g_1\, g_2\, g_3)$ *mit der Komplexgleichung:*

$$k \equiv U^2+V^2+W^2-2UW-2WU-2UV=0$$

oder, was dasselbe besagt, der verbundenen Regelschar $[g_1\, g_2\, g_3]$ *mit den Gleichungen* $[U=0,\ V=0,\ W=0]$. *Sind in homogenen Punktkoordinaten* $U:V:W:Z$ $U=0,\ V=0,\ W=0$ *die Gleichungen dreier in je einem Punkte* $G_1\, G_2\, G_3$ *auf* $g_1\, g_2\, g_3$ *berührender Tangentialebenen dieser Trägerfläche* φ, *bezogen auf ein Koordinatensystem, in dem die Koordinaten der Punkte* $G_1\, G_2\, G_3$

$$0,\ 1,\ 1,\ 0;\quad 1,\ 0,\ 1,\ 0;\quad 1,\ 1,\ 0,\ 0$$

sind, so hat der von ihrem Schnittpunkt S $[U=0,\ V=0,\ W=0]$ *ausgehende Komplexkegel dieselbe Gleichungsform* $f(U:V:W)=0$, *wie der Komplex, während der von* S *ausgehende Tangentenkegel an* φ *die Gleichung* $k=0$ *hat.*

Durch die Gleichung $f=0$ *in Verbindung mit der Gleichung* $k=0$ *ist also der allgemeine Komplexkegel nicht nur seiner Gestalt, sondern auch seiner Lage nach, einschließlich der Realitätsverhältnisse, völlig bestimmt.*

b) Singuläre und mehrfache Komplexstrahlen.

13. Singuläre Strahlen g eines Linienkomplexes $f=0$ entsprechen solchen Schnittpunkten G der (vierdimensionalen) Mannigfaltigkeiten $f=0$ und $p=0$ (8), in denen die Hypertangentialebenen an f zugleich p in einem (anderen) Punkte H tangieren. Sind die Berührungspunkte G und H bestimmt und voneinander verschieden, so soll g *eigentlich-singulär* heißen. Fallen G und H zusammen, oder gibt es zu einem Punkte G unendlich viele Punkte H, was immer dann eintritt, wenn G ein *Doppel- oder mehrfacher Punkt* von $f=0$ ist (für den die Hypertangentialebene unbestimmt wird), so ist g ein *Doppel- oder mehrfacher Komplexstrahl*. Einem eigentlich-singulären Komplexstrahl g ist eine (und nur eine) ihn schneidende von g verschiedene gerade Linie h zugeordnet (sie entspricht dem Berührungspunkte H mit p). g und h *bestimmen* in diesem Falle also *einen* Punkt und *eine* Ebene, den dem eigentlich-singulären Strahl g zugeordneten singulären Punkt und die ihm zugeordnete singuläre Ebene. Ein solcher singulärer Punkt ist nach Plücker Scheitel eines Komplexkegels mit Doppelkante, eine solche singuläre Ebene enthält eine Komplexkurve mit Doppeltangente. Doppelkante und Doppeltangente sind identisch mit g.

Für uneigentlich-singuläre Komplexstrahlen g, d. h. Doppel- oder hrfache Strahlen, fallen g und h zusammen oder es gibt unendlich-le g zugeordnete Linien h: in jedem Falle ist jeder Punkt von g heitel eines Komplexkegels, für den g Doppel- oder mehrfache Kante , und jede Ebene durch g enthält eine Komplexkurve, für die g Doppel-er mehrfache Tangente ist.

Sind ∞^2 m-fache Komplexstrahlen vorhanden, so erfüllen die Scheitel r Kegel mit m-facher Kante den ganzen Raum (und dual): jeder Komplex-gel hat eine (oder auch mehrere) m-fache Kante(n). Sind nur ∞^1 fache Komplexstrahlen vorhanden, so bilden diese eine Regelschar. Es nn vorkommen — der Voss sche Komplex ist hierfür ein einfaches ispiel —, daß ∞^2 m-fache, und daneben, jener Mannigfaltigkeit an-hörend, ∞^1 n-fache Komplexstrahlen vorhanden sind. Alsdann hat ler Komplexkegel allgemeiner Lage eine (oder auch mehrere) m-fache nten und dual, während die Scheitel der Komplexkegel mit n-facher nte eine Fläche bilden, und die Ebenen der Komplexkurven mit n-facher ngente eine Fläche umhüllen. Beide Flächen sind identisch, nämlich ich der Trägerfläche der Regelschar der n-fachen Komplexstrahlen, die n daher als *n-fache Fläche des Komplexes* bezeichnen kann.

14. Eigentlich-singuläre Komplexstrahlen sind, außer in den Fällen, denen es sich um einen Flächen- oder Kurvenkomplex handelt (für die er Strahl singulär ist), immer ∞^2 vorhanden. Die ihnen zugeordneten gulären Punkte und Ebenen bilden (wie zuerst Pasch gezeigt hat) eine d dieselbe Fläche, die *singuläre Fläche* des Komplexes. Es kann jedoch rkommen, daß diese Fläche *entartet*, daß nämlich die eigentlich-singulären nkte keine Fläche bilden und dual die eigentlich-singulären Ebenen ne Fläche umhüllen, nämlich z. B. dann, wenn die Kongruenz der gulären Linien aus lauter linearen Kongruenzen besteht. Das trifft n aber gerade für unsere besondere Klasse von Komplexen zu (wes-gen eine so eingehende Erörterung erforderlich war).

Dem früher Gesagten zufolge werden nämlich die singulären Komplex-ahlen aus dem Komplex

$$f(U:V:W)=0$$

rch den Komplex F

$$F\equiv k\left(\frac{\partial f}{\partial U},\ \frac{\partial f}{\partial V},\ \frac{\partial f}{\partial W}\right)=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial U}}+\sqrt{\frac{\partial f}{\partial V}}+\sqrt{\frac{\partial f}{\partial W}}=0$$

geschnitten, und dieser Komplex $F=0$ gehört, wie unmittelbar ersicht-n, wieder unserer besonderen Klasse von Komplexen an.

Da die $\frac{\partial f}{\partial U}, \frac{\partial f}{\partial V}, \frac{\partial f}{\partial W}$ in den Linienkoordinaten, die in den U, V, W

stecken, vom $(n-1)$. Grade sind, wenn f vom n. Grade ist, so folgt zunächst der

Satz 6. *Die Kongruenz der singulären Linien eines Komplexes* $f(U:V:W)=0$ [Satz 1] *vom n. Grade besteht aus* $2n(n-1)$ *linearen Kongruenzen.*

15. In der Abbildung, die uns zu unserem 3. Satze führte, entsprechen diese $2n(n-1)$ linearen Kongruenzen den Berührungspunkten G der gemeinsamen Tangenten der Kurven $f=0$ und $k=0$ mit $f=0$. Den Berührungspunkten H mit $k=0$ entsprechen die zugeordneten Linien h. Sämtlichen ∞^2 Linien (allgemeiner Lage) einer der genannten Kongruenzen entspricht somit *eine und dieselbe* Gerade h, die *eine* der beiden Leitgeraden[8]) der Kongruenz, so daß jede dieser $2n(n-1)$ Geraden h ∞^2 singuläre Punkte trägt und mit ∞^2 eigentlich-singulären Ebenen inzident ist.

Es sind diese $2n(n-1)$ Geraden die aus der Theorie der Komplexe 2. Grades $(n-2)$ wohlbekannten Geraden, die Sturm[9]) (mit Montesano) als *stationär* für den Komplex (sie gehören dem Komplex im allgemeinen nicht an) bezeichnet hat, und die *Segre Fokalgerade* genannt hat.

Nun gehören allerdings jeder der $2n(n-1)$ Kongruenzen von singulären Komplexstrahlen die Erzeugenden der Regelschar $[g_1\,g_2\,g_3]\equiv[U=0,\ V=0,\ W=0]$ an, die, wie leicht ersichtlich, für den Komplex n. Grades $f(U:V:W)=0$ n-fache Strahlen sind, so daß auch die Trägerfläche dieser Regelschar mit zur singulären Fläche im weiteren Sinne zu rechnen ist. Gleichwohl wäre es unkorrekt, wollte man als singuläre Fläche schlechtweg jene n-fache Regelschar 2. Ordnung oder gar ihre Trägerfläche bezeichnen, in dem Sinne, wie man bei einem allgemeinen Komplex von seiner singulären Fläche spricht: Konsingulär oder konfokal sind nicht solche Komplexe $f(U:V:W)=0$, die die Geraden derselben Regelschar $[g_1\,g_2\,g_3]$ zu n-fachen Strahlen haben, sondern solche, für die dieselben $2n(n-1)$ Geraden der Regelschar $(g_1\,g_2\,g_3)$ stationär oder fokal sind[10]).

Die letzten Ergebnisse zusammenfassend, formulieren wir den

Satz 7. *Für einen algebraischen Linienkomplex* $f(U:V:W)=0$ [Satz 1] *vom n. Grade sind die Erzeugenden s der Regelschar* $[g_1\,g_2\,g_3]\equiv[U=0,\ V=0,\ W=0]$ *n-fache Komplexstrahlen: der Komplexkegel aus jedem Punkte eines solchen Strahles s (und damit überhaupt aus*

---

[8]) Die anderen $2n(n-1)$ Leitgeraden bilden die ebenfalls ausgeartete *akzessorische Fläche Voss'*. — Für den Vosschen Komplex (III, a) fallen beide (entarteten) Örter zusammen.

[9]) Loc. cit. [4]), S. 452.

[10]) Vgl. Sturm, loc. cit. [4]), S. 452. — Ferner Mohrmann, Inauguraldisserdation, München 1907, Kap. VI, wo der Begriff der Konsingularität auf Komplexe beliebigen Grades ausgedehnt ist.

dem Punkte der Trägerfläche φ jener Regelschar) besteht aus n Büscheln, ren jedem s angehört (und dual). *Die eigentlich-singuläre Fläche, d. h. r Ort der singulären Punkte und Ebenen, die den ∞^2 eigentlich-sing ren (nicht-mehrfachen) Komplexstrahlen zugeordnet sind, ist entartet, nd zwar in $2n(n-1)$ stationäre oder Fokalgerade, die Erzeugende der egelschar $(g_1 g_2 g_3)$ sind* (und im allgemeinen dem Komplex nicht an- hören). *Jeder Komplexkegel aus einem Punkte einer solchen Fokal- raden enthält zwei zusammenfallende Büschel, also ∞^1 Doppelkanten* nd dual). *Konsingulär oder konfokal sind solche Komplexe $f(U:V:W)=0$, r die dieselben $2n(n-1)$ Geraden stationär oder fokal sind.*

Fügen wir noch hinzu, daß für die Punkte der Achsen der $2n$ *spe- ellen linearen Kongruenzen*, die einem Komplex $f(U:V:W)=0$ angehören atz 4), ein (nicht doppelt zählendes) der n Büschel, in die der von einem eliebigen Punkte der Fläche φ ausgehende Komplexkegel zerfällt, aus *angenten* an φ besteht, so ist damit ein vollständiger Einblick in die heorie dieser Komplexe gewonnen. Man sieht: von den zahlreichen zu nem allgemeinen Komplex n. Grades kovarianten Kongruenzen, Linien- ächen sowie Flächen, Kurven und Developpablen ist hier sehr wenig riggeblieben. Und es bedarf wohl eines besonderen Studiums, um sich mit em Prinzip der Erhaltung der Anzahl auseinanderzusetzen. Außer den lbstverständlichen Charakteren, wie der Ordnung der Komplexkegel und r Klasse der Komplexkurven, ist wohl nur die Gradzahl der Kongruenz r singulären Linien unverändert erhalten geblieben (Satz 6). Alle anderen varianten Gebilde sind derart verzerrt, daß sie kaum wieder erkannt erden können. Alle irgendwie singulären Punkte müssen, wofern sie cht den ganzen Raum erfüllen, der n-fachen Fläche φ angehören, alle gendwie singulären Ebenen müssen Tangentialebenen von φ sein. Eine ngularität, die sich bei einem Komplexkegel allgemeiner Lage findet, ndet sich bei jedem derartigen Gebilde (Satz 3 und Satz 5).

III. Anwendungen.

Um die Fruchtbarkeit unserer Methode zu erweisen, die besonders genfällig in die Erscheinung tritt, wenn man Realitätsfragen in den ereich der Betrachtungen einbezieht, wollen wir sie nunmehr auf einige eispiele anwenden.

Der Vosssche Komplex 4. Grades der Tangenten aller gewundenen Kurven 3. Ordnung, die drei gegebene Geraden berühren.

16. Der Vosssche Komplex 4. Grades der vierten Geraden g, die zu- mmen mit drei gegebenen, zueinander windschiefen Geraden $g_1 g_2 g_3$ angentenquadrupel gewundener Kurven 3. Ordnung bilden, ist schon

mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen[11]). Trotzdem, oder auch vielleicht gerade deshalb, erscheint es nicht überflüssig, in diesem Zusammenhange erneut auf ihn einzugehen. Denn wir behaupten wohl kaum zuviel, wenn wir sagen, daß man auf Grund unserer Theorie alle seither gefundenen Sätze über den Vossschen Komplex, die nicht gerade nur einen zahlenmäßigen Ausdruck finden (Werte von Doppelverhältnissen usw.), von den folgenden beiden Figuren (Fig. 1 und Fig. 2) ohne weiteres ablesen kann, so daß ein einfacher und vollkommen übersichtlicher Einblick in den Bau dieses Komplexes erschlossen wird.

Der Vossschе Komplex hat die Gleichung:

$$\sqrt[4]{U} + \sqrt[4]{V} + \sqrt[4]{W} = 0$$

oder in rationaler Form:

$$f \equiv (U^2 + V^2 + W^2 - 2VW - 2WU - 2UV)^2 - 128UVW(U+V+W) = 0.$$

Sind $g_1\, g_2\, g_3$ *drei reelle gerade Linien* (etwa drei Erzeugende einer rotatorischen Regelschar 2. Ordnung, die symmetrisch zur Achse ihrer Trägerfläche φ liegen) und bezieht man die Gleichungen $f = 0$ und $k = 0$ (etwa des Kehlkreises von φ) auf ein gleichseitiges Dreieck $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ mit dem Schwerpunkt als Einheitspunkt, so ergibt sich das nebenstehende Bild.

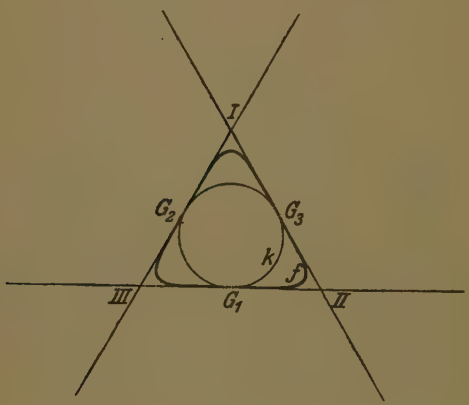


Fig. 1.

k ist der dem Koordinatendreieck einbeschriebene Kreis[12]). $G_1\, G_2\, G_3$ (die Schnittpunkte der Kehlkreisebene mit $g_1\, g_2\, g_3$) sind die Berührungspunkte. $f = 0$ ist die Gleichung einer rationalen (unikursalen) Kurve 4. Ordnung mit drei reellen isolierten Doppelpunkten, die in der Figur gekennzeichnet sind. Die Punkte $G_1\, G_2\, G_3$, in denen f (ebenfalls) die drei Seiten des Koordinatendreiecks berührt,

[11]) A. Voß, Über vier Tangenten einer Raumkurve 3. Ordnung, Math. Ann. 13 (1878), S. 168 ff.; J. C. Kluyver, Over stralenstelsels, die uit vier elkaar krüisende lijnen kunnen worden afgeleid, Verslagen en mededeelingen der k. Akad. van Wetensch. Amsterdam (1891), III, 8, S. 40; R. Sturm, Durch Tangenten bestimmte kubische Raumkurven, Arch. f. M. u. Ph., 3. Reihe, Bd. 23 (1914), S. 1 ff.; E. Study, Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl, Leipz. Ber., Bd. 68 (1916), S. 65 ff.; H. Mohrmann, Tangentenquadrupel einer gewundenen Kurve 3. Ordnung, Jahresb. d. D. M., Bd. 26 (1917), S. 176 ff.

[12]) Über die Bedeutung des umbeschriebenen Kreises vgl. III, b, Nr. 29.

Undulations-(Flach-) Punkte für f. Außerdem berührt $f = 0$ die unendferne Gerade $U + V + W = 0$ in den letzten $8 - 3 \cdot 2 = 2$ Schnittxten mit k, d. h. in den absoluten Punkten der Ebene (vgl. Fig. 2). ere Singularitäten hat f nicht.

17. Sind *zwei der gegebenen Geraden*, etwa g_1 und g_2, *konjugiert-ginär*, während die dritte, g_3, reell ist, so ist der Vosssche Komplex falls reell. Allein, um seinen Bau unter Berücksichtigung der Realitätsältnisse zu studieren, ist in diesem Falle die Fig. 1 nicht verwendbar. n jetzt erscheinen die Kurven $f = 0$ und $k = 0$ auf ein Koordinatenem bezogen, von dem zwei Seiten (konjugiert-) imaginär sind. Es rf daher zunächst einer Koordinatentransformation, die bewirkt, daß d k wieder auf ein reelles Koordinatensystem bezogen erscheinen. Setzt man zu diesem Zwecke etwa:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(u + iv) \\ V = \frac{1}{2}(u - iv) \\ W = w, \end{cases} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

aus folgt:

$$U + V = u, \qquad UV = \tfrac{1}{4}(u^2 + v^2),$$

eht $k = 0$ über in:

$$k^* \equiv w^2 - v^2 - 2uw = 0,$$

rend $f = 0$ die Form annimmt:

$$f^* \equiv (w^2 - v^2 - 2uw)^2 - 32w(u^2 + v^2)(w + u) = 0.$$

Die Gleichung der (unendlich-fernen) Geraden $U + V + W = 0$, der igen Doppeltangente von $f = 0$, endlich erhält die Gestalt:

$$u + w = 0.$$

Setzt man weiter, um eine größere Anschaulichkeit zu erzielen,

$$u = \frac{1 - x}{2}, \qquad v = y, \qquad w = 1$$

rgibt sich[13]):

$$k^{**} \equiv y^2 - x = 0$$

$$f^{**} \equiv y^4 - 2y^2(24 - 7x) + 4x^3 - 19x^2 + 28x - 12 = 0$$

aufgelöst nach y^2:

$$\begin{cases} k^{**} \equiv y^2 = x, \\ f^{**} \equiv y^2 = 24 - 7x \pm 2(x - 7)\sqrt{3 - x}. \end{cases}$$

[13]) Wesentlich dieselben Gleichungen habe ich loc. cit. [11]), S. 207 auf ganz anderem e gefunden.

Bezogen auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ist k^{**} eine *Parabel* mit der x-Achse als Achse, und f^{**} ist eine (ebenfalls zur Achse der Parabel symmetrisch gelegene) Kurve 4. Ordnung, die die Parabel k^{**} in *einem* einzigen *reellen* Punkte *berührt*, dem unendlichfernen Punkt der Parabel, der natürlich auch hier Undulationspunkt der Kurve f^{**} ist. Im übrigen ergibt sich das nebenstehende Bild.

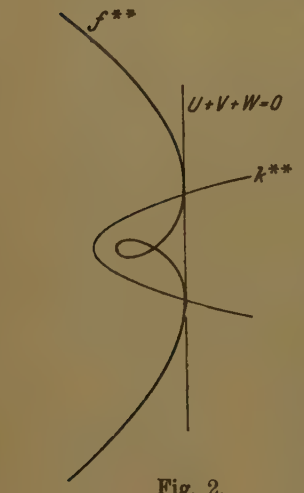


Fig. 2.

Die Kurve f^{**} hat nur mehr *einen reellen* Doppelpunkt, und dieser ist *nichtisoliert*. Das gleiche gilt von der einzigen (reellen) Doppeltangente der Kurve (vgl. Nr. **16**). Damit sind auch die reellen Singularitäten der Kurve f^{**} vollständig aufgezählt, und wir können nunmehr von den Figuren 1 und 2 die Haupteigenschaften des zu drei reellen, wie auch des zu zwei konjugiert-imaginären und einer reellen Geraden kovarianten Vossschen Komplexes ohne weiteres ablesen.

18. Zum Beispiel liefert uns die Betrachtung der Fig. 1 fast unmittelbar den zuerst von Herrn Sturm bewiesenen Satz, daß *vier reelle Tangenten einer reellen gewundenen Kurve 3. Ordnung immer zwei reelle Treffgeraden besitzen*. Von den drei (Paaren von unendlich-benachbarten) parabolischen linearen Kongruenzen abgesehen, die den (reellen) Berührungspunkten von k und f entsprechen, und deren Leitgeraden die gegebenen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ sind, enthält nämlich der zu drei reellen Geraden kovariante Vossche Komplex, da alle übrigen Punkte von f außerhalb von k liegen und mithin je zwei reelle und voneinander verschiedene Tangenten an k zulassen, ausschließlich reelle *hyperbolische lineare Kongruenzen. Jeder zu $g_1\, g_2\, g_3$ windschiefe reelle Komplexstrahl trifft mithin die Trägerfläche φ der Regelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$ in zwei reellen und voneinander verschiedenen Punkten.* Die beiden Erzeugenden der verbundenen Regelschar $[g_1\, g_2\, g_3]$ durch diese Punkte sind die in Frage stehenden Treffgeraden.

19. Die Betrachtung der Fig. 2 zeigt uns, daß (von der unendlich fernen Geraden abgesehen, die vier zusammengerückte Punkte mit f^{**} gemein hat) jede reelle Tangente von k^{**} f^{**} in zwei und nur zwei reellen Punkten trifft. Das gibt den Satz[14]): *An den zu zwei konjugiert-imaginären und einer reellen Geraden kovarianten Vossschen Komplex kommen von jeder Punkte der Trägerfläche der durch jene Geraden bestimmten Regelscha*

[14]) Vgl. Sturm, loc. cit. [11]), S. 9.

rdnung, der nicht auf der reellen gegebenen Geraden liegt, zwei und zwei reelle und voneinander verschiedene Strahlenbüschel. Für den drei reellen Geraden kovarianten Vossschen Komplex erleidet der Satz kleine *Modifikation.* Zwar schneidet auch hier (Fig. 1) jede Tangente emeiner Lage von k die Kurve f in zwei und nur zwei reellen Punkten. in außer den Tangenten in den drei Berührungspunkten von f mit k en hier auch die $3 \cdot 2$ Tangenten von k, die durch die reellen isolierten pelpunkte von f hindurchgehen, mit f vier reelle Punkte gemein. *Von Punkten der sechs Leitgeraden der drei hyperbolischen Doppelgruenzen eines zu drei reellen Geraden kovarianten Vossschen Komes kommen daher vier reelle Strahlenbüschel, von denen zwei zumenfallen, während von den Punkten der Geraden $g_1 g_2 g_3$ vier reelle hlenbüschel ausgehen, die sämtlich zusammenfallen.*

20. Die Strahlen der *Doppelkongruenzen des Vossschen Komplexes* en mit den gegebenen Geraden *Studysche Quadrupel,* d. h. solche, von zwei Scharen von Kurven 3. Ordnung berührt werden[15]). In 1 sind die drei reellen Doppelpunkte von f isoliert und sie liegen erhalb von k. In Fig. 2 ist der einzige reelle Doppelpunkt von f^{**} t isoliert und liegt im Innern von k^{**}: *Vier reelle Gerade, die ein dysches Quadrupel bilden, werden von zwei Scharen imaginärer rven 3. Ordnung berührt, zwei reelle und zwei konjugiert-imaginäre ade hingegen von zwei reellen Scharen. Die ersten Quadrupel bemen hyperbolische, die letzten elliptische lineare Kongruenzen.*

21. Die absoluten Punkte bilden zu irgend drei reellen Punkten s Kreises, die in bezug auf seinen Mittelpunkt symmetrisch liegen, *Hessesche Paar.* Auf Grund der Schlußbemerkung von Nr. **16** ergibt hieraus leicht der Voss sche Satz[16]): *Alle gewundenen Kurven 3. Ordg, die drei gegebene Gerade berühren, haben die Eigenschaft, daß zwei r Tangenten das Hyperboloid jener Geraden in Punkten der beiden sseschen Erzeugenden der letzteren berühren.* Sind die drei gegebenen aden reell, so sind die beiden Tangenten imaginär; sind hingegen zwei gegebenen Geraden konjugiert-imaginär, während die dritte reell ist, ind beide Tangenten reell (Fig. 2).

22. Die Sätze über die *Kontinuen von reellen erzeugenden linearen ngruenzen der Voss schen Komplexe*[17]) lassen sich so unmittelbar von Figuren 1 und 2 ablesen, daß ich sie hier nicht wiederholen will. egen mögen noch einige Bemerkungen über die *singulären Komplex-*

---

[15]) Study, loc. cit. [11]), S. 75.
[16]) A. Voss, loc. cit. [11]), S. 172.
[17]) S. Mohrmann, loc. cit. [11]), S. 214.

strahlen Platz greifen. Die singulären Geraden eines Vossschen Komplexes werden nach den Ausführungen der Nr. 14 aus diesem durch den Komplex 6. Grades ausgeschnitten[18]):

$$F \equiv [3(U+V+W)^3 + 4(U+V+W)(VW+WU+UV) + 8UVW]\,UVW = 0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer läßt sich, wie man unschwer erkennt, in *drei lineare Faktoren* spalten, so daß man erhält:

$$F \equiv (3U+V+W)(U+3V+W)(U+V+3W)\,UVW = 0.$$

Die gleich Null gesetzten Ausdrücke in den runden Klammern stellen, wie es sein muß, gerade die $\binom{3}{2}$ Verbindungsgeraden der drei Doppelpunkte der Kurven f bzw. f^{**} dar. *Die Strahlen der drei Doppelkongruenzen eines Vossschen Komplexes und die Strahlen der drei Paare von zusammengerückten speziellen linearen Kongruenzen, deren Leitgeraden die gegebenen Geraden sind, und die die Trägerfläche der Regelschar den gegebenen Geraden berühren, sind mithin die einzigen singulären Strahlen*[19] *eines Vossschen Komplexes*, wie man übrigens auch unmittelbar von den Figuren ablesen kann (gemeinsame Tangenten von f und k).

23. Um auch eine Anwendung unseres 5. Satzes zu geben, formulieren wir den folgenden Satz: *Jeder Komplexkegel eines zu drei Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ kovarianten Vossschen Komplexes, dessen Scheitel S nicht auf der Trägerfläche φ von $(g_1\,g_2\,g_3)$ liegt, hat drei Doppelkanten und drei Undulationskanten. Letztere sind Tangenten, die zugehörigen Undulationsebenen Tangentialebenen von φ. Außerdem besitzt jeder Komplexkegel eine doppelt berührende Tangentialebene. Die Berührungskanten sind ebenfalls Tangenten an φ, und zwar bilden sie in dem von S ausgehenden Tangentenkegel an φ das Hessesche Paar der drei Undulationskanten.* Durch Polarität an φ ergibt sich der dualistisch entsprechende Satz über die allgemeine Komplexkurve. Die Realitätsverhältnisse lassen sich hier so unmittelbar von unseren Figuren, die ja die Schnitte der Komplexkegel mit den Polarebenen ihrer Scheitel in bezug auf φ darstellen (Satz 5), ablesen, daß wir jede weitere Bemerkung darüber unterdrücken können.

b) Die Komplexe (1., 2. und 3. Grades), deren Strahlen mit drei gegebenen Geraden Graßmannsche Doppelverhältnisse konstanter Summe bilden.

24. Die Komplexe von Geraden g, für die die Summe der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse mit drei festen Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ kon-

[18]) Vgl. A. Voss, loc. cit. [11]), S. 174.

[19]) Erstere sind *Doppel-*, letztere *Undulationskanten* für jeden Komplexkegel, dem sie angehören (s. Nr. 23).

t ist, bieten, obwohl sie höchstens vom 3. Grade sind, ein in mancher sicht noch bunteres, jedenfalls aber reguläreres Bild dar als der Voss- Komplex, da, wenigstens für den allgemeinen Komplex dieser Art, rgewöhnliche Singularitäten, wie sie der Vosssche Komplex aufweist, g fehlen.

Aus der Gleichung

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_1' + D_2' + D_3' = c$$

bt sich auf Grund der Gleichungen (3) die Gleichung des Komplex- hels f_c:

$$f_c \equiv U^2(V+W) + V^2(W+U) + W^2(U+V) - cUVW = 0.$$

Deutet man wieder die $U:V:W$ als homogene Punktkoordinaten in ıg auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen Schwerpunkt der Einheitspunkt Koordinatensystems ist, so stellt die Gleichung f_c ein *Büschel von en Kurven 3. Ordnung* dar, *die sich in den drei Eckpunkten des rdinatendreiecks berühren und die die unendlich-fernen Punkte der en des Koordinatendreiecks zu (gemeinsamen) Wendepunkten haben.* zwei Kurven eines Büschels außer seinen Grundpunkten keinen (weiteren) kt miteinander gemein haben können, so läßt sich die Gestalt des chels f_c auf Grund seiner drei *reduziblen* Kurven ohne Mühe voll- dig übersehen.

Für $c = \infty$ erhält man die drei *Koordinatenachsen*, für $c = -2$ die *Parallelen zu den drei Seiten des Koordinatendreiecks durch seine en:*

$$f_{-2} \equiv (U+V)(V+W)(W+U) = 0.$$

Und für $c = -3$ zerfällt f_c in die ∞-*ferne Gerade* der Ebene:

$$U+V+W=0$$

den dem Koordinatendreieck *umbeschriebenen Kreis*:

$$VW+WU+UV=0.$$

Mithin sind sämtliche Kurven f_c für

$$-\infty < c < -2$$

iteilig, und zwar derart, daß der ganz im Endlichen gelegene paare der Kurve die drei Ecken des Koordinatendreiecks enthält. Für

$$-2 < c < +6$$

man *einteilige* Kurven: der ganz im Endlichen gelegene Zug der ven des zuvor betrachteten Bereichs ist verschwunden. Es geht jetzt der andere die drei unendlich-fernen Punkte verbindende unpaare der Kurven durch die Ecken des Koordinatendreiecks. Für

$$c = 6$$

erhält man die *einzige irreduzible rationale Kurve* des Büschels f_c. Sie hat einen isolierten Doppelpunkt, der zugleich ihr Schwerpunkt ist und im Einheitspunkt liegt. In unserer Figur ist außer den reduziblen drei Kurven noch diese rationale Kurve eingezeichnet. Für

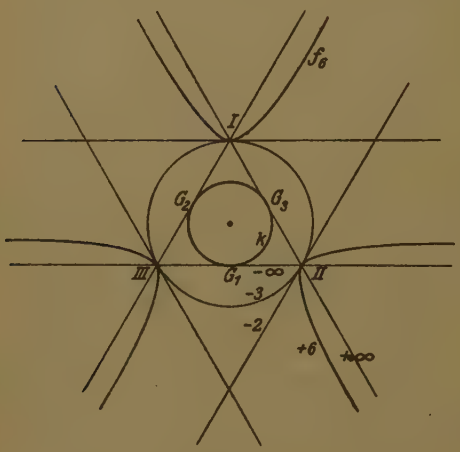


Fig. 3.

$$6 < c < \infty$$

endlich haben wir wieder *zweiteilige* Kurven; der ganz im Endlichen verlaufende paare Zug befindet sich aber jetzt ganz im Innern des Koordinatendreiecks für

$$6 < c < \frac{21}{2}$$

auch ganz im Innern des Fundamentalkegelschnitts k, d. h. des dem Koordinatendreieck einbeschriebenen Kreises. Für $c = \frac{21}{2}$ berührt f_c den Kreis k in den drei zu $G_1\,G_2\,G_3$ harmonisch gelegenen Punkten von innen. Und für

$$\frac{21}{2} < c < \infty$$

endlich sind die sechs Schnittpunkte von f_c mit k, die also sämtlich auf dem paaren Zuge von f_c liegen, alle reell. Die diesen Kurven entsprechenden Linienkomplexe bieten somit, $g_1\,g_2\,g_3$ als reell vorausgesetzt, das bunteste Bild dar.

25. Sind zwei der gegebenen Geraden, etwa g_1 und g_2, konjugiert-imaginär, so erfordert die *Realitätsdiskussion* wieder eine Koordinatentransformation. Wählen wir dieselbe, wie beim Vossschen Komplex, unterziehen wir also die Gleichung (17) den linearen Substitutionen (12) und (13), so ergibt sich:

$$(21) \qquad f_c^{**} \equiv y^2 = \frac{4x-4}{5-2c-x} - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2,$$

während die Gleichung von k die schon früher abgeleitete Form

$$k^{**} \equiv y^2 = x$$

behält.

Für den Fall der *irreduziblen rationalen Kurve* f_c^{**} $(c = 6)$, auf wir uns hier beschränken, gewinnt man das folgende Bild:

Fig. 4.

Hier ist also der Doppelpunkt der Kurve nicht isoliert. Auch liegt er jetzt (im Gegensatz zu r) außerhalb von k^{**}, was natürlich für die tätsdiskussion der entsprechenden liniengeo- schen Verhältnisse von Wichtigkeit ist.

26. Ohne Vollständigkeit anzustreben, formulie- ir nunmehr einige Sätze, die sich ohne Schwie- it von unseren Figuren 3 und 4 ablesen lassen. chst möge der allgemeine Satz angeführt en:

Alle Geraden g, für die die Summe der sechs Graßmannschen elverhältnisse, die sie mit drei festen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ bilden, konstant) ist, bilden ein Büschel von Komplexen 3. Grades $f_c(U:V:W) = 0$. Komplex dieses Büschels ist einem Summenwert c zugeordnet und ilt ∞^1 lineare Kongruenzen, deren Strahlen mit $g_1\, g_2\, g_3$ dieselben ßmannschen Doppelverhältnisse bilden und deren Leitgeraden sämtlich $_1\, g_2\, g_3$ einer und derselben Regelschar 2. Ordnung angehören. Sämt- Komplexe des Büschels berühren einander längs den drei Kongruenzen Treffgeraden je zweier der gegebenen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ und haben rdem die drei linearen Kongruenzen (einfach) *miteinander gemein, Strahlen gleichzeitig eine der gegebenen Geraden g_i und diejenige ugende der Regelschar $(g_1\, g_2\, g_3)$ treffen, die mit g_i g_k und g_l $k + l = 1, 2, 3$) harmonisch trennt. In dem Büschel von Komplexen 0 befinden sich drei reduzible, und ein irreduzibler Komplex mit linearen Doppelkongruenz; diese Komplexe sind den Summenwerten ∞, -2, -3 und $+6$ zugeordnet, und zwar zerfällt der Komplex f_c en ersten beiden Fällen in drei lineare Komplexe (die im ersten die Komplexe der Treffgeraden der gegebenen drei Geraden sind), dritten Falle in einen linearen und einen quadratischen Komplex der Charakteristik* [(111)(11)1] (Nr. **29**).

Der allgemeine Komplex des Büschels enthält (in Übereinstimmung der allgemeinen Theorie, Sätze 4 und 6) *sechs voneinander verschiedene elle lineare Kongruenzen und zwölf ebensolche nicht-spezielle lineare ruenzen singulärer Linien. Sind $g_1\, g_2\, g_3$ drei reelle Geraden und ie Summe c der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse größer als o sind alle achtzehn genannten Kongruenzen und mit ihnen die zwölf näre oder Fokalgeraden* (Satz 7) *der Komplexe reell und von- nder verschieden.*

Die Doppelkongruenz des Komplexes mit dem Summenwert c = (
hat die Eigenschaft, daß sämtliche Graßmannschen Doppelverhältniss
ihrer Strahlen mit den festen Geraden $g_1 g_2 g_3$ einander gleich sind. Ihr
Leitgeraden bilden das Hessesche Paar der gegebenen Geraden in de
durch diese bestimmten Regelschar 2. Ordnung. Sind $g_1 g_2 g_3$ reell, so is
die Doppelkongruenz elliptisch und isoliert, während alle übrigen reelle
Kongruenzen des Komplexes hyperbolisch sind. Sind hingegen zwei de
gegebenen Geraden konjugiert-imaginär, während die dritte reell ist, s
ist die Doppelkongruenz nicht-isoliert und hyperbolisch. Das sich selb
durchsetzende einzige Kontinuum der hyperbolischen linearen Konkruenz
wird durch zwei parabolische Strahlennetze von dem (einzigen) *Kontinuum*
reeller elliptischer linearer Kongruenzen getrennt.

Jeder Komplexkegel eines zu drei reellen Geraden kovariante
irreduziblen Komplexes $f_c = 0$, dessen Scheitel S nicht auf der Träger
fläche φ der dreifachen Komplexstrahlen $[g_1 g_2 g_3]$ liegt (Satz 7), *hat drei*
reelle Wendekanten, deren verbindende Ebene aus dem von S ausgehen
den Tangentenkegel an φ das Hessesche Paar zu dem auf $g_1 g_2 g_3$ be
rührenden Kanten dieses Kegels ausschneidet. Alle Komplexkegel sämtl
licher (zu drei reellen geraden Linien kovarianten) *Komplexe $f_c = 0$ habe*
dieselben reellen Wendekanten. Diese bilden drei hyperbolische linear
Kongruenzen. Sind $g_1 g_2 g_3$ drei Erzeugende einer rotatorischen Regel
schar $(g_1 g_2 g_3)$, die zur Achse ihrer Trägerfläche φ symmetrisch liegen
so sind die Leitgeraden der drei Kongruenzen von reellen Wendekante
(und dualistisch: Spitzentangenten) *die gegebenen Geraden und die ihne*
diametral gegenüberliegenden Erzeugenden von $(g_1 g_2 g_3)$ usw. usw.

27. Wir knüpfen sogleich an den zuletzt ausgesprochenen Satz an
um einige Aussagen über die *reduziblen* Komplexe $f_c = 0$ ($c = -2, -3$
zu machen, die ein gewisses Interesse beanspruchen dürften. Zunächst
ergibt sich unmittelbar eine einfache neue[20]) geometrische Interpretatio
der Gleichung:

$$U + V + W = 0 \tag{19}$$

[20]) Vgl. Studys Deutung in H. Graßmanns Ges. Werken I, 2 (1896), S. 509. –
Die erste (vollständige) Deutung der Gleichung (19) rührt jedoch von J. C. Kluyve
(loc. cit. [1]), S. 355) her, der in der Gleichung (19) die *invariante Beziehung* fand
die zwischen vier zueinander windschiefen Wendepunktstangenten einer gewundene
Kurve 4. Ordnung 1. Art besteht, deren Berührungspunkte einer und derselben Eben
angehören. — Man leitet aus der soeben angeführten Tatsache leicht den folgende
Satz her: *Die negativen Werte der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse irgen*
eines der 64 Quadrupel von einander nicht schneidenden Wendepunktstangenten eine
Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, deren Berührungspunkte in einer und derselben Eben
liegen, sind gleich den 6 Werten, der das (gewöhnliche) *Doppelverhältnis der Kur*

er (was dasselbe besagt) der Gleichung:

$$(g\,g_1)(g_2\,g_3)+(g\,g_2)(g_3\,g_1)+(g\,g_3)(g_1\,g_2)=0\,.$$

nd $g_1\,g_2\,g_3$ drei Erzeugende einer rotatorischen Regelschar 2. Ordnung, zur Achse ihrer Trägerfläche φ symmetrisch liegen, so stellt die Glei-ung (19) *einen linearen Komplex dar, der durch Rotation irgendeiner ∞^1 linearen Kongruenzen erzeugt werden kann, deren Leitgeraden ei einander diametral gegenüberliegende Erzeugende der Regelschar $g_2\,g_3$) sind.* Natürlich kann man diesen Satz leicht seines metrischen wandes, in dem man ihn vermöge unserer Figur 3 sieht, entkleiden. n erhält:

Der Komplex (19) *wird erzeugt durch die ∞^1 linearen Kongruenzen, en Leitgeraden der Regelschar $(g_1\,g_2\,g_3)$ angehören und in dieser ver-ge einer involutorischen Projektivität gepaart sind, deren Doppelelemente dem Hesseschen Paar zu $g_1\,g_2\,g_3$ gebildet werden.*

Auf Grund der Ausführungen der Nr. 25 ergibt sich weiter der Satz:

Die Summe der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse aller raden g des Komplexes (19) *mit den festen Geraden $g_1\,g_2\,g_3$ ist kon-nt, und zwar $= -3$.*

Man kann diesen Satz auch in rein geometrischer Form aussprechen, d zwar so:

Ist $[g_1\,g_2\,g_3]$ eine der ∞^6 einem allgemeinen linearen Komplex L gehörenden Regelscharen 2. Ordnung und sind $h_1\,h_2$ die beiden Er-genden der verbundenen Regelschar $(g_1\,g_2\,g_3)$, die L angehören, so den alle Strahlen von L mit jedem der ∞^1 Tripel von Erzeugenden ser Regelschar $(g_1\,g_2\,g_3)$, für die $h_1\,h_2$ das Hessesche Paar ist, aßmannsche Doppelverhältnisse, deren Summe $= -3$ ist.

Es gibt also ∞^{6+1} Tripel von Geraden, mit denen die Strahlen eines gemeinen linearen Komplexes Graßmannsche Doppelverhältnisse bilden, en Summe $= -3$ ist. *Das Merkwürdige ist nun, daß es noch ebenso le Tripel von Geraden gibt, mit denen die Geraden des Komplexes aßmannsche Doppelverhältnisse bilden, deren Summe -2 beträgt!*

28. Aus der Gleichung (18) folgt nämlich, daß der Komplex $f_c=0$ $c=-2$ in drei nicht-spezielle lineare Komplexe zerfällt:

$$V+W=0,\quad W+U=0,\quad U+V=0.$$

---

h. das Doppelverhältnis der vier Tangentialebenen an die Kurve durch eine be-ige ihrer Sehnen) *fähig ist* (wobei die Tangentialebenen in den Stützpunkten Sehne nicht mit zu rechnen sind). — (Inzwischen habe ich auch die etwas kom-iertere Frage der Kollinearität der übrigen 192 Quadrupel zu einander wind-efer Wendepunktstangenten vollständig beantwortet.)

Die Strahlen jedes dieser drei Komplexe bilden also mit den festen Geraden $g_1\ g_2\ g_3$ Doppelverhältnisse, deren Summe -2 beträgt. Die Schnittpunkte H_3, H_3 der Geraden $U+V=0$ mit dem Kreise k (Fig. 3) bilden, wie man leicht ausrechnet, mit den Punkten $G_1\ G_2\ G_3$ gewöhnliche Doppelverhältnisse vom Werte $\pm i$:

$$\left(G_1\ G_2\ G_3 \begin{Bmatrix} H_3 \\ H_3 \end{Bmatrix}\right) = \pm i,$$

so daß wir auf demselben Wege, der uns zu unserem letzten ausdrücklich formulierten Satze geführt hat, jetzt den folgenden Satz gewinnen:

Ist $[g_1\ g_2\ g_3]$ *eine der* ∞^6 *einem allgemeinen linearen Komplex* L *angehörenden Regelscharen 2. Ordnung und sind* h_1, h_2 *die beiden Erzeugenden der verbundenen Regelschar* $(g_1\ g_2\ g_3)$, *die* L *angehören, so ist die Summe der sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse aller Strahlen von* L *mit jedem der* ∞^1 *Erzeugendentripel von* $(g_1\ g_2\ g_3)$, *die mit* h_1 *und* h_2 *gewöhnliche Doppelverhältnisse vom Werte* $\pm i$ *bilden*[21]), *konstant, und zwar* $= -2$.

Jeder allgemeine lineare Komplex kann demnach in zwiefacher Weise als (Teil-)Ort von Geraden konstanter Doppelverhältnissumme mit ∞^7 (verschiedenen) Tripeln von Geraden aufgefaßt werden. Natürlich gehören nicht (umgekehrt) alle Geraden, die die besagte Eigenschaft haben, dem linearen Komplex an.

29. Eine Gerade, die mit drei gegebenen Geraden $g_1\ g_2\ g_3$ Graßmannsche Doppelverhältnisse bildet, deren Summe $= -3$ ist, gehört *entweder* dem linearen Komplex

$$U+V+W=0 \tag{19}$$

oder dem quadratischen Komplex

$$VW+WU+UV=0 \tag{20}$$

an. Letzterer ist in unserer Zuordnung, wie schon gesagt, das Bild des dem Koordinatendreieck umschriebenen Kreises (Fig. 3), also mit k *konzentrisch*. Alle konzentrischen Kreise einer Ebene *berühren* einander in ihren absoluten Punkten. Sie bilden eine „Büschelschar", der in der Liniengeometrie konsinguläre oder konfokale Komplexe (Satz 7) von der Charakteristik $[(111)(11)1]$ entsprechen. Das genügt, um von unserer Figur 3 den folgenden Satz abzulesen:

---

[21]) Erteilt man den Erzeugenden h_1 h_2, je nachdem sie reell oder konjugiert-imaginär sind, die Parameterwerte ± 1 oder $\pm i$, einer beliebigen Erzeugenden von $(g_1\ g_2\ g_3)$ den Parameterwert 0, so ist, wegen $(b, a, c, d) = \frac{1}{(a, b, c, d)}$, $\frac{1}{i} = -i$ und $(1, -1, 0, i) = (i, -i, 0, -1) = i$ das *Paar* der übrigen Tripelgeraden völlig bestimmt.

In jeder „Büschelschar" konfokaler Komplexe 2. Grades von der rakteristik [(111)(11)1] *befindet sich ein (irreduzibler) Komplex, en Strahlen mit* ∞^1 *Tripeln von Geraden Graßmannsche Doppelältnisse bilden, deren Summe konstant* $(= -3)$ *ist. Die Geradenel gehören der mit der Regelschar der Doppelstrahlen* $[g_1 g_2 g_3]$ *dieser nplexe verbundenen Regelschar 2. Ordnung* $(g_1 g_2 g_3)$ *an und sind dach charakterisiert, daß die beiden Paare zusammengerückter Fokalgeraden Komplexe der Büschelschar ihr Hessesches Paar bilden. Der ausichnete Komplex selbst kann als das Erzeugnis aller nicht-speziellen aren Kongruenzen aufgefaßt werden, deren Leitgeradenpaare von ndeinem der* $\binom{3}{2}$ *Paare jener Tripelgeraden gebildet werden*[22]*). Sind die algeraden der in Frage stehenden konsingulären Komplexe reell, so l, von den beiden parabolischen Strahlennetzen abgesehen, deren Leitden die Fokalgeraden sind* (die den Komplexen der Charakteristik 11)(11)1] immer angehören), *sämtliche reellen erzeugenden linearen ngruenzen unseres ausgezeichneten Komplexes der Büschelschar ellip-h*[23]*); sind die Fokalgeraden konjugiert-imaginär, so sind sie alle* (ohne nahme) *hyperbolisch.*

30. Wir schließen hiermit die Betrachtungen, aus denen, wie wir en, zur Genüge hervorgeht, daß die Komplexe der behandelten Klasse ächlich zu den bestbekannten gerechnet werden dürfen und daß ihr dium auf unserem Wege in einfachster Weise erschlossen ist. Andere ache und schöne Belege[24]) für die Fruchtbarkeit der von uns entwickelten hode bilden diejenigen Komplexe und Kongruenzen, deren Strahlen drei festen Geraden Doppelverhältnisse bilden, die weniger als sechs chiedene Werte haben. Allein die hiermit berührten Fragen bilden n abgeschlossenen Tatsachenkomplex, der an und für sich Beachtung dient und deshalb gesondert behandelt werden soll[25]).

Karlsruhe i. B., den 6. März 1918.

---

[22]) Wirft man $g_1 g_2 g_3$ wieder in drei Erzeugende einer rotatorischen Regelschar, zur Achse ihrer Trägerfläche symmetrisch liegen, so erhält man Rotationskomplexe, ein besonders anschauliches Bild des Sachverhalts geben.

[23]) Man erhält vermöge den Transformationen (12) und (13) die Gleichungen:

$$\begin{cases} k^{**} \equiv y^3 - x = 0 \\ f_{-3}^{**} \equiv \left[y^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)(9-x)\right](x-3) = 0. \end{cases}$$

[24]) Siehe Anm. [1]) und [20]).

[25]) Vgl. Anm. [3]) der Einleitung dieser Arbeit.

(Eingegangen am 12. März 1918.)

Über Ideale und Primideale in Idealklassen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
	Einleitung	52
§ 1.	Hilfssätze aus der elementaren Idealtheorie	56
§ 2.	Thetaformeln	75
§ 3.	Eigenschaften der Zetafunktionen	89
§ 4.	Primideale in Idealklassen	112
§ 5.	Ideale in Idealklassen	119
§ 6.	Nochmals Primideale in Idealklassen	128
	Anhang. Andere Äquivalenzbegriffe	151

Einleitung.

Die folgende Abhandlung setzt[1]) aus der analytischen Zahlentheorie und aus der Idealtheorie nur das voraus, was in meiner *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* [Leipzig und Berlin, Teubner, 1918, 143 S.] steht; außerdem benutze ich einiges aus der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen und ihrer Charaktere. Alle Zitate von Sätzen und Definitionen mit arabischen Zahlen beziehen sich auf jenes Buch. Die Hauptkapitel des zweiten Teils desselben waren hervorgerufen durch Herrn Heckes Abhandlung *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1917, Heft 1, S. 77—89]. Die gegenwärtige Arbeit ist veranlaßt durch Herrn Heckes Abhandlung *Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper* [ebenda, Heft 2, S. 299—318]. Ich beweise einerseits zum erstenmal (auf

---

[1]) Abgesehen von dieser Einleitung, die zum Verständnis des Textes unnötig ist

ckeschen Bahnen) einen Satz über Primideale eines beliebigen Körpers, cher den Dirichletschen von den Primzahlen einer arithmetischen gression enthält; andererseits erprobe ich die von anderen und mir aus-ldeten neueren Methoden der analytischen Zahlentheorie bei vielen eren Fragen der analytischen Idealtheorie (Klassen mod $\mathfrak{f}$), von denen smal der entsprechende Spezialfall in meinem Buche vorkam; drittens llgemeinere ich eine kürzlich erschienene Untersuchung der Herren rdy und Littlewood über Primzahlen auf Primideale in Idealklassen.

1. Das von Herrn Hecke bewiesene Theorem besagt, auf die Haupt-se spezialisiert (l. c., S. 300): Ist $\mathfrak{f}$ ein Ideal, $[\varrho]$ ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes ptideal, so gibt es unendlich viele π, für die $[\pi]$ Primideal ist und denen keine zwei assoziiert sind, derart daß

$$\pi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{f}}$$

Dies enthält, wenn der Körper der rationalen Zahlen zugrunde ge-wird, **nicht** Dirichlets Satz von der arithmetischen Progression, cher besagt, daß für positive teilerfremde r, f der Kongruenz

$$p \equiv r \pmod{f}$$

ch unendlich viele Primzahlen genügt wird; denn der Heckesche Wort-liefert nur, daß

$$\pm p \equiv r \pmod{f}$$

ch unendlich viele Primzahlen erfüllt wird, d. h. daß die beiden arith-ischen Progressionen $fx + r$ und $fx - r$ zusammen unendlich viele nzahlen enthalten. Ich werde nun die einen etwas umständlichen lytischen Apparat erfordernde Ausdehnung seiner Sätze auf den engeren ssenbegriff ausführen, was dann Dirichlets Satz enthält (vgl. Fuß-2 auf S. 299 und die Andeutungen im letzten Absatz der S. 317). der Tat wird sich insbesondere ergeben, daß die obige Kongruenz durch ndlich viele nicht assoziierte π positiver Norm (sogar durch unendlich e nicht assoziierte total positive π) erfüllbar ist, was im Spezialfall $\equiv r \pmod{f}$ besagt.

Meine Darstellung wird, wie aus der Beziehung der verschiedenen ivalenzbegriffe einleuchten wird, nicht nur zu Ergebnissen führen, die Heckeschen Sätzen analog sind, sondern diese Sätze auch mitliefern.

2. Ich will keinen der zahlreichen neuen Sätze der analytischen Ideal-rie vorgreifend erwähnen, sondern nur hervorheben, daß in Satz CXXVI iell für $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ und den Äquivalenzbegriff der Definition XIX ent-en ist: Die Anzahl der Ideale einer Klasse mit Norm $\leqq x$ ist

$+ O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right)$. Dies war für den imaginären quadratischen Körper

schon durch mich bekannt: *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. CXXI (1912), Abt. IIa, S. 2195—2332], S. 2329, und ist dann für den reellen quadratischen Körper durch dieselbe Pfeiffersche Methode von Herrn Hammerstein bewiesen worden: *Zwei Beiträge zur Zahlentheorie* [im Druck bei Kaestner, Göttingen].

3. In seiner Note *Sur la distribution des nombres premiers* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLVIII (1914), S. 1869—1872] hatte Herr Littlewood einen Beweis der neuen und (weil einer Gaußschen Vermutung widersprechenden) gänzlich unerwarteten Sätze

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}\log\log\log x} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)-x}{\sqrt{x}\log\log\log x},$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x)-Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)-Li(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x}$$

für die beiden bekannten Funktionen

$$\psi(x)=\sum_{p^m\leqq x}\log p, \qquad \pi(x)=\sum_{p\leqq x}1$$

der analytischen Theorie der rationalen Zahlen skizziert; die genauere Ausführung desselben geben die Herren Hardy und Littlewood in Nr. 5 (S. 184—196) der Abhandlung *Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes* [Acta Mathematica, Bd. XLI, Heft 2 (1917), S. 119—196]. Am Schluß der Einleitung (S. 127) ist auch darauf hingewiesen, daß die Methode auf $\psi(x)=\sum_{p^m\leqq x}\chi(p^m)\log p$ und $\pi(x)=\sum_{p\leqq x}\chi(p)$ ausdehnbar ist, wo χ ein Charakter mod k ist. Durch die an einer Stelle zu berichtigende[2]) und an einer anderen abkürzbare[3]) Littlewoodsche Beweisführung werde ich

[2]) Auf S. 189 wird aus (5. 31) geschlossen, daß

$$\sum_{n>\frac{a}{\xi}}\frac{e^{-\gamma_n\xi}}{\gamma_n}<\frac{1}{82}\log\frac{1}{\xi}$$

ist; dieser Schluß ist falsch, da ja $\gamma_n=o(n)$ ist, also gewiß aus $n>\frac{a}{\xi}$ nicht $\gamma_n>\frac{a}{\xi}$ folgt. Aber die Littlewoodsche Methode ist so kräftig, daß die Erhöhung der Größenordnung der dort auf S. 189 mit N bezeichneten Funktion von ξ im Sinne meines Satzes CXI die Erreichung des gewünschten Endzieles nicht verhindert.

[3]) Insbesondere beweise ich ihr Lemma *5. 21*, d. i. Satz CX bei mir, kürzer, ohne die Formel (5. 121) und die anknüpfenden Summen- und Integraltransformationen.

gen Ende der gegenwärtigen Abhandlung zu Resultaten gelangen, welche n auf beliebige algebraische Zahlkörper mit verschiedenen Bedeutungen Klassenbegriffs beziehen und die genannten Fälle enthalten.

Ich benutze diese Gelegenheit, um für die Leser meiner Abhandlung *er einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahl-orie* [Mathematische Zeitschrift, Bd. I (1918), S. 1—24] eine Andeutung S. 17 daselbst auszuführen: Für jede Fundamentaldiskriminante D ist ht nur, wie dort mit klassischen Mitteln konstatiert, die Relation (30) sch, sondern bereits z. B.

$$\sum_{p \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{\sqrt{p}} = -(v + \tfrac{1}{2}) \log x + O(1)$$

hält einen Widerspruch. Denn hieraus folgte

$$\sum_{p^m \leqq x} \left(\frac{D}{p}\right)^m \frac{\log p}{p^{\frac{m}{2}}} + v \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} = O(1);$$

die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = -\frac{L'}{L}(s) + v\zeta(s + \tfrac{1}{2})$$

te also

$$\sum_{n \leqq x} \frac{c_n}{\sqrt{n}} = O(1),$$

glich

$$\sum_{n \leqq x} c_n = O(\sqrt{x}).$$

dererseits ist $\left(\frac{D}{n}\right)$ ein Charakter mod $|D|$ im elementaren Sinne (vgl. 12—13), also im Sinne des Satzes CXIV

$$\sum_{n \leqq x} c_n - v \sum_{n \leqq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = \psi(x);$$

n wäre nach dem Obigen $\frac{L'}{L}(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also die im Satz CXIX tretende Funktion

$$\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^\varrho}{\varrho} = \psi(x) + 2v\sqrt{x} = \sum_{n \leqq x} c_n + O(1) = O(\sqrt{x}),$$

gen Satz CXIX.

§ 1.

Hilfssätze aus der elementaren Idealtheorie[4]).

Es sei ein algebraischer Zahlkörper n ten Grades $\mathsf{P}(\vartheta)$ fest gegeben.

Definition I: *Wenn n linear unabhängige Zahlen des Körpers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegeben sind, so bedeute*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \tag{1}$$

den Wertevorrat $\mathfrak{a}$ der Linearform $x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ mit ganzen rationalen x.

Beispiel: Jedes Ideal $[\gamma_1, \ldots, \gamma_q]$ ist ein solches $\mathfrak{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ irgendeine Basis desselben bilden.

Satz I: *Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ zwei Systeme von je n linear unabhängigen Zahlen, so daß*

$$\beta_k = \sum_l x_{kl}\alpha_l \tag{2}$$

mit rationalen x ist. Wenn $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ das zu ersterem, $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n$ das zu letzterem komplementäre System (vgl. Definition 38) ist, so ist

$$\mathsf{A}_k = \sum_l x_{lk}\mathsf{B}_l. \tag{3}$$

Beweis: Aus

$$\beta_k = \sum_m x_{km}\alpha_m$$

folgt, wenn $\gamma^{(l)}$ die der Zahl γ von $\mathsf{P}(\vartheta)$ entsprechende Zahl im Körper $\mathsf{P}(\vartheta_l)$ ist,

$$(\beta_k^{(l)}) = \Big(\sum_m x_{km}\alpha_m^{(l)}\Big) = (x_{kl})\,(\alpha_k^{(l)}),$$

also nach Satz 128

$$(\mathsf{B}_l^{(k)}) = (\beta_k^{(l)})^{-1} = (\alpha_k^{(l)})^{-1}(x_{kl})^{-1} = (\mathsf{A}_l^{(k)})\,(x_{kl})^{-1},$$

$$(\mathsf{A}_l^{(k)}) = (\mathsf{B}_l^{(k)})\,(x_{kl}) = \Big(\sum_m \mathsf{B}_m^{(k)} x_{ml}\Big),$$

$$\mathsf{A}_l = \sum_m x_{ml}\mathsf{B}_m.$$

Satz II: *Ist*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\},$$

so ist

$$\{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\} = \{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n\}.$$

---

[4]) Im wesentlichen leite ich hier nur Spezialfälle klassischer Dedekindscher Ergebnisse direkt her.

nach ist für jede Menge $\mathfrak{a}$, *die überhaupt auf die Gestalt* (1) *ge-ht werden kann, die Menge* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *von der Wahl der* α_k *un-ngig.*

Beweis: Nach Voraussetzung bestehen die Gleichungen (2) mit ganzen nalen x; nach (3) ist daher A_k, also jede Zahl von $\{A_1, \ldots, A_n\}$ zu $\ldots, B_n\}$ gehörig. Und umgekehrt.

Definition II: $\mathfrak{a}$ *sei eine Menge im Sinne der Definition* I *. irgendein Ideal). Die durch Satz* II *eindeutig bestimmte Menge* $\ldots, A_n\}$ *werde mit* $\mathfrak{a}$ *bezeichnet.*

Definition III: *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Mengen im Sinne der Definition* I, *edeutet*

$$\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b},$$

jede Zahl von $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *gehört.*
(*Für Ideale ist dies der geläufige Begriff der Teilbarkeit*).

Satz III: *Aus* $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ *folgt* $\mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$.

Beweis: Folgt aus Satz I.

Satz IV: *Aus*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \mid \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$$

für jede Zahl $\gamma \neq 0$ *des Körpers*

$$\{\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n\} \mid \{\gamma\beta_1, \ldots, \gamma\beta_n\}.$$

Beweis: Mit ganzen rationalen x ist

$$\beta_k = \sum_l x_{kl}\alpha_l,$$

$$\gamma\beta_k = \sum_l x_{kl}\gamma\alpha_l.$$

Definition IV: *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal, so nenne ich Diskriminante des ls, geschrieben* $\Delta(\mathfrak{a})$, *das nach Satz* 101 *nur von* $\mathfrak{a}$ *abhängige* $, \ldots, \alpha_n)$, *wo* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *irgendeine Basis von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Satz V: $\mathfrak{a}$ *sei ein Ideal,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *eine Basis von* $\mathfrak{a}$; *es sei* $\ldots, A_n$ *das zu ihr komplementäre System. Dann sind die Zahlen* $)\cdot A_k$ *ganz und bilden die Basis eines nur von* $\mathfrak{a}$ (*nicht von der Wahl* α_k) *abhängigen Ideals* $\mathfrak{a}'$ *der Klasse* $\mathfrak{K}'$ (*im Sinne des Satzes* 131).

Beweis: 1. Aus (54)[5]) folgt, daß das Produkt von

$$|S(\alpha_k\alpha_l)| = \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta(\mathfrak{a})$$

jedem A_k ganz ist.

[5]) Zitierte Gleichungsnummern, welche größer sind als die hier vorangehenden, nen sich auf mein Buch.

2. Wird in Satz 131

$$\gamma = \Delta(\mathfrak{a})$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\{\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n\} = [\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n]$$

als Ideal mit der Basis $\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n$ und gehört zur Klasse $\mathfrak{K}'$.

3. Dies Ideal ist von der Wahl von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unabhängig. Denn ist $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine andere Basis von $\mathfrak{a}$ und $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n$ das komplementäre System, so ist nach Satz II

$$\{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\} = \{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n\},$$

also nach Satz IV

$$\{\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n\} = \{\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_n\}.$$

Satz VI: $$(\mathfrak{a}')' = [\Delta(\mathfrak{a})]^{2n-2}\mathfrak{a}.$$

Beweis: Zu $\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n$ ist $\frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\alpha_n$ komplementär (nach Satz 129 und 130), und es ist nach (55)

$$\Delta(\mathfrak{a}') = \Delta(\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n) = (\Delta(\mathfrak{a}))^{2n}\Delta(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n)$$

$$= (\Delta(\mathfrak{a}))^{2n-1}; \tag{4}$$

daher ist

$$(\mathfrak{a}')' = \left[(\Delta(\mathfrak{a}))^{2n-1}\frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\alpha_1, \ldots, (\Delta(\mathfrak{a}))^{2n-1}\frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\alpha_n\right] = [\Delta(\mathfrak{a})]^{2n-2}\mathfrak{a}.$$

Satz VII: *Es ist*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = [N\mathfrak{a}]^2\mathfrak{o}'.$$

(*Die durch $\mathfrak{K}$ nach Satz* 123 *bestimmte Klasse, der das Produkt je eines Ideals von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ angehört, ist also von $\mathfrak{K}$ unabhängig.*)

Beweis: Es werde

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}, \qquad [N\mathfrak{a}]^2\mathfrak{o}' = \mathfrak{c}$$

gesetzt.

1. (Beweis von $\mathfrak{c}|\mathfrak{b}$.) Ist γ irgendeine ganze Zahl des Körpers, so ist, weil $\mathfrak{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ein Ideal ist, für jedes k

$$\gamma\alpha_k = \sum_l x_{kl}\alpha_l$$

mit ganzen rationalen x, also

$$\gamma = \sum_l x_{kl}\frac{\alpha_l}{\alpha_k}.$$

Daher ist, wenn $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine beliebige Basis des Körpers ist, nach Definition III

$$\mathfrak{g} = \left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_k}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\right\} \Big| \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} = \mathfrak{o}.$$

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ das zu $\omega_1, \ldots, \omega_n$ komplementäre System, also

$$\mathfrak{o} = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}, \qquad \mathfrak{o}' = \{\Delta\Omega_1, \ldots, \Delta\Omega_n\} = [\Delta\Omega_1, \ldots, \Delta\Omega_n],$$

st nach Satz III

$$\mathfrak{o} \mid \mathfrak{g}$$

h Satz 130 ist nun

$$\mathfrak{g} = \{\alpha_k \mathsf{A}_1, \ldots, \alpha_k \mathsf{A}_n\},$$

nach (5) jedes

$$\alpha_k \mathsf{A}_l = \sum_m x_{klm} \Omega_m$$

ganzen rationalen x, folglich

$$\alpha_k \Delta(\mathfrak{a}) \mathsf{A}_l = \sum_m x_{klm} \Delta(\mathfrak{a}) \Omega_m.$$

$(\mathfrak{a})\mathsf{A}_l$ gehört also zu

$$\{\Delta(\mathfrak{a})\Omega_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\Omega_n\} = \{N\mathfrak{a}^2 \Delta\Omega_1, \ldots, N\mathfrak{a}^2 \Delta\Omega_n\}$$

n Satz 103. Die Zahlen $N\mathfrak{a}^2\Delta\Omega_1, \ldots, N\mathfrak{a}^2\Delta\Omega_n$ bilden aber eine is des Ideals $\mathfrak{c} = [N\mathfrak{a}]^2\mathfrak{o}'$, weil die $\Delta\Omega_m$ eine Basis von $\mathfrak{o}'$ bilden. ist also

$$\{\Delta(\mathfrak{a})\Omega_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\Omega_n\} = \mathfrak{c}$$

$\alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_l$ zu $\mathfrak{c}$ gehörig.

Wegen

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' = [\ldots, \alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_l, \ldots]$$

also

$$\mathfrak{c} \mid \mathfrak{b}.$$

2. (Beweis von $\mathfrak{b} \mid \mathfrak{c}$.) Es sei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine Basis von $\mathfrak{b}$, also

$$\mathfrak{b} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

sei $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n$ das komplementäre System, also

$$\mathfrak{b} = \{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n\}.$$

jedes k ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \mid [\alpha_k]\mathfrak{a}' = \{\alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_1, \ldots, \alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{A}_n\},$$

nach Satz III und Satz 130

$$\left\{\frac{1}{\alpha_k \Delta(\mathfrak{a})}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{\alpha_k \Delta(\mathfrak{a})}\alpha_n\right\} \Big| \{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n\},$$

lich nach Satz IV

$$\mathfrak{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \mid \{\alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_1, \ldots, \alpha_k \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_n\}.$$

Produkt jeder Zahl von $\{\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_n\}$ mit α_k ist also von Gestalt $\sum_l x_l \alpha_l$ mit ganzen rationalen x_l; also ist jedes $\Delta(\mathfrak{a})\mathsf{B}_l$ ganz

nach Satz 21. Demnach ist

$$\mathfrak{o} \mid \{\Delta(\mathfrak{a})\mathfrak{B}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\mathfrak{B}_n\},$$

also nach Satz III und Satz 130

$$\left\{\frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\beta_1, \ldots, \frac{1}{\Delta(\mathfrak{a})}\beta_n\right\} \Big| \dot{\mathfrak{o}} = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\},$$

folglich nach Satz IV und (6)

$$\mathfrak{b} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \mid \{\Delta(\mathfrak{a})\Omega_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a})\Omega_n\} = \mathfrak{c}.$$

Satz VIII: $\mathfrak{o}' \mid [\Delta]$.

Beweis: Nach (54) ist für jedes Ideal $\mathfrak{a}$

$$\dot{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a},$$

also speziell

$$\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\} = \dot{\mathfrak{o}} \mid \mathfrak{o},$$

$$\mathfrak{o}' = \{\Delta\Omega_1, \ldots, \Delta\Omega_n\} \mid [\Delta]\mathfrak{o} = [\Delta].$$

Von jetzt ab werden die kleinen deutschen Buchstaben nur noch Ideale bezeichnen.

Definition V: *Ist* $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$, *so bedeutet* $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ *das nach Satz* 71 *eindeutig bestimmte* $\mathfrak{g}$, *für das* $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = \mathfrak{b}$ *ist.*

Satz IX: *Ist* $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c} \mid \mathfrak{e}$, *so ist* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \mid \mathfrak{b}\mathfrak{e}$ *und*

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\,\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}.$$

Beweis: $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\,\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$

Satz X: *Ist* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \mid \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, *so ist* $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ *und*

$$\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}.$$

Beweis: $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}.$

Definition VI: *Das Ideal* $\frac{[\Delta]}{\mathfrak{o}'}$ (*vgl. Satz* VIII *und Definition* V) *heißt das Grundideal des Körpers und werde dauernd mit* $\mathfrak{d}$ *bezeichnet.*

Satz XI: $N\mathfrak{d} = |\Delta|$.

Beweis: Nach (4) und Satz 103 ist

$$\Delta^{2n-1} = \Delta(\mathfrak{o}') = (N\mathfrak{o}')^2\Delta,$$

$$(N\mathfrak{o}')^2 = \Delta^{2n-2},$$

$$N\mathfrak{d} = N\left(\frac{[\Delta]}{\mathfrak{o}'}\right) = \frac{N[\Delta]}{N\mathfrak{o}'} = \frac{|\Delta|^n}{\sqrt{\Delta^{2n-2}}} = \frac{|\Delta|^n}{|\Delta|^{n-1}} = |\Delta|.$$

Satz XII: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{a})]$.

Beweis: Nach Satz VII ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = [N\mathfrak{a}]^2\mathfrak{o}'\mathfrak{b} = [N\mathfrak{a}]^2[\Delta] = [\Delta(\mathfrak{a})].$$

Satz XIII: *$\grave{\mathfrak{a}}$ ist die Menge der Zahlen η, deren Produkt mit jeder Zahl von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ganz ist.*

Beweis: 1. Nach Satz XII ist

$$\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}\mathfrak{a} = [\Delta(\mathfrak{a})],$$

das Produkt jeder Zahl von $\mathfrak{a}'$ mit jeder Zahl von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ durch $\Delta(\mathfrak{a})$ bar. Wenn nun η zu $\grave{\mathfrak{a}}$ gehört, so gehört $\Delta(\mathfrak{a}) \cdot \eta$ zu $\mathfrak{a}'$; daher ist Produkt von η mit jeder Zahl von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ganz.

2. Es sei das Produkt von η mit jeder Zahl von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ganz. Ist $n = 0$, gehört η gewiß zu $\grave{\mathfrak{a}}$. Ist $\eta \neq 0$, so ist für eine beliebige Zahl $\gamma \neq 0$ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Zahl $\eta\gamma$ ganz und $\neq 0$; mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{a})]$$

$\Delta(\mathfrak{a})$ zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gehörig, folglich $\Delta(\mathfrak{a})\eta$ ganz,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{a})] \mid [\Delta(\mathfrak{a})][\eta\gamma] = [\Delta(\mathfrak{a})\eta][\gamma].$$

ner ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \mid [\Delta(\mathfrak{a})\eta]\mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{a}' \mid [\Delta(\mathfrak{a})\eta];$$

$\mathfrak{a})\eta$ gehört also zu $\mathfrak{a}'$, folglich η zu $\grave{\mathfrak{a}}$.

Satz XIV: *η sei eine Zahl des Körpers. Wenn das Produkt von η jeder Zahl von $\mathfrak{b}$ ganz ist, so ist die Spur $S(\eta)$ eine ganze ratio- e Zahl.*

Beweis: Nach Satz XIII, auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ angewandt, ist mit ganzen ionalen y_l

$$\eta = \sum_l y_l \Omega_l,$$

$$S(\eta) = \sum_l y_l S(\Omega_l).$$

Nach Satz 128 ist

$$(e_{kl}) = (\omega_k^{(l)})\,(\Omega_l^{(k)}) = \Big(\sum_m \omega_k^{(m)} \Omega_l^{(m)}\Big) = (S(\omega_k \Omega_l)),$$

$$S(\omega_k \Omega_l) = e_{kl};$$

1 ist mit ganzen rationalen x_k

$$1 = \sum_k x_k \omega_k,$$

also

$$S(\Omega_l) = \sum_k x_k S(\Omega_l \omega_k) = \sum_k x_k e_{kl} = x_l,$$

$$S(\eta) = \sum_l y_l x_l.$$

Von jetzt ab sei $\mathfrak{f}$ irgendein festes Ideal des Körpers. Ferner bedeute stets $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ den größten gemeinsamen Teiler der beiden Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Satz XV: *Es seien α und β ganze Zahlen des Körpers, $\alpha \neq 0$ und $([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Dann gibt es eine ganze Zahl γ im Körper, so daß*

$$\gamma\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist.

Beweis: Es sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_{N\mathfrak{f}}$ ein Repräsentantensystem der $N\mathfrak{f}$ Zahlenklassen mod $\mathfrak{f}$. Dann sind je zwei verschiedene der $N\mathfrak{f}$ Zahlen $\gamma_1\alpha, \ldots, \gamma_{N\mathfrak{f}}\alpha$ inkongruent; denn aus

$$\gamma_k\alpha \equiv \gamma_l\alpha \pmod{\mathfrak{f}}$$

folgt $k = l$, $\gamma_k = \gamma_l$, weil sonst

$$\mathfrak{f} \mid [\gamma_k - \gamma_l][\alpha],$$

also wegen $([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$

$$\mathfrak{f} \mid [\gamma_k - \gamma_l],$$

$$\gamma_k \equiv \gamma_l \pmod{\mathfrak{f}}$$

wäre.

Also ist ein

$$\gamma_k\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Satz XVI: *In jedem Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es eine Zahl $\alpha \neq 0$, so daß*

$$\left(\frac{[\alpha]}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{f}\right) = \mathfrak{o}$$

ist.

Beweis: Für $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ ist die Behauptung trivial. Es sei also $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$, und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$ seien die verschiedenen in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideale. Ich setze $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_q$ und wähle für jedes m der Reihe $1 \leqq m \leqq q$ eine Zahl α_m so, daß

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}_m} \mid \alpha_m, \tag{7}$$

aber α_m nicht durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist. Das geht, weil sonst $\mathfrak{b} \mid \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}_m}$ wäre.

Jedes α_m ist sicher $\neq 0$. Ich setze nun

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q = \alpha.$$

Dann ist erstens

$$\mathfrak{a} \mid \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}_m} \mid \alpha_m,$$

$$\mathfrak{a} \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_q = \alpha.$$

itens ist α für kein m durch $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_m$ teilbar; denn da die α_l mit $l \gtrless m$ h $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_m$ teilbar sind, wäre sonst $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_m \mid \alpha_m$, also $\frac{[\alpha_m]}{\mathfrak{a}}$ durch $\mathfrak{p}_m$ und nach (7)

h $\prod_{l \gtrless m}^{q} \mathfrak{p}_l$, also durch $\prod_{l=1}^{q} \mathfrak{p}_l$ teilbar, also α_m durch $\mathfrak{a}\prod_{l=1}^{q} \mathfrak{p}_l = \mathfrak{b}$ teilbar.

Das Ideal $\frac{[\alpha]}{\mathfrak{a}}$ ist demnach zu allen $\mathfrak{p}_m$, also zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd.

Satz XVII: *In jeder Idealklasse $\mathfrak{K}$ gibt es ein zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes $\mathfrak{a}$.*

Beweis: $\mathfrak{o}$ werde in der Klasse $\mathfrak{K}^{-1}$ irgendwie gewählt. Dann be me ich nach Satz XVI ein α so, daß

$$\left(\frac{[\alpha]}{\mathfrak{b}}, \mathfrak{f}\right) = \mathfrak{o}$$

Das Ideal

$$\frac{[\alpha]}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$$

also in $\mathfrak{K}$ und ist zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd.

Von jetzt ab seien die Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ wie in § 9 des Buches eriert; im Falle $r_1 > 0$ sind also insbesondere $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{r_1}$ die reellen nter in irgendeiner Reihenfolge.

Definition VII: *Ist $r_1 = 0$, so heißt jede von 0 verschiedene Zahl α Körpers total positiv. Ist $r_1 > 0$, so heißt eine Zahl α des Körpers positiv, wenn die r_1 ihr in $\mathsf{P}(\vartheta_1), \ldots, \mathsf{P}(\vartheta_{r_1})$ entsprechenden en $\alpha^{(1)} \ldots, \alpha^{(r_1)}$ sämtlich positiv sind; eo ipso ist dann $\alpha \neq 0$. Be-nung:*

$$\alpha \succ 0.$$

Satz XVIII: *Jede positive rationale Zahl ist $\succ 0$, und für jede 0 verschiedene Zahl α des Körpers ist $\alpha^2 \succ 0$.*

Beweis: Klar.

Satz XIX: *Aus $\alpha \succ 0$, $\beta \succ 0$ folgt $\alpha\beta \succ 0$ und $\frac{\alpha}{\beta} \succ 0$.*

Beweis: Ersteres ist klar; letzteres folgt aus $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \alpha\beta$ unter Be-ung von Satz XVIII.

Satz XX: *In jeder Restklasse* mod $\mathfrak{f}$ *gibt es ein $\alpha \succ 0$.*

Beweis: Es darf $r_1 > 0$ angenommen werden. Ich setze $k = N\mathfrak{f}$, nach einer beim Beweise von Satz 108 vorkommenden Überlegung h $\mathfrak{f}$ teilbar ist. Dann genügt es, zu jedem ganzen β ein $\alpha \succ 0$ an-ben, so daß

$$\alpha \equiv \beta \,(\mathrm{mod}\, \lceil k \rceil)$$

ist. In der Tat läßt sich ein ganzes rationales x so groß wählen, daß

$$\beta^{(1)} + kx > 0, \ldots, \beta^{(r_1)} + kx > 0$$

ist. Alsdann ist

$$\alpha = \beta + kx \succ 0$$

und (8) erfüllt.

Satz XXI: *Ist* $r_1 > 0$, *so gibt es, wenn* $z_1, \ldots, z_{r_1}$ *eine beliebige der* 2^{r_1} *Wertkombinationen* ± 1 *ist, in jeder Restklasse* mod $\mathfrak{f}$ *eine Zahl* α *so daß*

$$\operatorname{sign} \alpha^{(1)} = z_1, \ldots, \operatorname{sign} \alpha^{(r_1)} = z_{r_1}$$

ist.

Beweis: β repräsentiere die gegebene Restklasse. Es sei $\psi(x)$ die ganze Funktion von höchstens $(r-1)$tem Grade, die für $x = \vartheta^{(m)}$, $1 \leqq m \leqq r_1$, den Wert z_m hat. Durch Änderung der Koeffizienten von $\psi(x)$ folgt aus Stetigkeitsgründen die Existenz einer ganzen Funktion $g(x)$ mit rationalen Koeffizienten, so daß für $1 \leqq m \leqq r_1$

$$\operatorname{sign} g(\vartheta^{(m)}) = z_m$$

ist.

Es werde nun eine positive ganze rationale Zahl c so gewählt, daß $\gamma = cg(\vartheta)$ ganz ist; dann ist für $1 \leqq m \leqq r_1$

$$\operatorname{sign} \gamma^{(m)} = z_m.$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt, $N\mathfrak{f} = k$ gesetzt, daß für alle hinreichend großen positiven ganzen rationalen x auch die Zahl $\delta = \gamma + \frac{\beta}{kx}$ den Bedingungen

$$\operatorname{sign} \delta^{(m)} = z_m \qquad (1 \leqq m \leqq r_1)$$

genügt. Wird schließlich $\alpha = \delta kx = \beta + \gamma kx$ gesetzt, so ist α ganz, $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}$ und

$$\operatorname{sign} \alpha^{(m)} = z_m \qquad (1 \leqq m \leqq r_1).$$

Definition VIII: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}$

(*sprich*: $\mathfrak{a}$ *ist äquivalent zu* $\mathfrak{b}$ *modulo* $\mathfrak{f}$), *wenn*

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

ist, und es zwei ganze Zahlen α, β *im Körper gibt, so daß*

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b},$$
$$\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}},$$
$$\alpha \succ 0, \quad \beta \succ 0$$

ist.

(*Natürlich kann die Voraussetzung* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ *als Folge der übrigen fortbleiben.*)

Satz XXII: *Für* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ *ist*

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Beweis: $[1]\mathfrak{a} = [1]\mathfrak{a}$, $1 \equiv 1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, $1 \succ 0$.

Satz XXIII: *Aus*

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}$$

t

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Beweis: Klar.

Satz XXIV: *Aus*

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c} \pmod{\mathfrak{f}}$$

t

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{c} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Beweis: $[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}$, $\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, $\alpha \succ 0$, $\beta \succ 0$,
$[\gamma]\mathfrak{b} = [\delta]\mathfrak{c}$, $\gamma \equiv \delta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, $\gamma \succ 0$, $\delta \succ 0$,
$]\mathfrak{a} = [\beta\gamma]\mathfrak{b} = [\beta\delta]\mathfrak{c}$, $\alpha\gamma \equiv \beta\delta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, $\alpha\gamma \succ 0$, $\beta\delta \succ 0$.

Satz XXV: *Ist*

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}$, $([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $\alpha\beta \succ 0$,
ist

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Beweis: Nach Satz XV und XXI ist γ so bestimmbar, daß

$$\gamma\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \gamma\alpha \succ 0$$

denn im Falle $r_1 = 0$ folgt dies schon aus Satz XV; im Falle $r_1 > 0$
Satz XV und Satz XXI, indem erst ein δ mit

$$\delta\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

l alsdann ein $\gamma \equiv \delta \pmod{\mathfrak{f}}$ mit

$$\operatorname{sign} \gamma^{(m)} = \operatorname{sign} \alpha^{(m)}, \qquad 1 \leqq m \leqq r_1,$$

ählt wird.

Aus (9) folgt

$$]\mathfrak{a} = [\beta\gamma]\mathfrak{b}, \quad \alpha\gamma \equiv \beta\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha\gamma \succ 0, \quad \beta\gamma = \alpha\gamma\frac{1}{\alpha^2}\alpha\beta \succ 0,$$

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Satz XXVI: *Die Anzahl der Klassen, in welche* mod $\mathfrak{f}$ *die zu* $\mathfrak{f}$ *erfremden Ideale auf Grund der Sätze* XXII *bis* XXIV *zerfallen, ist lich.*

Beweis: Zunächst ist klar, daß aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}$ im Sinne der inition 36

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$$

t. Es ist also nur zu zeigen, daß die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale jeder endlich vielen Idealklassen $\mathfrak{K}$ (im Sinne des Satzes 125) in endlich

viele Klassen mod $\mathfrak{f}$ zerfallen. Ich behaupte sogar: in je höchstens $2^{r_1} N\mathfrak{f}$ Klassen.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein festes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Ideal in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{b}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Ideal in $\mathfrak{R}$. Ich wähle $\mathfrak{c}$ nach Satz XVII in $\mathfrak{R}^{-1}$ so, daß $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist. Dann ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = [\alpha], \quad ([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}.$$

Aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ folgt

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = [\eta], \quad ([\eta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o},$$

$$[\eta]\mathfrak{a} = [\alpha]\mathfrak{b}. \tag{10}$$

Hierbei hängt η, aber nicht α von $\mathfrak{b}$ ab.

Ich habe zu zeigen, daß unter $2^{r_1} N\mathfrak{f} + 1$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{R}$ sich mindestens zwei befinden, die äquivalent mod $\mathfrak{f}$ sind. Unter den $2^{r_1} N\mathfrak{f} + 1$ zugehörigen Zahlen η in (10) muß es mindestens zwei geben, so daß

$$\eta_1 \equiv \eta_2 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \eta_1\eta_2 \succ 0 \tag{11}$$

ist; denn mindestens eine der $N\mathfrak{f}$ Restklassen mod $\mathfrak{f}$ kommt mindestens $2^{r_1} + 1$ mal vor, hierbei im Falle $r_1 > 0$ mindestens eine der 2^{r_1} Möglichkeiten von sign $\eta^{(m)}$, $1 \leqq m \leqq r_1$, mindestens zweimal, und aus sign $\eta_1^{(m)}$ $=$ sign $\eta_2^{(m)}$, $1 \leqq m \leqq r_1$, folgt $\eta_1\eta_2 \succ 0$. Aus

$$[\eta_1]\mathfrak{a} = [\alpha]\mathfrak{b}_1, \quad ([\eta_1], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o},$$

$$[\eta_2]\mathfrak{a} = [\alpha]\mathfrak{b}_2, \quad ([\eta_2], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

nebst (11) folgt aber

$$[\eta_2]\mathfrak{b}_1 = [\eta_1]\mathfrak{b}_2, \quad \eta_2 \equiv \eta_1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad ([\eta_2], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad \eta_2\eta_1 \succ 0;$$

also nach Satz XXV

$$\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Definition IX. *Die nach Satz* XXVI *endliche Klassenzahl* mod $\mathfrak{f}$ *heiße* $h(\mathfrak{f})$.

Satz XXVII: *Aus*

$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}$$

folgt

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}},$$

so daß von dem „Produkt" zweier Klassen mod $\mathfrak{f}$ *gesprochen werden kann, welches selbst eine Klasse* mod $\mathfrak{f}$ *ist (nämlich die Klasse, der das Produkt je eines Ideals der beiden gegebenen Klassen angehört).*

Beweis:

$$[\alpha_1]\mathfrak{a}_1 = [\beta_1]\mathfrak{b}_1, \quad \alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha_1 \succ 0, \quad \beta_1 \succ 0,$$

$[\alpha_2]\mathfrak{a}_2 = [\beta_2]\mathfrak{b}_2, \quad \alpha_2 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha_2 \succ 0, \quad \beta_2 \succ 0,$

$_2]\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = [\beta_1\beta_2]\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \quad \alpha_1\alpha_2 \equiv \beta_1\beta_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha_1\alpha_2 \succ 0, \quad \beta_1\beta_2 \succ 0,$

$\mathfrak{f}$ ist zu $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, also zu $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ teilerfremd.

Satz XXVIII: *Für die Multiplikation der Klassen* mod $\mathfrak{f}$ *gilt das mutative und das assoziative Gesetz.*

Beweis: Klar.

Satz XXIX: *Aus* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \sim \mathfrak{b}\mathfrak{c} \pmod{\mathfrak{f}}$ *folgt* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}$.

Beweis: $[\alpha]\mathfrak{a}\mathfrak{c} = [\beta]\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \quad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0, \quad \beta \succ 0,$

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b},$$

$\mathfrak{f}$ ist zu $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, also zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd.

Satz XXX: *Die* $h(\mathfrak{f})$ *Klassen* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *bilden eine Abelsche Gruppe.*

Beweis: Folgt aus den Sätzen XXVII, XXVIII und XXIX.

Satz XXXI: *Das Einheitselement der Gruppe, „Hauptklasse* mod $\mathfrak{f}$“ *nnt, wird von den Idealen* $\mathfrak{a}$ *gebildet, die Hauptideale sind und in Form geschrieben werden können*

$$\mathfrak{a} = [\gamma], \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \gamma \succ 0.$$

Beweis: Aus $\mathfrak{o}\mathfrak{o} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}}$ folgt, daß die Hauptklasse von den len $\mathfrak{a}$ gebildet wird, für die

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}}$$

d. h.

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{o} = [\beta], \quad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0, \quad \beta \succ 0.$$

1. Aus (12) folgt, da $\alpha \mid \beta$ ist, und die ganze Zahl $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} \succ 0$ ist, e der Kongruenz

$$\gamma \equiv \alpha\gamma \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

igt,

$$\mathfrak{a} = [\gamma], \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \gamma \succ 0.$$

2. Ist

$$\mathfrak{a} = [\gamma], \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \gamma \succ 0,$$

t

$$[1]\mathfrak{a} = [\gamma]\mathfrak{o}, \quad 1 \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad 1 \succ 0, \quad \gamma \succ 0,$$

(12) mit $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ erfüllt.

Definition X: *Ist* $\chi(\mathfrak{H})$ *irgendeiner der* $h(\mathfrak{f})$ *Charaktere der Abel- n Gruppe aus Satz* XXX, *so definiere ich* $\chi(\mathfrak{a})$ *für alle Ideale des pers folgendermaßen:*

$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{H})$ *für* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *zur Klasse* $\mathfrak{H}$ *gehört;*

$\chi(\mathfrak{a}) = 0$ *für* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$.

Dies $\chi(\mathfrak{a})$ *heißt ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$; *es gibt also* $h(\mathfrak{f})$ *Charaktere* mod $\mathfrak{f}$. *Für* $\chi([\alpha])$ *werde kurz* $\chi[\alpha]$ *geschrieben.*

Satz XXXII: *Für* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{f}}$ *ist*

$$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{b}).$$

Beweis: Klar.

Satz XXXIII: $\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b})$.

Beweis: 1. Ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, so ist, wenn $\mathfrak{H}_1$ die Klasse von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{H}_2$ die von $\mathfrak{b}$ mod $\mathfrak{f}$ ist, weil $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ liegt.

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2) = \chi(\mathfrak{H}_1)\chi(\mathfrak{H}_2) = \chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b}).$$

2. Ist mindestens eines der beiden Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nicht zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, so ist

$$\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0 = \chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b}).$$

Definition XI: *Ist* α *ganz und* $\succ 0$, *so werde* $\chi(\alpha)$ *durch die Gleichung*

$$\chi(\alpha) = \chi[\alpha]$$

definiert.

Satz XXXIV: *Für ganze, total positive* α, β *ist*

$$\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta).$$

Beweis: $\alpha\beta \succ 0$,

$$\chi(\alpha\beta) = \chi[\alpha\beta] = \chi([\alpha][\beta]) = \chi[\alpha]\chi[\beta] = \chi(\alpha)\chi(\beta).$$

Satz XXXV: *Für*

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0, \quad \beta \succ 0$$

ist

$$\chi(\alpha) = \chi(\beta).$$

Beweis: 1. Im Falle $([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist $([\beta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Wegen

$$[\beta][\alpha] = [\alpha][\beta], \quad \beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}}, \quad ([\beta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad \beta\alpha \succ 0$$

ist nach Satz XXV

$$[\alpha] \sim [\beta] \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\chi(\alpha) = \chi[\alpha] = \chi[\beta] = \chi(\beta).$$

2. Im Falle $([\alpha], \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$ ist $([\beta], \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$, also

$$\chi(\alpha) = \chi[\alpha] = 0 = \chi[\beta] = \chi(\beta).$$

Satz XXXVI: *Ist* $\chi(\mathfrak{a})$ *ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$ *und* $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ *die zu* $\chi(\mathfrak{a})$ *„konjugiert komplexe" Zahl, so ist* $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ *ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$.

Beweis: 1. Im Falle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist $\chi(\mathfrak{a}) \neq 0$, also $\bar{\chi}(\mathfrak{a}) \neq 0$; ferner hat $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$ einer Klasse $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ denselben Wert $\bar{\chi}(\mathfrak{H})$, und wegen

$$\chi(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2) = \chi(\mathfrak{H}_1)\chi(\mathfrak{H}_2)$$

ist

$$\bar{\chi}(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2) = \bar{\chi}(\mathfrak{H}_1)\bar{\chi}(\mathfrak{H}_2)$$

2. Im Falle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$ ist $\chi(\mathfrak{a}) = 0$, also $\bar{\chi}(\mathfrak{a}) = 0$.

Satz XXXVII: *Für* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ *ist*

$$\chi(\mathfrak{a})\bar{\chi}(\mathfrak{a}) = 1.$$

Beweis: Jeder Charakter einer Abelschen Gruppe ist eine Einheitswurzel, also vom absoluten Betrage 1.

Satz XXXVIII: *Es sei im Sinne der Definition* 36

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b},$$

aber

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}.$$

dann gibt es zwei ganze Zahlen α, β, *so daß*

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0$$

also a fortiori $([\alpha], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $([\beta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$.

Beweis: Ich wähle $\mathfrak{c}$ in der Klasse mod $\mathfrak{f}$, die zu der von $\mathfrak{b}$ invers ist, so daß also

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}},$$

oder

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = [\alpha], \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0$$

Wegen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \sim \mathfrak{b}\mathfrak{c} \sim \mathfrak{o}$, also

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = [\beta],$$

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha \succ 0.$$

Satz XXXIX: *Es sei* $\mathfrak{f}_1$ *ein „echter" Teiler von* $\mathfrak{f}$, *d. h.* $\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1 \neq \mathfrak{f}$. *sei* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$. *Dann gibt es ein Ideal* $\mathfrak{b}$ *derart, daß*

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

(*D. h. jede Klasse* mod $\mathfrak{f}_1$ *enthält ein zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremdes Ideal.*)

Beweis: 1. Wenn alle Primideale, die $\mathfrak{f}$ teilen, auch in $\mathfrak{f}_1$ aufgehen, genügt es, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ zu nehmen.

2. Andernfalls seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$ die verschiedenen Primideale, die in $\mathfrak{f}$ aber nicht in $\mathfrak{f}_1$ aufgehen. Behauptet wird die Existenz eines $\mathfrak{b}$, so daß

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_q) = \mathfrak{o}$$

(Denn die Primidealfaktoren von $\mathfrak{f}_1$ gehen wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$ ohnehin nicht in $\mathfrak{b}$ auf.)

Nach Satz XVII wähle ich ein $\mathfrak{c}$ so, daß

$$\mathfrak{c} \sim \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

Nach Satz XXXVIII kann ich wegen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$ zwei Zahlen α und β so bestimmen, daß

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{c}, \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad ([\beta], \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$$

ist. Nun wähle ich γ so, daß zugleich

$$\gamma \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}_1}$$

und

$$\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q}$$

ist; das geht, da wegen $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q) = \mathfrak{c}$ nach (29) bei passender Wahl von φ und π

$$\beta - 1 = \varphi + \pi, \quad \mathfrak{f}_1 | \varphi, \quad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q | \pi$$

ist und alsdann nur $\gamma = 1 + \pi$ gesetzt zu werden braucht. Nach Satz XX und XXI kann ich δ so wählen, daß

$$\delta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \beta\alpha\delta \succ 0$$

ist.

Jetzt setze ich

$$\mathfrak{b} = [\delta]\mathfrak{c}.$$

Dann ist erstens $(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q) = \mathfrak{o}$, da $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q$ teilerfremd zu $\mathfrak{c}$ und zu $[\gamma]$, also zu $[\delta]$ ist. Zweitens ist

$$[\beta]\mathfrak{b} = [\beta\delta]\mathfrak{c} = [\alpha\delta]\mathfrak{a}$$

und hierin

$$\beta \equiv \gamma \equiv \delta \equiv \alpha\delta \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad ([\beta], \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}, \quad \beta\alpha\delta \succ 0,$$

also nach Satz XXV

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}_1}.$$

Satz XL: $\mathfrak{f}_1$ *sei ein echter Teiler von* $\mathfrak{f}$.

1. *Es folge für ein bestimmtes* χ *aus*

(13) $$\xi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad \xi \succ 0, \quad ([\xi], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

stets

(14) $$\chi(\xi) = 1;$$

oder, was dasselbe besagt, es folge aus

(15) $$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

stets

(16) $$\chi(\mathfrak{a}) = 1.$$

Alsdann folgt aus

(17) $$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c} \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

stets

(18) $$\chi(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{c}).$$

2. *Und umgekehrt: Wenn aus* (17) *stets* (18) *folgt, so folgt aus* (15) *stets* (16), *d. h. aus* (13) *stets* (14).

Beweis: 1. Aus (13) folge stets (14). Es sei (17) erfüllt. Dann
ıle ich g in der zu b inversen Klasse mod f; dann ist

$$\mathfrak{b}\mathfrak{g} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\mathfrak{b}\mathfrak{g} = [\beta], \quad \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \beta \succ 0;$$

besondere ist $([\beta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Ferner ist, wegen $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1) = \mathfrak{o}$,

$$\mathfrak{c}\mathfrak{g} \sim \mathfrak{b}\mathfrak{g} \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}_1},$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{g} = [\gamma], \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1}, \quad \gamma \succ 0;$$

gen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist dabei $([\gamma], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Nun ergibt sich

$$[\gamma]\mathfrak{b} = [\beta]\mathfrak{c},$$

$$\chi(\gamma)\chi(\mathfrak{b}) = \chi[\gamma]\chi(\mathfrak{b}) = \chi[\beta]\chi(\mathfrak{c}) = \chi(\beta)\chi(\mathfrak{c}).$$

s der Voraussetzung folgt

$$\chi(\beta) = 1 = \chi(\gamma);$$

nit gilt

$$\chi(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{c}).$$

2. Klar.

Satz XLI: *Wenn in bezug auf einen Charakter χ zwei echte Teiler und $\mathfrak{f}_2$ von $\mathfrak{f}$ die Eigenschaft des Satzes* XL *haben, hat $\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)$ ch diese Eigenschaft.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß aus

$$\xi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_3}, \quad \xi \succ 0, \quad ([\xi], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$$

ts

$$\chi(\xi) = 1$$

gt.

Ich setze $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, falls jedes Primideal, das $\mathfrak{f}$ teilt, auch in $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$ auf-
t; andernfalls setze ich $\mathfrak{b}$ gleich dem Produkt der verschiedenen in $\mathfrak{f}$,
r nicht in $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$ aufgehenden Primideale. Ich wähle α so, daß die
ngruenzen

$$\alpha \equiv \xi \pmod{\mathfrak{b}\mathfrak{f}_1},$$

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_2}$$

ten. Wegen $(\mathfrak{b}\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2) = \mathfrak{f}_3$ geht dies, da $\xi - 1$ zu $\mathfrak{f}_3$ gehört, also nach
) von der Gestalt

$$\xi - 1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{f}_1 \mid \varphi_1, \quad \mathfrak{f}_3 \mid \varphi_2$$

so daß nur

$$\alpha = 1 + \varphi_2$$

etzt zu werden braucht. Eo ipso ist, wie die Kongruenzen lehren,
], $\mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$.

Nun wähle ich β nach Satz XX so, daß

$$\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \beta \succ 0$$

ist Dann ist gewiß $([\beta], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, ferner

$$\beta \equiv \xi \pmod{\mathfrak{f}_1},$$
$$\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_2};$$

daraus folgt nach Satz XXV

$$[\beta] \sim [\xi] \pmod{\mathfrak{f}_1},$$
$$[\beta] \sim \mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{f}_2},$$

also wegen (17), (18) (auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ angewandt)

$$\chi[\beta] = \chi[\xi] = \chi(\xi),$$
$$\chi[\beta] = \chi(\mathfrak{o}) = 1,$$
$$\chi(\xi) = 1.$$

Satz XLII: *Wenn für ein bestimmtes χ mehr als ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$ die Eigenschaft des Satzes* XL *hat, gibt es unter allen derartigen Teilern einen, $\mathfrak{f}_0$, der in den übrigen aufgeht.*

Beweis: Unter allen echten Teilern $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{f}$ mit der Eigenschaft des Satzes XL sei $\mathfrak{f}_0$ einer von kleinster Teilerzahl. Dies $\mathfrak{f}_0$ geht in jedem $\mathfrak{g}$ auf, da sonst $(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{g})$ weniger Teiler hätte als $\mathfrak{f}_0$ und doch nach Satz XLI die Eigenschaft des Satzes XL hätte.

Definition XII: $\chi(\mathfrak{a})$ *heißt eigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$, *wenn es keinen echten Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ mit der Eigenschaft des Satzes* XL *gibt. Andernfalls heißt $\chi(\mathfrak{a})$ uneigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$.

Satz XLIII: *Ist $\chi(\mathfrak{a})$ eigentlicher Charakter, so ist auch $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ eigentlicher Charakter.*

Beweis: Zu jedem echten Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ gibt es ein ξ, so daß (18) gilt, aber $\chi(\xi) \neq 1$ ist, und hieraus folgt $\bar{\chi}(\xi) \neq 1$.

Satz XLIV: $\chi(\mathfrak{a})$ *sei uneigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$. *Es sei $\mathfrak{f}_0$ der durch Satz* XLII *gelieferte Teiler. Ich definiere im Falle* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_0) = \mathfrak{o}$

$$X(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{b}) \text{ für alle zu } \mathfrak{f} \text{ teilerfremden } \mathfrak{b} \sim \mathfrak{a} \pmod{\mathfrak{f}_0}.$$

(*Ein solches $\mathfrak{b}$ gibt es nach Satz* XXXIX, *und $\chi(\mathfrak{b})$ ist von $\mathfrak{b}$ unabhängig, weil aus* (17) *stets* (18) *folgt, hier mit dem Modul $\mathfrak{f}_0$.*) *Im Falle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_0) \neq \mathfrak{o}$ setze ich*

$$X(\mathfrak{a}) = 0.$$

Dann wird behauptet: $X(\mathfrak{a})$ ist ein Charakter mod $\mathfrak{f}_0$, *und zwar ein eigentlicher.*

Beweis: 1. $X(a)$ ist ein Charakter mod f_0. Denn

a) $X(o) = \chi(o) = 1 \neq 0$.

b) $X(a)$ hat für alle Ideale derselben Klasse mod f_0 denselben Wert.

c) Für $(a, f_0) = o$, $(c, f_0) = o$ ist

$$X(ac) = X(a)X(c);$$

n nämlich a_1 und c_1 nach Satz XXXIX so gewählt werden, daß

$$a_1 \sim a \pmod{f_0}, \qquad (a_1, f) = o,$$
$$c_1 \sim c \pmod{f_0}, \qquad (c_1, f) = o$$

also

$$a_1 c_1 \sim ac \pmod{f_0}, \qquad (a_1 c_1, f) = o$$

so ist

$$X(ac) = \chi(a_1 c_1) = \chi(a_1)\chi(c_1) = X(a)X(c).$$

d) Für $(a, f_0) \neq o$ ist $X(a) = 0$.

2. $X(a)$ ist eigentlicher Charakter mod f_0. Denn sonst gäbe es einen
en Teiler f_1 von f_0, so daß aus

$$b \sim c \pmod{f_1}, \qquad (b, f_0) = o, \qquad (c, f_0) = o$$

s

$$X(b) = X(c)$$

te. A fortiori würde also aus

$$b \sim c \pmod{f_1}, \qquad (b, f) = o, \qquad (c, f) = o$$

s

$$X(b) = X(c),$$

$$\chi(b) = \chi(c)$$

en, so daß f_1 die Eigenschaft des Satzes XL hätte, entgegen der
nition von f_0.

Zusatz: Ein Blick auf den vorangehenden Beweis lehrt, daß, wenn
$X_1(a)$ entsprechend bei einem von f_0 verschiedenen echten Teiler
on f mit der Eigenschaft des Satzes XL definieren würde, zwar ein
rakter (mod f_1) herauskäme, aber ein uneigentlicher. Unscharf aus-
rückt: Jeder Charakter mod f ist eigentlicher Charakter modulo genau
s Teilers von f.

Satz XLV: *Es sei* $\chi(a)$ *uneigentlicher Charakter* mod f *und* f_0 *das*
zl des Satzes XLII, $X(a)$ *der Charakter* mod f_0 *des Satzes* XLIV.
n ist, wenn $\chi(a)$ *der Hauptcharakter* mod f *ist,* $X(a)$ *der Haupt-*
rakter mod f_0; *wenn* $\chi(a)$ *nicht der Hauptcharakter* mod f *ist,* $X(a)$
t Hauptcharakter mod f_0. *Im ersten Fall ist außerdem* $f_0 = o$.

Beweis: 1. Ist $\chi(a)$ der Hauptcharakter mod f, so ist für jedes
f teilerfremde Ideal $\chi(a) = 1$; sonst $\chi(a) = 0$. Es hat also o die

Eigenschaft des Satzes XL, so daß $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{o}$ ist, und $X(\mathfrak{a})$ ist identisch $=1$, also der Hauptcharakter mod $\mathfrak{o}$.

2. Ist $X(\mathfrak{a})$ der Hauptcharakter mod $\mathfrak{f}_0$, so ist $\chi(\mathfrak{a}) = 1$ für jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideal; d. h. $\chi(\mathfrak{a})$ ist Hauptcharakter mod $\mathfrak{f}$.

Definition XIII: *$\chi(\mathfrak{a})$ sei ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$; *ξ sei eine Zahl $\neq 0$ des Körpers. Ich wähle ein ganzes $\eta = \eta(\xi) \neq 0$ so, daß $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist und im Falle $r_1 > 0$ überdies*

$$\operatorname{sign} \eta^{(m)} = \operatorname{sign} \xi^{(m)}, \qquad 1 \leqq m \leqq r_1,$$

ist. (*Das geht nach Satz* XXI.) *Dann ist $\chi[\eta]$ nach Satz* XXV *unabhängig von der speziellen Wahl des $\eta = \eta(\xi)$, also* (*bei festem Körper, $\mathfrak{f}$ und χ*) *nur von ξ abhängig. Dies $\chi[\eta]$ ist $= \pm 1$, da $\eta^2 > 0$ und $\eta^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, also $(\chi[\eta])^2 = \chi[\eta^2] = 1$ ist. Ich definiere nun, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal, ξ irgendeine Zahl von $\mathfrak{a}$ ist,*

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = \begin{cases} \chi\left(\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right)[\eta]\right) & \text{für } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{für } \xi = 0,\ \mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}, \\ \bar{\chi}(\mathfrak{a}) & \text{für } \xi = 0,\ \mathfrak{f} = \mathfrak{o}, \end{cases}$$

so daß jeder χ-Funktion eine ψ-Funktion entspricht.

Definition XIV: *Für jede ganze Zahl des Körpers werde*

$$\psi(\mathfrak{o}, \xi) = \psi(\xi)$$

gesetzt, also (*wegen $\xi\eta > 0$ im Falle $\xi \neq 0$*)

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \chi[\xi\eta] = \chi(\xi\eta) & \text{für } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{für } \xi = 0,\ \mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}, \\ 1 & \text{für } \xi = 0,\ \mathfrak{f} = \mathfrak{o}. \end{cases}$$

Satz XLVI: *Für $\xi_1 \equiv \xi_2 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist*

$$\psi(\xi_1) = \psi(\xi_2).$$

Beweis: 1. Es sei $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$. Wegen

$$\xi_1\eta(\xi_1) \equiv \xi_2\eta(\xi_2) \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \xi_1\eta(\xi_1) > 0, \quad \xi_2\eta(\xi_2) > 0$$

ist nach Satz XXXV

$$\psi(\xi_1) = \chi(\xi_1\eta(\xi_1)) = \chi(\xi_2\eta(\xi_2)) = \psi(\xi_2).$$

2. Es sei $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Dann ist die Behauptung trivial.

3. Es sei $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$. Dann ist

a) im Falle $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ wegen $\mathfrak{f} \mid \xi_2$

$$\psi(\xi_1) = 0 = \chi[\xi_2\eta(\xi_2)] = \psi(\xi_2),$$

b) im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ wegen $\xi_2 \eta(\xi_2) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{o}}$ nebst $\xi_2 \eta(\xi_2) \succ 0$

$$\psi(\xi_1) = 1 = \chi[\xi_2 \eta(\xi_2)] = \psi(\xi_2).$$

4. Der Fall $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 = 0$ ist symmetrisch zu 3.

Satz XLVII: *Für jeden Charakter $\chi(\mathfrak{a})$ hat $\chi[\eta(\xi)]$ im Falle $\neq 0$ eine der 2^{r_1} Gestalten*

$$\chi[\eta(\xi)] = (\operatorname{sign} \xi^{(1)})^{b_1} \dots (\operatorname{sign} \xi^{(r_1)})^{b_{r_1}},$$

jedes $b = 0$ oder 1 ist, und die b nur von χ, nicht von ξ abhängen.

Beweis: Ich wähle r_1 Zahlen $\eta_m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, $1 \leqq m \leqq r_1$, so daß smal

$$\eta_m^{(m)} < 0, \quad \eta_m^{(l)} > 0 \text{ für } l \neq m, \quad 1 \leqq l \leqq r_1,$$

Und ich setze

$$b_m = \begin{cases} 0 & \text{für } \chi[\eta_m] = 1, \\ 1 & \text{für } \chi[\eta_m] = -1. \end{cases}$$

ist für $\xi \succ 0$ gewiß erfüllt; andernfalls ist, wenn

$$\xi^{(m_1)} < 0, \dots, \xi^{(m_q)} < 0,$$

$\xi^{(m)} > 0$ für die übrigen m des Intervalls $1 \leqq m \leqq r_1$ ist,

$$\frac{\xi}{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_q}} \succ 0,$$

$$\frac{\eta(\xi)}{\eta_{m_1} \dots \eta_{m_q}} \succ 0,$$

$$[\eta(\xi)] \sim [\eta_{m_1} \dots \eta_{m_q}] \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$(\xi)] = \chi[\eta_{m_1}] \dots \chi[\eta_{m_q}] = (-1)^{b_{m_1}} \dots (-1)^{b_{m_q}} = \prod_{m=1}^{r_1} (\operatorname{sign} \xi^{(m)})^{b_m},$$

mit (19) allgemein bewiesen ist.

§ 2.

Thetaformeln.

Satz XLVIII: *Ist*

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod{\mathfrak{f}}$$

ν eine Zahl des Körpers, deren Produkt mit jeder Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist, so ist

$$e^{2\pi i S(\beta_1 \nu)} = e^{2\pi i S(\beta_2 \nu)}.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $S(\beta_1 \nu) - S(\beta_2 \nu) = S((\beta_1 - \beta_2)\nu)$ rational ist. Dazu ist nach Satz XIV hinreichend, daß $(\beta_1 - \beta_2)\nu\delta$ jede Zahl δ von $\mathfrak{d}$ ganz ist. Nach (20) ist in der Tat $(\beta_1 - \beta_2)\nu\delta$ νmal einer Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, also ganz.

Satz IL: *Es sei* $\chi(\mathfrak{a})$ *ein eigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$. *Es sei* ν *eine Zahl des Körpers, deren Produkt mit jeder Zahl von* $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ *ganz ist. Falls* $\nu \neq 0$ *ist, bildet die Menge dieser Produkte nach Satz* 100 *ein Ideal, das ich* $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\nu)$ *nenne. Ich setze, mag* $\nu \neq 0$ *oder* $\nu = 0$ *sein,*

$$F(\nu) = \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta\nu)},$$

wo β *ein vollständiges Restsystem total positiver Zahlen* mod $\mathfrak{f}$ *durchläuft. (Nach Satz* XXXV *und* XLVIII *ist die Summe von der Wahl dieses Restsystems unabhängig, was die Bezeichnung* $F(\nu)$ *rechtfertigt. Natürlich hängt die Summe noch vom Körper,* $\mathfrak{f}$ *und* χ *ab.)*

Behauptet wird die Existenz einer nicht von ν *(also bei festem Körper und festem* $\mathfrak{f}$ *nur von* χ*) abhängigen Zahl* $C(\chi)$*, so daß*

$$F(\nu) = \begin{cases} \bar{\chi}(\mathfrak{n}[\eta(\nu)])\, C(\chi) & \text{für } \nu \neq 0, \\ \bar{\chi}(\mathfrak{d}\mathfrak{f})\, C(\chi) & \text{für } \nu = 0 \end{cases}$$

ist.

Beweis: Ich wähle nach Satz XVI eine Zahl λ_1 so, daß

$$\mathfrak{d}\mathfrak{f} \mid \lambda_1, \quad \left(\frac{[\lambda_1]}{\mathfrak{d}\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}\right) = \mathfrak{o}$$

ist; alsdann nach Satz XXI eine Zahl $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, so daß $\alpha\lambda_1 \succ 0$ ist. Und ich setze $\lambda_1 \alpha = \lambda$. Dann ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{f} \mid \lambda, \quad \left(\frac{[\lambda]}{\mathfrak{d}\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}\right) = \mathfrak{o}, \quad \lambda \succ 0.$$

Wird

$$\frac{[\lambda]}{\mathfrak{d}\mathfrak{f}} = \mathfrak{g}$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{g} = [\lambda], \quad (\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}.$$

Ich wähle nunmehr nach denselben Sätzen eine Zahl μ so, daß

$$\mathfrak{g} \mid \mu, \quad \left(\frac{[\mu]}{\mathfrak{g}}, \mathfrak{f}\right) = \mathfrak{o}, \quad \mu \succ 0$$

ist. Wird

$$\frac{[\mu]}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{h}\mathfrak{g} = [\mu], \quad (\mathfrak{h}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad ([\mu], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}.$$

Nun ist $\xi = \nu\lambda$ ganz, da λ eine Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist. Im Falle $\nu = 0$ ist $\xi = 0$. Im Falle $\nu \neq 0$ ist $\xi \neq 0$, ferner $[\lambda]\mathfrak{n}$ die Menge der ξ fachen Zahlen von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, also

$$[\xi]\mathfrak{d}\mathfrak{f} = [\lambda]\mathfrak{n} = \mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{n},$$

$$[\xi] = \mathfrak{g}\mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{g} \mid [\xi],$$

$$\mathfrak{n} = \frac{[\xi]}{\mathfrak{g}}.$$

1. Es sei $\nu \neq 0$ und $(\mathfrak{n}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Ich wähle eine ganze Zahl $\tau \succ 0$ Körpers so, daß

$$\tau\xi \equiv \mu \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f})$$

(Das geht wegen $(\mathfrak{n}\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $([\xi], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$.) Da, wegen $([\tau], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, nit β ein total positives, vollständiges Restsystem durchläuft, ist

$$\nu) = \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta\nu)} = \sum_{\beta} \chi(\tau\beta) e^{2\pi i S(\tau\beta\nu)} = \chi(\tau) \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\tau\beta\nu)}.$$

Nun ist, da ξ und μ durch $\mathfrak{g}$ teilbar sind,

$$\tau\xi - \mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{g}).$$

gen $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist also

$$\tau\xi - \mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{g}\mathfrak{f}).$$

jede Zahl δ von $\mathfrak{d}$ gilt also, wegen

$$\delta(\tau\xi - \mu) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{f}),$$

$$\delta(\tau\xi - \mu) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [\lambda]);$$

er ist

$$\beta\delta \frac{\tau\xi - \mu}{\lambda} = \beta\left(\tau\nu - \frac{\mu}{\lambda}\right)\delta$$

, also nach Satz XIV

$$e^{2\pi i S\left(\beta\left(\tau\nu - \frac{\mu}{\lambda}\right)\right)} = 1,$$

$$e^{2\pi i S(\tau\beta\nu)} = e^{2\pi i S\left(\frac{\beta\mu}{\lambda}\right)},$$

$$F(\nu) = \chi(\tau) \sum_{\beta} \chi(\beta)\, e^{2\pi i S\left(\frac{\beta\mu}{\lambda}\right)}.$$

λ und μ von ν unabhängig sind, ist es auch die Summe rechts. Da on ν unabhängig ist, ist ihr Produkt mit $\chi(\mathfrak{h})$, welches ich $C(\chi)$ setze, ν unabhängig. Wegen $\chi(\mathfrak{h}) \neq 0$ ist somit

$$F(\nu) = \frac{\chi(\tau)}{\chi(\mathfrak{h})} C(\chi).$$

Nun ist wegen (21)

$$\tau\xi\eta(\xi) \equiv \mu \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f})$$

hierin $\xi\eta(\xi) \succ 0$, $\chi[\eta(\xi)] = \chi[\eta(\nu)]$ (wegen $\lambda \succ 0$), also (wegen $\cdot 0$)

$$\chi(\tau)\chi(\xi\eta(\nu)) = \chi(\mu) = \chi[\mu] = \chi(\mathfrak{h})\chi(\mathfrak{g}),$$

$$\frac{\chi(\tau)}{\chi(\mathfrak{h})} = \frac{\chi(\mathfrak{g})}{\chi[\xi]\chi[\eta(\nu)]} = \frac{\chi(\mathfrak{g})}{\chi(\mathfrak{n}\mathfrak{g})\chi[\eta(\nu)]} = \frac{1}{\chi(\mathfrak{n}[\eta(\nu)])} = \bar{\chi}(\mathfrak{n}[\eta(\nu)]),$$

$$F(\nu) = \bar{\chi}(\mathfrak{n}[\eta(\nu)])C(\chi).$$

2. Es sei $\nu \neq 0$ und $(\mathfrak{n}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$. Ich setze $(\mathfrak{n}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}_2$, so daß $\mathfrak{f}_1 = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_2}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$ ist. Da χ eigentlicher Charakter ist, gibt es ein ϱ derart, daß

$$\varrho \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f}_1), \quad \varrho \succ 0, \quad ([\varrho], \mathfrak{f}) \doteq \mathfrak{o}, \quad \chi(\varrho) \neq 1$$

ist. Da $\varrho\beta$ mit β ein vollständiges Restsystem total positiver Zahlen mod $\mathfrak{f}$ durchläuft, ist

$$F(\nu) = \sum_{\beta} \chi(\varrho\beta) e^{2\pi i S(\varrho\beta\nu)} = \chi(\varrho) \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta\varrho\nu)}.$$

Wenn nun δ irgendeine Zahl $\neq 0$ von $\mathfrak{d}$ ist, so folgt aus

$$\mathfrak{d}\mathfrak{f} \mid \mathfrak{d}\mathfrak{f}\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{f}_2} = \mathfrak{d}\mathfrak{n}\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_2} = \mathfrak{d}\mathfrak{n}\mathfrak{f}_1 \mid [\delta]\mathfrak{n}[\varrho - 1],$$

daß $\delta\nu(\varrho - 1)$ mal jeder Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ eine Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist, daß also $\delta\nu(\varrho - 1)$ nach Satz 21 ganz ist, also auch $\beta\delta\nu(\varrho - 1) = \delta(\beta\varrho\nu - \beta\nu)$. Auch für $\delta = 0$ ist diese Zahl ganz. Nach Satz XIV ist also in jedem Summenglied

$$e^{2\pi i S(\beta\varrho\nu)} = e^{2\pi i S(\beta\nu)},$$

also

$$F(\nu) = \chi(\varrho) F(\nu),$$

$$F(\nu)(\chi(\varrho) - 1) = 0,$$

$$F(\nu) = 0.$$

Andererseits ist wegen $(\mathfrak{n}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$

$$\chi(\mathfrak{n}[\eta(\nu)]) C(\chi) = 0,$$

also (22) gültig.

3. Es sei $\nu = 0$. Dann ist

$$F(\nu) = F(0) = \sum_{\beta} \chi(\beta) = \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta \cdot 1)} = F(1),$$

also wegen $1 \succ 0$, $\bar{\chi}[\eta(1)] = 1$, $\mathfrak{n}(1) = \mathfrak{d}\mathfrak{f}$ nach 1. und 2.

$$F(\nu) = \bar{\chi}(\mathfrak{d}\mathfrak{f}) C(\chi).$$

Übrigens ist dies 0 für $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$, während für $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ die Wertbestimmung

$$F(\nu) = F(0) = \chi(1) e^{2\pi i S(1 \cdot 0)} = 1$$

trivial ist. Ich werde aber auch den Wert $\bar{\chi}(\mathfrak{d}\mathfrak{f}) C(\chi) = \bar{\chi}(\mathfrak{d}) C(\chi)$ und seine Gleichheit mit 1 später verwenden.

Satz L: *In den Bezeichnungen des Satzes* 149 *ist*

$$\vartheta(\gamma, \delta; Q) = \frac{e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \delta_k}}{\sqrt{D}} \vartheta(\delta, -\gamma; Q').$$

Beweis: Satz 150 besagt den Spezialfall $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$ dieses es. Aus diesem Spezialfall ergibt sich aber leicht der allgemeine Fall ndermaßen:

$$\vartheta(\gamma, \delta; Q) = \sum_{x_k} e^{-\pi Q(x_k+\gamma_k)+2\pi i \sum_k \delta_k x_k}$$

$$= \sum_{x_k} e^{-\pi Q(x_k)-2\pi \sum_k x_k \sum_l \gamma_l a_{kl} - \pi Q(\gamma_k)+2\pi i \sum_k \delta_k x_k}$$

$$= e^{-\pi Q(\gamma_k)} \sum_{x_k} e^{-\pi Q(x_k)+2\pi i \sum_k (\delta_k + i \sum_l \gamma_l a_{kl}) x_k}$$

$$= e^{-\pi Q(\gamma_k)} \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{x_k} e^{-\pi Q'(x_k+\delta_k+i\sum_l \gamma_l a_{kl})},$$

$$_k + \delta_k + i \sum_l \gamma_l \alpha_{kl}) = \sum_{k,l} A_{kl}(x_k+\delta_k+i\sum_m \gamma_m \alpha_{km})(x_l+\delta_l+i\sum_q \gamma_q \alpha_{lq})$$

$$_{kl}(x_k+\delta_k)(x_l+\delta_l)+2i\sum_k (x_k+\delta_k)\sum_l A_{kl}\sum_q \gamma_q \alpha_{lq} - \sum_{k,l,m,q} A_{kl}\gamma_m \alpha_{km}\gamma_q \alpha_{lq}$$

$$_{kl}\sum_q \gamma_q \alpha_{lq} = \sum_q \gamma_q \sum_l A_{kl}\alpha_{lq} = \sum_q \gamma_q e_{kq} = \gamma_k,$$

$$_q A_{kl}\gamma_m \alpha_{km}\gamma_q \alpha_{lq} = \sum_{m,q} \gamma_m \gamma_q \sum_{k,l} A_{kl}\alpha_{km}\alpha_{lq} = \sum_{m,q} \gamma_m \gamma_q \sum_l \alpha_{lq} \sum_k A_{kl}\alpha_{km}$$

$$_q \gamma_m \gamma_q \sum_l \alpha_{lq} e_{lm} = \sum_{m,q} \gamma_m \gamma_q \alpha_{mq} = Q(\gamma_k),$$

$$\delta; Q) = e^{-\pi Q(\gamma_k)} \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{x_k} e^{-\pi Q'(x_k+\delta_k)-2\pi i \sum_k \gamma_k (x_k+\delta_k)+\pi Q(\gamma_k)}$$

$$\frac{2\pi i \sum_k \gamma_k \delta_k}{\sqrt{D}} \sum_{x_k} e^{-\pi Q'(x_k+\delta_k)-2\pi i \sum_k \gamma_k x_k} = \frac{e^{-2\pi i \sum_k \gamma_k \delta_k}}{\sqrt{D}} \vartheta(\delta, -\gamma; Q').$$

Definition XV: *Es bezeichne für jede Zahl ξ des Körpers $P(\xi)$ alle $r_1 = 0$ den Wert* 1, *im Falle $r_1 > 0$ den Wert* 1 *oder irgendder $2^{r_1} - 1$ Funktionen $\xi^{(m_1)} \ldots \xi^{(m_q)}$, wo $1 \leqq q \leqq r_1$ ist und $m_1, \ldots, m_q$ hiedene Zahlen der Reihe* $1, 2, \ldots, r_1$ *sind. In beiden Fällen ist $P(\xi)$ eine von 2^{r_1} Funktionen. Wenn die Funktion* 1 *dem Werte* 0 *zugeordnet wird, so gibt es zu jedem q der Reihe* $0, \ldots, r_1$ *genau olcher Funktionen.*

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ irgend n unabhängige Zahlen des Körpers. erde

$$c = \frac{1}{\sqrt{|\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|}}$$

gesetzt. Es sei die Bedeutung der τ_k dieselbe wie in der Definition 42. Es sei zur Abkürzung $\mu = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ gesetzt, wo die x ganz rational sind, $\mu^{(k)} = \alpha_1^{(k)} x_1 + \ldots + \alpha_n^{(k)} x_n$. Es sei β eine beliebige Zahl des Körpers.

Dann setze ich

$$\Theta(\tau; \alpha; \beta) = \sum_{\mu} P(\mu + \beta)\, e^{-\pi c \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\mu^{(k)} + \beta^{(k)}|^2},$$

wo μ den gesamten Wertevorrat, d. h. $x_1, \ldots, x_n$ alle Gitterpunkte des n dimensionalen Raumes durchlaufen[6]*). Die Reihe ist absolut konvergent; denn $\pi c \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\mu^{(k)} + \beta^{(k)}|^2 = \pi c \sum_{k=1}^{n} \tau_k (\mu^{(k)} + \beta^{(k)})(\overline{\mu^{(k)}} + \overline{\beta^{(k)}})$ ist in den Variabeln x_k eine definite quadratische Form plus einer Linearform plus einer Konstanten, also (nach Satz 148) $\geqq \varkappa (x_1^2 + \ldots + x_n^2) - \varkappa_1 (|x_1| + \ldots + |x_n|) - \varkappa_2$ mit $\varkappa > 0$, $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$; $P(\mu + \beta)$ ist eine ganze rationale Funktion der x_k, und*

$$\sum_{x_k} |x_1|^{a_1} \ldots |x_n|^{a_n} e^{-\varkappa (x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \varkappa_1 (|x_1| + \ldots + |x_n|) + \varkappa_2}$$

konvergiert, weil

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |x|^a e^{-\varkappa x^2 + \varkappa_1 |x|}$$

konvergiert.

Satz LI: *Es ist*

$$\Theta(\tau; \alpha; \beta) = \sum_{x_k} P(\mu + \beta)\, e^{-\pi Q(x_k + h_k)},$$

wo $Q(x_k)$ die Bedeutung

$$Q(x_k) = \sum_{k=1}^{n} c \tau_k \Big| \sum_{l} \alpha_l^{(k)} x_l \Big|^2$$

aus Definition 42 hat, $h_k = S(\beta \mathsf{A}_k)$ ist, und hierin $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ das zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplementäre System bezeichnet. Insbesondere ist also die dem Wert $q = 0$ entsprechende Funktion

$$\Theta(\tau; \alpha; \beta) = \vartheta(h, 0; Q).$$

Beweis: Die durch

$$\beta = \sum_{k} y_k \alpha_k \tag{23}$$

bestimmten rationalen y_k sind $= S(\beta \mathsf{A}_k) = h_k$; denn aus (23) folgt

$$S(\beta \mathsf{A}_k) = \sum_{l} y_l S(\mathsf{A}_k \alpha_l) = \sum_{l} y_l e_{kl} = y_k.$$

---

[6]) Das $\Theta(\tau; \alpha)$ der Definition 42 ist also $\Theta(\tau; \alpha; 0)$ mit $q = 0$.

er ist

$$\beta = \sum_l h_l \alpha_l,$$

$$\mu + \beta = \sum_l (x_l + h_l)\alpha_l,$$

$$\mu^{(k)} + \beta^{(k)} = \sum_l (x_l + h_l)\alpha_l^{(k)},$$

$$c\sum_k \tau_k |\mu^{(k)} + \beta^{(k)}|^2 = \sum_k c\tau_k \Big|\sum_l \alpha_l^{(k)}(x_l + h_l)\Big|^2 = Q(x_k + h_k).$$

Satz LII: *Durchläuft* M *den Wertevorrat* $\mathsf{A}_1 x_1 + \ldots + \mathsf{A}_n x_n$ *und*

$$c' = \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n)|}} = \frac{1}{\mathfrak{a}}$$

tzt, so ist (wenn im Falle $q = 0$ *das Produkt* $\tau_{m_1} \ldots \tau_{m_q}$ *den Wert* 1 *ichnet)*

$$; \alpha; \beta) = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \ldots \tau_n}} \frac{1}{(ci)^q \tau_{m_1} \ldots \tau_{m_q}} \sum_{\mathsf{M}} P(\mathsf{M})\, e^{-\pi c' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2 + 2\pi i S(\beta \mathsf{M})}.$$

Beweis: 1. Im Spezialfall $q = 0$ folgt aus Satz L

$$\Theta(\tau; \alpha; \beta) = \vartheta(h, 0; Q) = \frac{1}{\sqrt{D}} \vartheta(0, -h; Q') = \frac{1}{\sqrt{D}} \vartheta(0, h; Q'),$$

wegen $D = \tau_1 \ldots \tau_n$ (Formel (103)) und der Formel (102) für Q'

$$\Theta(\tau; \alpha; \beta) = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \ldots \tau_n}} \sum_{\mathsf{M}} e^{-\pi c' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2 + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} h_k x_k},$$

it wegen

$$\sum_k h_k x_k = \sum_k S(\beta \mathsf{A}_k) x_k = S\Big(\beta \sum_k \mathsf{A}_k x_k\Big) = S(\beta \mathsf{M})$$

Behauptung bewiesen ist.

2. Es sei $q > 0$. Ich verstehe unter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ unabhängige reelle meter und setze für $1 \leqq k \leqq n$

$$\delta_k = \sum_l \lambda_l \alpha_k^{(l)}.$$

n ist

$$_k x_k = \sum_k \sum_l \lambda_l \alpha_k^{(l)} x_k = \sum_l \lambda_l \sum_k \alpha_k^{(l)} x_k = \sum_l \lambda_l \mu^{(l)} = \sum_k \lambda_k \mu^{(k)},$$

$$_k \delta_k = \sum_k \sum_l h_k \lambda_l \alpha_k^{(l)} = \sum_l \lambda_l \sum_k h_k \alpha_k^{(l)} = \sum_l \lambda_l \beta^{(l)} = \sum_k \lambda_k \beta^{(k)},$$

$$\sum_l \mathsf{A}_l^{(k)}(x_l+\delta_l) = \sum_l \mathsf{A}_l^{(k)} x_l + \sum_l \mathsf{A}_l^{(k)} \sum_m \lambda_m \alpha_l^{(m)} = \mathsf{M}^{(k)} + \sum_m \lambda_m \sum_l \mathsf{A}_l^{(k)} \alpha_l^{(m)}$$

$$= \mathsf{M}^{(k)} + \sum_m \lambda_m e_{km} = \mathsf{M}^{(k)} + \lambda_k.$$

Aus Satz L folgt, wenn dies alles, (24) und (25) beachtet wird,

$$\sum_\mu e^{-\pi c \sum_{k=1}^n \tau_k |\mu^{(k)}+\beta^{(k)}|^2 + 2\pi i \sum_k \lambda_k (\mu^{(k)}+\beta^{(k)})} = e^{2\pi i \sum_k \lambda_k \beta^{(k)}} \vartheta(h, \delta; Q)$$

$$= e^{2\pi i \sum_k \lambda_k \beta^{(k)}} \frac{e^{-2\pi i \sum_k h_k \delta_k}}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}} \vartheta(\delta, -h; Q')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}} \sum_{\mathsf{M}} e^{-\pi c' \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}+\lambda_k|^2 - 2\pi i S(\beta \mathsf{M})}$$

Ich setze nun alle λ_k außer $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_q}$ von vornherein $= 0$ und differentiiere sukzessive nach $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_q}$, indem ich die Variable, nach der ich differentiiert habe, jedesmal alsbald nachher $= 0$ setze. Dies ist möglich, und das Differentiieren sowie das Nullsetzen nachher darf gliedweise geschehen; denn links ist die nach $q_1 \leqq q$ Schritten beim Differentiieren formal entstehende Reihe (wo das $P_1(\xi)$ dem q_1 entspricht und Σ', desgl. nachher Π' bedeutet, daß $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_{q_1-1}}$ schon 0 gesetzt sind)

$$(2\pi i)^{q_1} \sum_\mu P_1(\mu+\beta) e^{-\pi c \sum_{k=1}^n \tau_k |\mu^{(k)}+\beta^{(k)}|^2 + 2\pi i \sum_k' \lambda_k (\mu^{(k)}+\beta^{(k)})}$$

für $|\lambda_{m_{q_1}}| \leqq a$ bei festen $\lambda_{m_{q_1+1}}, \dots, \lambda_{m_q}$ offenbar gleichmäßig konvergent, da der reelle Teil des Exponenten $\leqq -\varkappa(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \varkappa_1(|x_1| + \dots + |x_n|) + \varkappa_2$ mit $\varkappa > 0$, $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ und $P_1(\mu+\beta)$ eine ganze rationale Funktion der x_k ist; zu gleicher Zeit entsteht rechts formal (weil $|\mathsf{M}^{(k)} + \lambda_k|^2 = (\mathsf{M}^{(k)} + \lambda_k)^2$ für $k \leqq r_1$ ist)

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}} \frac{(-2\pi c')^{q_1}}{\tau_{m_1} \dots \tau_{m_{q_1}}} \sum_{\mathsf{M}} \prod_{v=1}^{q_1}{}' (\mathsf{M}^{(m_v)} + \lambda_{m_v}) e^{-\pi c' \sum_{k=1}^n{}' \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}+\lambda_k|^2 - 2\pi i S(\beta \mathsf{M})},$$

wo für $|\lambda_{m_{q_1}}| < a$ bei festen $\lambda_{m_{q_1+1}}, \dots, \lambda_{m_q}$ der reelle Teil des Exponenten dieselbe Gestalt hat, wie für die vorige Summe beschrieben, und $\prod_{v=1}^{q_1}{}'$ absolut kleiner als eine von $\lambda_{m_{q_1}}$ freie ganze rationale Funktion der $|x_k|$ ist, so daß auch hier gleichmäßige Konvergenz besteht.

Das ganze Verfahren ist also erlaubt und ergibt

$$i)^q \sum_{\mu} P(\mu+\beta) e^{-\pi c \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\mu^{(k)}+\beta^{(k)}|^2} = (2\pi i)^q \Theta(\tau; \alpha; \beta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n \, \tau_{m_1} \dots \tau_{m_q}}} \frac{(-2\pi c')^q}{} \sum_{\mathsf{M}} P(\mathsf{M}) e^{-\pi c' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2 - 2\pi i S(\beta \mathsf{M})};$$

ist

$$\frac{(-2\pi c')^q}{(2\pi i)^q} = \left(\frac{-c'}{i}\right)^q = \left(\frac{-1}{ci}\right)^q;$$

er geht, wenn $-x_k$ statt x_k geschrieben wird, M in $-\mathsf{M}$, $P(\mathsf{M})$ in $)^q P(\mathsf{M})$, $S(\beta\mathsf{M})$ in $-S(\beta\mathsf{M})$ über, während $|\mathsf{M}^{(k)}|^2$ unverändert bleibt; er ist die Behauptung bewiesen.

Definition XVI: *Es sei χ ein eigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$. *Es le bei jeder der 2^{r_1} Möglichkeiten des $P(\xi)$ für jedes Ideal die über streckte Summe*

$$\sum_{\mathfrak{a}|\xi} \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a})|N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\xi^{(k)}|^2} = \Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi)$$

tzt, wo die Parameter τ den alten Bedingungen unterworfen sind. e Reihe konvergiert wegen $|\psi(\mathfrak{a}, \xi)| \leqq 1$ absolut aus demselben Grunde die Reihe in Definition XV.)

Satz LIII: *Ist*

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varphi \succ 0,$$

st

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = P(\varphi)\, \Theta\left(\tau \frac{|\varphi|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}; \mathfrak{b}, \chi\right).$$

eint ist rechts $\tau_1 \frac{|\varphi^{(1)}|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}, \dots, \tau_n \frac{|\varphi^{(n)}|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}$.

Beweis: Durchläuft ξ alle Zahlen von $\mathfrak{a}$, so durchläuft $\varrho = \frac{\xi}{\varphi}$ alle en von $\mathfrak{b}$. Wegen

$$N[\alpha]N\mathfrak{a} = N[\beta]N\mathfrak{b},$$

$$\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}} = \frac{|N\alpha|}{|N\beta|} = \frac{1}{|N\varphi|} = \frac{1}{N\varphi},$$

$$\frac{\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{a})} = \frac{\Delta N\mathfrak{b}^2}{\Delta N\mathfrak{a}^2} = \frac{1}{(N\varphi)^2}$$

lso

$$\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a})|N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\xi^{(k)}|^2 = \frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{b})|N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k |\varphi^{(k)}|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}} |\varrho^{(k)}|^2.$$

Andererseits ist im Falle $\xi \neq 0$ auch $\varrho \neq 0$, also, wegen $\alpha\xi = \beta\varrho$,

$$\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}} = \frac{[\alpha][\xi]}{[\alpha]\mathfrak{a}} = \frac{[\beta][\varrho]}{[\beta]\mathfrak{b}} = \frac{[\varrho]}{\mathfrak{b}},$$

$$\chi\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right) = \chi\left(\frac{[\varrho]}{\mathfrak{b}}\right).$$

Wegen $\frac{\xi}{\varrho} = \frac{\beta}{\alpha} > 0$ ist daher

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = \psi(\mathfrak{b}, \varrho). \tag{26}$$

(26) gilt auch im Falle $\xi = \varrho = 0$. Denn für $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ sind dann beide Seiten 0; für $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ haben sie denselben Wert wegen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \pmod{\mathfrak{o}}$, $\overline{\chi}(\mathfrak{a}) = \overline{\chi}(\mathfrak{b})$.

Ferner ist wegen $\xi = \varphi\varrho$

$$P(\xi) = P(\varphi)P(\varrho).$$

Demnach ist

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = P(\varphi) \sum_{\mathfrak{b}|\varrho} \psi(\mathfrak{b}, \varrho) P(\varrho)\, e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{b})|N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k |\varphi^{(k)}|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}} |\varrho^{(k)}|^2}$$

$$= P(\varphi)\, \Theta\left(\tau \frac{|\varphi|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}; \mathfrak{b}, \chi\right).$$

Satz LIV: *Ist* $\mathfrak{a} = [v]\mathfrak{b}$, *wo* v *positiv und ganz rational ist, so ist*

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = v^q \Theta(\tau; \mathfrak{b}, \chi).$$

Beweis: Folgt aus Satz LIII.

Satz LV: *Wird*

$$\frac{C(\chi)}{\sqrt{N\mathfrak{f}}} = W(\chi)$$

und

$$\frac{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{a})} = \frac{(\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f}))^{2n-1}}{\Delta(\mathfrak{a})} = \frac{(N\mathfrak{a}^2 N\mathfrak{f}^2 \Delta)^{2n-1}}{\Delta(\mathfrak{a})} = \frac{(\Delta(\mathfrak{a}) N\mathfrak{f}^2)^{2n-1}}{\Delta(\mathfrak{a})}$$

$$= (\Delta(\mathfrak{a}))^{2n-2} N\mathfrak{f}^{4n-2} = g(\mathfrak{a})$$

gesetzt, so ist

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}} \frac{(-i)^q (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}}}{\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q}} \Theta\left(\frac{1}{\tau}; (\mathfrak{a}\mathfrak{f})', \overline{\chi}\right).$$

Hierbei ist die Θ-Reihe rechts mit demselben $P(\xi)$ *gebildet wie die Θ-Reihe links.*

Beweis: 1. Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Dann ist $\chi(\mathfrak{a}) \neq 0$, also für jede Zahl $\xi \neq 0$ des Ideals $\mathfrak{a}$

$$\chi\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right) = \frac{\chi[\xi]}{\chi(\mathfrak{a})} = \overline{\chi}(\mathfrak{a})\chi[\xi],$$

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = \overline{\chi}(\mathfrak{a})\chi[\xi\eta(\xi)] = \overline{\chi}(\mathfrak{a})\psi(\xi);$$

$\xi = 0$, $\mathfrak{f} + \mathfrak{o}$ ist

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = 0 = \bar{\chi}(\mathfrak{a})\psi(\xi);$$

$\xi = 0$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ ist

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) = \bar{\chi}(\mathfrak{a})\psi(\xi).$$

Für alle $\xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist also

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi) = \bar{\chi}(\mathfrak{a})\psi(\xi).$$

nach ist

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\mathfrak{a} \mid \xi} \psi(\xi) P(\xi) e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a})|N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \tau_k |\xi^{(k)}|^2}.$$

Ich verstehe unter $\mathfrak{b}$ ein Ideal der zu $\mathfrak{a}$ inversen Klasse mod $\mathfrak{f}$. Dann nsbesondere $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ von der Gestalt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = [\omega], \quad \mathfrak{a} \mid \omega, \quad ([\omega], \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}, \quad \omega \succ 0.$$

Ich nehme irgendein Restsystem total positiver Zahlen ϱ mod $\mathfrak{f}$. Dies system multipliziere ich mit ω. Dann entsteht ein durch $\mathfrak{a}$ teilbares system total positiver Zahlen β. Ich behaupte, daß, wenn β diese Zahlen und μ alle Zahlen von $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ durchläuft, $\xi = \mu + \beta$ alle Zahlen $\mathfrak{a}$ durchläuft und jede genau einmal. In der Tat folgt erstens aus

er

$$\mu_1 + \beta_1 = \mu_2 + \beta_2$$

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\beta_1 = \beta_2,$$

$$\mu_1 = \mu_2;$$

tens gibt es zu jeder Zahl ξ von $\mathfrak{a}$ ein β derart, daß

$$\xi - \beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}},$$

(wegen $\mathfrak{a} \mid \xi$, $\mathfrak{a} \mid \beta$, $\mathfrak{a} \mid \xi - \beta$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$)

$$\mu = \xi - \beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}$$

Für $\xi = \mu + \beta$ ist wegen $\mathfrak{f} \mid \mu$, $\beta \succ 0$ nach Satz XLVI und Definition XIV

$$\psi(\xi) = \psi(\mu + \beta) = \psi(\beta) = \chi(\beta);$$

r ist

$$\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f}) = \Delta(\mathfrak{a}) N\mathfrak{f}^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a})|N\mathfrak{f}}} = \frac{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}}}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|}};$$

ergibt sich

$$(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\beta} \chi(\beta) \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{f} \mid \mu} P(\mu + \beta) e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{N\mathfrak{f}}\, \tau_k |\mu^{(k)} + \beta^{(k)}|^2}.$$

Nun sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ und $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ das komplementäre System, also $\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})\mathsf{A}_1, \ldots, \Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})\mathsf{A}_n$ eine Basis von $(\mathfrak{a}\mathfrak{f})'$. Dann ist nach Definition XV und Satz LII, wenn für den Moment

$$z(\tau, \mathfrak{a}) = \frac{(-i\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|})^q}{\sqrt{\tau_1 \ldots \tau_n \, \tau_{m_1} \ldots \tau_{m_q} N\mathfrak{f}^{\frac{q}{n}}}}$$

gesetzt wird,

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\beta} \chi(\beta) \Theta(\tau \sqrt[n]{N\mathfrak{f}}; \alpha; \beta)$$

$$= \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \frac{z(\tau, \mathfrak{a})}{\sqrt{N\mathfrak{f}}} \sum_{\beta} \chi(\beta) \sum_{\mathsf{M}} P(\mathsf{M}) e^{-\pi \sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}} \cdot \tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2 + 2\pi i S(\beta \mathsf{M})}$$

$$= \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \frac{z(\tau, \mathfrak{a})}{\sqrt{N\mathfrak{f}}} \sum_{\mathsf{M}} P(\mathsf{M}) e^{-\pi \sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|} \frac{1}{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2} \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta \mathsf{M})}.$$

Nun durchläuft $\frac{\beta}{\omega} = \varrho$ ein Restsystem total positiver Zahlen mod $\mathfrak{f}$. Also ist

$$\bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta \mathsf{M})} = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\varrho} \chi(\varrho\omega) e^{2\pi i S(\varrho\omega \mathsf{M})}$$

$$= \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \chi(\omega) \sum_{\varrho} \chi(\varrho) e^{2\pi i S(\varrho\omega \mathsf{M})} = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \chi(\mathfrak{a}) \chi(\mathfrak{b}) \sum_{\varrho} \chi(\varrho) e^{2\pi i S(\varrho\omega \mathsf{M})}$$

$$= \chi(\mathfrak{b}) F(\omega \mathsf{M});$$

denn $\omega \mathsf{M}$ mal jeder Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist ganz, weil M mal jeder Zahl von $\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ nach Satz XIII ganz ist. Nach Satz IL ist also

a) im Falle $\mathsf{M} \neq 0$, wenn $\mathfrak{n}$ das Ideal der mit $\omega \mathsf{M}$ multiplizierten Zahlen von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist,

$$\bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta \mathsf{M})} = \chi(\mathfrak{b}) \bar{\chi}(\mathfrak{n}[\eta(\mathsf{M})]) C(\chi),$$

b) im Falle $\mathsf{M} = 0$

$$\bar{\chi}(\mathfrak{a}) \sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta \mathsf{M})} = \chi(\mathfrak{b}) \bar{\chi}(\mathfrak{d}\mathfrak{f}) C(\chi).$$

Demnach ist, wenn der Faktor $\gamma(\mathsf{M})$ in diesen beiden Fällen bzw. die Bedeutung $\bar{\chi}(\mathfrak{n}[\eta(\mathsf{M})])$, $\bar{\chi}(\mathfrak{d}\mathfrak{f})$ hat,

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = z(\tau, \mathfrak{a}) W(\chi) \chi(\mathfrak{b}) \sum_{\mathsf{M}} P(\mathsf{M}) \gamma(\mathsf{M}) e^{-\pi \sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|} \frac{1}{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau_k} |\mathsf{M}^{(k)}|^2}.$$

Nun durchläuft $\mathsf{H} = |\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})| \mathsf{M}$ alle Zahlen von $(\mathfrak{a}\mathfrak{f})'$; es ist

$$|\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')| = |\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|^{2n-1},$$

$$\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{af})|}\,\frac{1}{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}}} = \frac{|\Delta(\mathfrak{af})|^2}{\sqrt[n]{|\Delta((\mathfrak{af})')|\,N\mathfrak{f}}},$$

$$-\pi\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{af})|}\,\frac{1}{\sqrt[n]{N\mathfrak{f}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k}|\mathsf{M}^{(k)}|^2 = -\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta((\mathfrak{af})')|\,N\mathfrak{f}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k}|\mathsf{H}^{(k)}|^2,$$

$$P(\mathsf{M}) = |\Delta(\mathfrak{af})|^{-q}\,P(\mathsf{H}),$$

$$)= z(\tau,\mathfrak{a})\,W(\chi)\,\chi(\mathfrak{b})\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{-q}\sum_{(\mathfrak{af})'|\mathsf{H}} P(\mathsf{H})\,\gamma\left(\frac{\mathsf{H}}{|\Delta(\mathfrak{af})|}\right)e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta((\mathfrak{af})')|\,N\mathfrak{f}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k}|\mathsf{H}^{(k)}|^2}$$

Für $\mathsf{H}\neq 0$ ist

$$[\Delta(\mathfrak{af})]\mathfrak{n} = [\omega\mathsf{H}]\mathfrak{b}\mathfrak{f} = [\mathsf{H}]\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{f},$$

nach Satz XII

$$\mathfrak{a}\mathfrak{f}(\mathfrak{af})'\mathfrak{b}\mathfrak{n} = [\mathsf{H}]\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{f},$$

$$(\mathfrak{af})'\mathfrak{n} = [\mathsf{H}]\mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{n} = \frac{[\mathsf{H}]}{(\mathfrak{af})'}\mathfrak{b},$$

$$\chi(\mathfrak{b})\bar{\chi}(\mathfrak{n}) = \chi(\mathfrak{b})\bar{\chi}\left(\frac{[\mathsf{H}]}{(\mathfrak{af})'}\right)\bar{\chi}(\mathfrak{b}) = \bar{\chi}\left(\frac{[\mathsf{H}]}{(\mathfrak{af})'}\right),$$

$$\chi(\mathfrak{b})\gamma\left(\frac{\mathsf{H}}{|\Delta(\mathfrak{af})|}\right) = \chi(\mathfrak{b})\gamma(\mathsf{M}) = \chi(\mathfrak{b})\bar{\chi}\left(\mathfrak{n}[\eta(\mathsf{M})]\right)$$

$$= \bar{\chi}\left(\frac{[\mathsf{H}]}{(\mathfrak{af})'}[\eta(\mathsf{M})]\right) = \bar{\chi}\left(\frac{[\mathsf{H}]}{(\mathfrak{af})'}[\eta(\mathsf{H})]\right) = \bar{\psi}\left((\mathfrak{af})', \mathsf{H}\right),$$

das zu ψ „konjugiert komplexe" $\bar{\psi}$ die dem Charakter $\bar{\chi}$ nach Definition II entsprechende Funktion ist.

Für $\mathsf{H} = 0$ ist wegen $\mathsf{M} =$

$$\chi(\mathfrak{b})\gamma\left(\frac{\mathsf{H}}{|\Delta(\mathfrak{af})|}\right) = \chi(\mathfrak{b})\gamma(\mathsf{M}) = \chi(\mathfrak{b})\bar{\chi}(\mathfrak{b}\mathfrak{f});$$

s ist im Falle $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{o}$ gleich

$$0 = \bar{\psi}\left((\mathfrak{af})', \mathsf{H}\right);$$

Falle $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}$ ist, wegen $\chi(\mathfrak{ab}) = 1$ und $\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}) = 1$ (nach Satz XII),

$$)\bar{\chi}(\mathfrak{b}\mathfrak{f}) = \chi(\mathfrak{b})\bar{\chi}(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{b})\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = \chi(\mathfrak{a}') = \chi\left((\mathfrak{af})'\right) = \bar{\psi}\left((\mathfrak{af})', \mathsf{H}\right)$$

Für alle $\mathsf{H}\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}\,(\mathfrak{af})'\right)$ ist daher

$$\chi(\mathfrak{b})\,\gamma\left(\frac{\mathsf{H}}{|\Delta(\mathfrak{af})|}\right) = \bar{\psi}\left((\mathfrak{af})', \mathsf{H}\right).$$

Daher ergibt sich

$$;\mathfrak{a},\chi) = z(\tau,\mathfrak{a})\,W(\chi)\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{-q}\sum_{(\mathfrak{af})'|\mathsf{H}}\bar{\psi}\left((\mathfrak{af})', \mathsf{H}\right)P(\mathsf{H})\,e^{-\frac{\pi}{\sqrt[n]{|\Delta((\mathfrak{af})')|\,N\mathfrak{f}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k}|\mathsf{H}^{(k)}|^2}$$

$$= z(\tau,\mathfrak{a})\,W(\chi)\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{-q}\,\Theta\left(\frac{1}{\tau};\,(\mathfrak{af})', \bar{\chi}\right),$$

und hierin ist

$$z(\tau, \mathfrak{a})\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{-q} = \frac{(-i\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{af})|})^q}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}\,\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q} N\mathfrak{f}^{\frac{q}{n}}}\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{-q} = \frac{(-i)^q\,|\Delta(\mathfrak{af})|^{q\left(\frac{1}{n}-1\right)}}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}\,\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q} N\mathfrak{f}^{\frac{q}{n}}}$$

$$= \frac{(-i)^q\,|\Delta(\mathfrak{a})|^{q\left(\frac{1}{n}-1\right)} N\mathfrak{f}^{q\left(\frac{1}{n}-2\right)}}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}\,\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q}} = \frac{i}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}}\,\frac{(-i)^q (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}}}{\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q}}$$

womit in diesem Falle 1. die Behauptung bewiesen ist.

2. Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{o}$. Ich wähle $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}$ so, daß $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{b}$ kann zugleich so gewählt werden, daß in

$$[\alpha]\,\mathfrak{a} = [\beta]\,\mathfrak{b}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \varphi \succ 0$$

ist. (Denn sonst wäre das erstgewählte $\mathfrak{b}$ nur mit $\eta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ zu multiplizieren und α durch $\alpha\,\eta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ zu ersetzen.) Nach Satz LIII ist

$$\Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = P(\varphi)\,\Theta\left(\tau \frac{|\varphi|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}};\ \mathfrak{b}, \chi\right).$$

Wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist nach dem Falle 1. wenn

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\tau_k\,|\varphi^{(k)}|^2}{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}} = \frac{(N\varphi)^2}{(N\varphi)^2} \prod_{k=1}^{n} \tau_k = \prod_{k=1}^{n} \tau_k$$

berücksichtigt wird,

$$(27)\quad \Theta(\tau; \mathfrak{a}, \chi) = P(\varphi)\,\frac{W(\chi)}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}}\,\frac{(-i)^q (g(\mathfrak{b}))^{-\frac{q}{2n}}}{\tau_{m_1} \dots \tau_{m_q} (P(\varphi))^2 (N\varphi)^{-\frac{2q}{n}}}\,\Theta\left(\frac{1}{\tau}\,\frac{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}{|\varphi|^2};\ (\mathfrak{bf})', \bar{\chi}\right).$$

Nun ist

$$\mathfrak{af}(\mathfrak{af})'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{af})],$$

$$\mathfrak{bf}(\mathfrak{bf})'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{bf})],$$

$$[\Delta(\mathfrak{bf})]\,\mathfrak{af}(\mathfrak{af})'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{af})]\,\mathfrak{bf}(\mathfrak{bf})'\mathfrak{b},$$

$$[\Delta(\mathfrak{bf})]\,\mathfrak{a}(\mathfrak{af})' = [\Delta(\mathfrak{af})]\,\mathfrak{b}(\mathfrak{bf})',$$

$$[\Delta(\mathfrak{b})]\,\mathfrak{a}(\mathfrak{af})' = [\Delta(\mathfrak{a})]\,\mathfrak{b}(\mathfrak{bf})',$$

$$\frac{[\Delta([\beta]\mathfrak{b})]}{[N[\beta]^2]}\,\frac{[\alpha]\mathfrak{a}}{[\alpha]}(\mathfrak{af})' = \frac{[\Delta([\alpha]\mathfrak{a})]}{[N[\alpha]^2]}\,\frac{[\beta]\mathfrak{b}}{[\beta]}(\mathfrak{bf})',$$

$$[\beta]\,[(N\alpha)^2]\,(\mathfrak{af})' = [\alpha]\,[(N\beta)^2]\,(\mathfrak{bf})'.$$

Wenn also H alle Zahlen von $(\mathfrak{af})'$ durchläuft, so durchläuft $\frac{\beta}{\alpha}\left(N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^2 \mathsf{H} = \frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\,\mathsf{H}$ alle Zahlen von $(\mathfrak{bf})'$. Nach Satz LIII ist also wegen $\frac{\varphi}{(N\varphi)^2} \succ 0$

$$\Theta\left(\frac{1}{\tau}\frac{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}{|\varphi|^2};\ (\mathfrak{b}\mathfrak{f})',\bar{\chi}\right)$$

$$= P\left(\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right)\Theta\left(\frac{1}{\tau}\frac{\sqrt[n]{(N\varphi)^2}}{|\varphi|^2}\frac{\left|\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right|^2}{\sqrt[n]{\left(N\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right)^2}};\ (\mathfrak{a}\mathfrak{f})',\bar{\chi}\right)$$

$$= P\left(\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right)\Theta\left(\frac{1}{\tau};\ (\mathfrak{a}\mathfrak{f})',\bar{\chi}\right).$$

Aus (27) und (28) folgt die Behauptung, wenn nur

$$P(\varphi)\frac{g(\mathfrak{b})^{-\frac{q}{2n}}}{(P(\varphi))^2(N\varphi)^{-\frac{2q}{n}}}P\left(\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right) = (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}}$$

ziert wird; diese Relation

$$\frac{\left(\frac{\Delta((\mathfrak{b}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{b})}\right)^{-\frac{q}{2n}}}{P(\varphi)(N\varphi)^{-\frac{2q}{n}}}P\left(\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right) = \left(\frac{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{a})}\right)^{-\frac{q}{2n}}$$

aber aus

$$P\left(\frac{\varphi}{(N\varphi)^2}\right) = \frac{P(\varphi)}{(N\varphi)^{2q}}$$

$$\frac{\Delta((\mathfrak{b}\mathfrak{f})')}{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')} = \left(\frac{\Delta(\mathfrak{b}\mathfrak{f})}{\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})}\right)^{2n-1} = \left(\frac{\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{a})}\right)^{2n-1},$$

$$\frac{\Delta((\mathfrak{b}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{b})}:\frac{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{a})} = \left(\frac{\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{a})}\right)^{2n-2} = \left(\frac{\Delta([\beta]\mathfrak{b})}{\Delta([\alpha]\mathfrak{a})}\frac{|N\alpha|^2}{|N\beta|^2}\right)^{2n-2}$$

$$= \left|\frac{N\alpha}{N\beta}\right|^{4n-4} = \frac{1}{(N\varphi)^{4n-4}}.$$

§ 3.

Eigenschaften der Zetafunktionen.

Satz LVI: *Es werde für $\sigma > 1$, für irgendeine Idealklasse $\mathfrak{K}$ (im engeren Sinne) und irgendeinen Charakter die dort offenbar (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $\sigma > 1+\delta$, $\delta > 0$) reguläre Funktion*

$$\sum_{\mathfrak{b}\ in\ \mathfrak{K}}{}' \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} = \zeta(s;\ \mathfrak{K},\ \chi)$$

gesetzt.

Dann ist, wenn $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal der Klasse $\mathfrak{K}^{-1}$ bedeutet, für

$$\zeta(s;\ \mathfrak{K},\ \chi) = N\mathfrak{a}^s \sum_{\xi}{}' \frac{\psi(\mathfrak{a},\xi)\,\chi[\eta(\xi)]}{|N\xi|^s},$$

wo ξ aus jeder Schar assoziierter Zahlen $\neq 0$ von $\mathfrak{a}$ eine durchläuft; nach Satz XLVII *ist also entweder*

$$N\mathfrak{a}^{-s}\,\zeta(s;\mathfrak{K},\chi)=\sum_{\xi}{}'\frac{\psi(\mathfrak{a},\xi)}{|N\xi|^{s}},$$

oder es gibt ein q mit $1\leqq q\leqq r_1$ und q verschiedene Zahlen $m_1,\ldots,m_q$ der Reihe $1,2,\ldots,r_1$, so daß

$$N\mathfrak{a}^{-s}\,\zeta(s;\mathfrak{K},\chi)=\sum_{\xi}{}'\frac{\psi(\mathfrak{a},\xi)\,\operatorname{sign}(\xi^{(m_1)}\ldots\xi^{(m_q)})}{|N\xi|^{s}} \tag{29}$$

ist. Ersteres sei als Fall $q=0$ in diese Schreibweise einbezogen. Die Zahlen $q, m_1,\ldots,m_q$ sind allein durch χ bestimmt, also von $\mathfrak{K}$ unabhängig, und dem Charakter χ entsprechen offenbar dieselben Zahlen.

Beweis: Durchläuft $\mathfrak{b}$ alle Ideale von $\mathfrak{K}$, so durchläuft $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ alle durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Hauptideale, und umgekehrt. Hierbei ist, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}=[\xi]$ gesetzt,

$$N\mathfrak{b}=\frac{|N\xi|}{N\mathfrak{a}}$$

und

$$\chi(\mathfrak{b})=\chi\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right)=\frac{\psi(\mathfrak{a},\xi)}{\chi[\eta(\xi)]}=\psi(\mathfrak{a},\xi)\,\chi[\eta(\xi)].$$

Satz LVII: *χ sei ein eigentlicher Charakter.*

1. *$\zeta(s;\mathfrak{K},\chi)$ ist im Falle $q>0$ eine ganze Funktion. Im Falle $q=0$, $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{o}$ gleichfalls. Im Falle $q=0$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}$ ist $\zeta(s;\mathfrak{K},\chi)$ bis auf den Pol erster Ordnung $s=1$ regulär, und das Residuum hier ist $\lambda\bar{\chi}(\mathfrak{a})$, wo λ die in Satz* 154 *vorkommende Zahl ist*[7]).

2. *Es bedeute $A(\mathfrak{f})$ die von $\mathfrak{K}$ unabhängige Zahl*

$$A(\mathfrak{f})=2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|\Delta|N\mathfrak{f}},$$

und es werde

$$(A(\mathfrak{f}))^{s}\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{q}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q}(\Gamma(s))^{r_2}\,\zeta(s;\mathfrak{K},\chi)=\Phi(s;\mathfrak{K},\chi) \tag{30}$$

gesetzt. Dann ist $\Phi(s;\mathfrak{K},\chi)$ im Falle $q>0$ und im Falle $q=0$, $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{o}$ ganz; im Falle $q=0$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}$ ist $\Phi(s;\mathfrak{K},\chi)$ überall regulär bis auf Pole erster Ordnung in $s=0$ und $s=1$.

3. *Es besteht die Funktionalgleichung*

$$\Phi(s;\mathfrak{K},\chi)=(-i)^{q}W(\chi)\,\Phi(1-s;\breve{\mathfrak{K}},\bar{\chi}), \tag{31}$$

wo $\breve{\mathfrak{K}}=((\mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{F})')^{-1}$ ist und hierin $\mathfrak{F}$ die Klasse von $\mathfrak{f}$ bezeichnet. ($\breve{\mathfrak{K}}$ ist also die inverse Klasse zur Klasse des Ideals $(\mathfrak{a}\mathfrak{f})'$.)

---

[7]) Es sei gleich verifiziert, daß in diesem Falle die Zahl $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}^{-1}$ dieselbe ist. In der Tat folgt aus $q=0$, daß für $\eta\equiv 1\pmod{\mathfrak{f}}$ stets $\chi[\eta]=1$, also $\bar{\chi}[\eta]=1$ ist; wegen $\mathfrak{f}=\mathfrak{o}$ gilt dies für alle ganzen η des Körpers; aus $[\alpha_1]\mathfrak{a}_1=[\alpha_2]\mathfrak{a}_2$ folgt also $\bar{\chi}(\mathfrak{a}_1)=\bar{\chi}(\mathfrak{a}_2)$.

4. *In jedem festen Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *ist für* $|t| \geqq 1$ *die Funktion* $; \mathfrak{K}, \chi)|$ *beschränkt.*

Beweis: Da die Anordnung der r_1 reellen $\vartheta^{(k)}$ gleichgültig ist, e im Falle $q > 0$ für diesen Beweis ohne Beschränkung der Allgeheit $m_1 = 1, \ldots, m_q = q$ angenommen.

Nach (108) und (109) ist für $c > 0$, $g > 0$, $s > 0$

$$\frac{(2\pi c)^{-s}\,\Gamma(s)}{g^{2s}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi c g^2 e^z} e^{sz}\,dz,$$

$$\frac{(\pi c)^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{g^s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi c g^2 e^z} e^{\frac{s}{2}z}\,dz$$

$$\frac{(\pi c)^{-\frac{s+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{g^{s+1}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi c g^2 e^z} e^{\frac{s+1}{2}z}\,dz.$$

Hierin setze ich (mag $q = 0$ oder $q > 0$ sein)

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{|\Delta(\mathfrak{a})|\,N\mathfrak{f}}}$$

$g = |\xi^{(k)}|$, wo ξ eine Zahl $\neq 0$ des Ideals $\mathfrak{a}$ ist. Und zwar verwende ich für $1 \leqq k \leqq q$, (33) für $q+1 \leqq k \leqq r_1$, (32) für $r_1+1 \leqq k \leqq r_1+r_2$. en diese $r_1 + r_2 = r + 1$ Relationen multipliziert, und wird der Faktor $\cdot\, \xi^{(q)} = P(\xi)$ hinzugefügt, so ergibt sich, wenn d_k die Bedeutung aus neines Buches hat, mit Rücksicht auf

$$\frac{\xi^{(1)} \ldots \xi^{(q)}}{\prod_{k=1}^{q} |\xi^{(k)}|^{s+1} \prod_{k=q+1}^{r_1} |\xi^{(k)}|^{s} \prod_{k=r_1+1}^{r_1+r_2} |\xi^{(k)}|^{2}} = \frac{\operatorname{sign}(\xi^{(1)} \ldots \xi^{(q)})}{|N\xi|^{s}},$$

$$)^{-\frac{q}{2}}\, 2^{-r_2 s}\, (\pi c(\mathfrak{a}))^{-\frac{ns}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{q} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q} (\Gamma(s))^{r_2}\, \frac{\operatorname{sign}(\xi^{(1)} \ldots \xi^{(q)})}{|N\xi|^{s}}$$

$$= P(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi c(\mathfrak{a}) \sum_{k=1}^{r+1} d_k |\xi^{(k)}|^2 e^{z_k}}\, e^{\frac{s}{2}\sum_{k=1}^{r+1} d_k z_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} z_k}\, dz_1 \ldots dz_{r+1}.$$

Diese Gleichung multipliziere ich nun für $s > 1$ mit $\psi(\mathfrak{a}, \xi)$ und iere über alle, in (29) vorkommenden ξ. Daß hierbei die Summation der Integration vertauscht werden kann, folgt wörtlich so wie beim ise des Satzes 154, wenn nur bedacht wird, daß

$$\sum_{\xi}{}' \frac{|\psi(\mathfrak{a}, \xi)|}{|N\xi|^{s}}$$

konvergiert, also

$$\sum_{\xi}{}' |\psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}$$

konvergiert, und daß

$$\sum_{\xi}{}' |\psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)| e^{-\pi c(\mathfrak{a}) \sum_{k=1}^{r+1} d_k |\xi^{(k)}|^2 e^{z_k}}$$

für $j_k \leqq z_k \leqq j_k + 1$ $(1 \leqq k \leqq r+1)$ gleichmäßig konvergiert. Demnach ist nach (29) und (30) wegen

$$2^{-r_2} (\pi c(\mathfrak{a}))^{-\frac{n}{2}} = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} |\Delta(\mathfrak{a})|^{\frac{1}{2}} N\mathfrak{f}^{\frac{1}{2}} = A(\mathfrak{f}) N\mathfrak{a}$$

für $s > 1$ (bei der Bedeutung von z_k für $k > r+1$ wie auf S. 69)

$$(35)\quad \begin{cases} (\pi c(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2}} \Phi(s; \mathfrak{R}, \chi) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{s}{2} \sum_{k=1}^{n} z_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} z_k} \sum_{\xi}{}' \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\pi c(\mathfrak{a}) \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)}|^2 e^{z_k}} dz_1 \ldots dz_n \end{cases}$$

Nun werde für $r > 0$ (der Sinn des folgenden für $r = 0$ ist klar) die lineare Substitution (113) ausgeführt:

$$(36)\qquad z_k = v + \sum_{l=1}^{r} 2 \log |\varepsilon_l^{(k)}| \, y_l,$$

wo $1 \leqq k \leqq r+1$ ist. (36) gilt alsdann auch für $r+1 < k \leqq n$. Dabei ist nach (114) der absolute Betrag der Determinante der Koeffizienten gleich $\frac{n 2^r}{d_{r+1}} \mathsf{M} = \mathsf{N}$, ferner

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = n v,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} z_k = \frac{q}{2} v + \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} \log |\varepsilon_l^{(k)}| \, y_l;$$

wegen

$$P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l) = \prod_{k=1}^{q} |\varepsilon_l^{(k)}|$$

ist also

$$e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} z_k} = e^{\frac{q}{2} v} \prod_{l=1}^{r} (P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{y_l}.$$

Die Substitution (36) ergibt also, da das Integral (35) absolut konvergent ist,

$$; \mathfrak{R}, \chi) = \mathsf{N}(\pi c(\mathfrak{a}))^{\frac{q}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2} v} \prod_{l=1}^{r} (P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{y_l}$$

$$\times \sum_{\xi}{}' \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\pi c(\mathfrak{a}) e^{v} \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)}|^2 \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l^{(k)}|^2 y_l} dv dy_1 \dots dy_r,$$

$\sum'$ absolut konvergiert. Aus der Konvergenz des hieraus beim Er-

n von $\psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)$ durch $|\psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)|$ entstehenden $(r+1)$ fachen
rals (welche aus der Konvergenz des entsprechend aus der rechten
von (35) entstehenden Integrals folgt) ergibt sich wörtlich wie beim
ise des Satzes 154, daß erst das r fache Integral nach den y und
das Integral nach v genommen werden darf:

$$; \mathfrak{R}, \chi) = \mathsf{N}(\pi c(\mathfrak{a}))^{\frac{q}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2} v} dv \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^{r} (P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{y_l}$$

$$\times \sum_{\xi}{}' \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\pi c(\mathfrak{a}) e^{v} \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)}|^2 \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l^{(k)}|^2 y_l} dy_1 \dots dy_r.$$

Hierin ist das innere r fache Integral absolut konvergent und von
Gestalt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_r) dy_1 \dots dy_r = \sum_{a_1, \dots, a_r = -\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(a_1 + \eta_1, \dots, a_r + \eta_r) d\eta_1 \dots d\eta_r;$$

n ist

$$f(a_1 + \eta_1, \dots, a_r + \eta_r)$$

$$(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{a_l} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \sum_{\xi}{}' \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\pi c(\mathfrak{a}) e^{v} \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)} \prod_{l=1}^{r} (\varepsilon_l^{(k)})^{a_l}|^2 \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l^{(k)}|^2 \eta_l};$$

ede Zahl $\xi \neq 0$ im Ideal $\mathfrak{a}$ und jede Einheit H des Körpers ist

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi \mathsf{H}) = \chi\left(\frac{[\xi \mathsf{H}]}{\mathfrak{a}}\right) \chi[\eta(\xi \mathsf{H})] = \chi\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right) \operatorname{sign} P(\xi \mathsf{H})$$

$$= \chi\left(\frac{[\xi]}{\mathfrak{a}}\right) \chi[\eta(\xi)] \operatorname{sign} P(\mathsf{H}) = \psi(\mathfrak{a}, \xi) \operatorname{sign} P(\mathsf{H});$$

r ist

$$P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{a_l} \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)$$

$$= \prod_{l=1}^{r} (P(\varepsilon_l) \operatorname{sign} P(\varepsilon_l))^{a_l} \psi\left(\mathfrak{a}, \xi \prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\right) \operatorname{sign} P\left(\prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\right) P(\xi)$$

$$= \psi\left(\mathfrak{a}, \xi \prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\right) P\left(\xi \prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\right);$$

dies ist für jede dem Körper angehörige Einheitswurzel ϱ

$$= \psi\Big(\mathfrak{a}, \xi\varrho \prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\Big) P\Big(\xi\varrho \prod_{l=1}^{r} \varepsilon_l^{a_l}\Big),$$

da für jede Zahl $\xi \neq 0$ im Ideal $\mathfrak{a}$ nach (37) mit Rücksicht auf $|P(\varrho)| = 1$

$$\psi(\mathfrak{a}, \xi\varrho) P(\xi\varrho) = \psi(\mathfrak{a}, \xi) \operatorname{sign} P(\varrho) P(\xi) P(\varrho) = \psi(\mathfrak{a}, \xi) |P(\varrho)| P(\xi)$$
$$= \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi)$$

ist. Also ist die — wie ein Blick auf die rechte Seite der folgenden Gleichung lehrt — absolut konvergente Summe

$$\sum_{a_1, \ldots, a_r = -\infty}^{\infty} f(a_1 + \eta_1, \ldots, a_r + \eta_r)$$
$$= \frac{1}{w} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \sum_{\xi \neq 0} \psi(\mathfrak{a}, \xi) P(\xi) e^{-\pi c(\mathfrak{a}) e^{v} \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)}|^2 \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l^{(k)}|^{2\eta_l}}$$
$$= \frac{1}{w} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \Big(-\psi(\mathfrak{a}, 0) P(0) + \Theta\Big(e^{v} \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \mathfrak{a}, \chi\Big)\Big).$$

Dies kann wegen der gleichmäßigen Konvergenz über den η-Würfel gliedweise integriert werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \ldots, y_r)\, dy_1 \ldots dy_r$$
$$= \frac{1}{w} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \Big(-\psi(\mathfrak{a}, 0) P(0) + \Theta\Big(e^{v} \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \mathfrak{a}, \chi\Big)\Big) d\eta_1 \ldots d\eta_r$$

$$\Phi(s; \mathfrak{R}, \chi) = \frac{\mathrm{N}}{w} (\pi c(\mathfrak{a}))^{\frac{q}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2} v}\, dv$$

$$\asymp \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \Big(-\psi(\mathfrak{a}, 0) P(0) + \Theta\Big(e^{v} \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \mathfrak{a}, \chi\Big)\Big) d\eta_1 \ldots d\eta_r$$

Ich behaupte, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2} v} \Big(-\psi(\mathfrak{a}, 0) P(0) + \Theta\Big(e^{v} \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \mathfrak{a}, \chi\Big)\Big) dv \tag{38}$$

absolut konvergiert, und zwar im η-Würfel gleichmäßig, so daß es (desgl. $\int_0^{\infty}$, was später gebraucht wird) eine stetige Funktion der η ist und die Integration nach v mit der Integration nach den η vertauschbar ist. In der Tat ist parallel zum vorangehenden die Konvergenz von

$$\frac{+q}{2}v\,dv \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} \sum_{\xi \neq 0} |\psi(\mathfrak{a},\xi) P(\xi)|\, e^{-\pi c(\mathfrak{a}) e^v \sum_{k=1}^{n} |\xi^{(k)}|^2 \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l^{(k)}|^{2\eta_l}} d\eta_1 \ldots d\eta_r$$

ıtlich, woraus die Berechtigung jener Vertauschung nach dem Para-
a beim Beweise des Satzes 154 folgt.
Also ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(s;\mathfrak{R},\chi) &= \frac{\mathsf{N}}{w}(\pi c(\mathfrak{a}))^{\frac{q}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} d\eta_1 \ldots d\eta_r \\ &\asymp \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2}v} \left(-\psi(\mathfrak{a},0) P(0) + \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l};\mathfrak{a},\chi\right)\right) dv. \end{aligned}\right.$$

Hierin zerlege ich

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{0};$$

n $\frac{ns+q}{2} > \frac{n}{2} > 0$ ist (da $P(0)$ nur für $q=0$ von 0 verschieden,
ich 1 ist)

$$\int_{-\infty}^{0} = -\frac{2}{ns}\psi(\mathfrak{a},0)P(0) + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{ns+q}{2}v} \Theta\left(e^{-v} \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l};\mathfrak{a},\chi\right) dv,$$

nach Satz LV

$$\frac{2}{ns}\psi(\mathfrak{a},0)P(0) + W(\chi)(-i)^q (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{-2\eta_l}$$
$$\asymp \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{ns+q}{2}v + \frac{n}{2}v + qv} \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{-2\eta_l}; (\mathfrak{a}\mathfrak{f})', \bar{\chi}\right) dv.$$

en $\frac{n(1-s)}{2} < 0$ ist

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{ns}{2}v + \frac{n}{2}v} dv = \int_{0}^{\infty} e^{\frac{n(1-s)}{2}v} dv = -\frac{2}{n(1-s)};$$

$(\mathfrak{a}\mathfrak{f})' = \tilde{\mathfrak{a}}$ gesetzt und wieder beachtet, daß $P(0)$ nur für $q=0$
0 verschieden ist, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{0} = -\frac{2}{ns}\psi(\mathfrak{a},0)P(0) + W(\chi)(-i)^q (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{-2\eta_l}$$

$$\frac{}{-s)}\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0) + \int_{0}^{\infty} e^{\frac{n(1-s)+q}{2}v} \left(-\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0) + \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{-2\eta_l};\tilde{\mathfrak{a}},\bar{\chi}\right)\right) dv\Bigg)$$

$$\mathfrak{a},0)P(0) - \frac{2}{n(1-s)}\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0)W(\chi) + W(\chi)(-i)^q (g(\mathfrak{a}))^{-\frac{q}{2n}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{-2\eta_l}$$
$$\asymp \int_{0}^{\infty} e^{\frac{n(1-s)+q}{2}v} \left(-\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0) + \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{-2\eta_l};\tilde{\mathfrak{a}},\bar{\chi}\right)\right) dv.$$

Aus (40) folgt somit, wenn beim Integrieren des $\prod_{l=1}^{r} \cdot \int_{-\infty}^{0}$ die Variabeln η_l durch $-\eta_l$ ersetzt werden und

$$c(\mathfrak{a})\,(g(\mathfrak{a}))^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a})|N\mathfrak{f}\,|\Delta(\mathfrak{a})|^{2n-2}N\mathfrak{f}^{4n-2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})|^{2n-1}N\mathfrak{f}}} = c(\tilde{\mathfrak{a}})$$

beachtet wird.

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(s;\mathfrak{R},\chi) = -\frac{2\mathrm{N}}{nw}\left(\frac{\psi(\mathfrak{a},0)P(0)}{s} + W(\chi)\frac{\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0)}{1-s}\right)\\ &+\frac{\mathrm{N}}{w}(\pi c(\mathfrak{a}))^{\frac{q}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{r}|P(\varepsilon_l)|^{\eta_l}d\eta_1\ldots d\eta_r\\ &\quad\times\int_0^\infty e^{\frac{ns+q}{2}v}\left(-\psi(\mathfrak{a},0)P(0)+\Theta\left(e^v\prod_{l=1}^{r}|\varepsilon_l|^{2\eta_l};\mathfrak{a},\chi\right)\right)dv\\ &+\frac{\mathrm{N}}{w}(\pi c(\tilde{\mathfrak{a}}))^{\frac{q}{2}}W(\chi)(-i)^q\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{r}|P(\varepsilon_l)|^{\eta_l}d\eta_1\ldots d\eta_r\\ &\quad\times\int_0^\infty e^{\frac{n(1-s)+q}{2}v}\left(-\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0)P(0)+\Theta\left(e^v\prod_{l=1}^{r}|\varepsilon_l|^{2\eta_l};\tilde{\mathfrak{a}},\bar{\chi}\right)\right)dv. \end{aligned}\right.$$

Wegen der Konvergenz von (39) strebt bei festem $\sigma > 1$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{r}|P(\varepsilon_l)|^{\eta_l}d\eta_1\ldots d\eta_r\int_0^\infty e^{\frac{n\sigma+q}{2}v}\sum_{\xi\neq 0}|\psi(\mathfrak{a},\xi)P(\xi)|\,e^{-\pi c(\mathfrak{a})e^v\sum_{k=1}^{n}|\xi^{(k)}|^2\prod_{l=1}^{r}|\varepsilon_l^{(k)}|^2}$$

wo $\omega > 0$ ist, gegen einen Grenzwert, wenn ω unendlich wird. Daher strebt die ganze Funktion von s

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cdots\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\prod_{l=1}^{r}|P(\varepsilon_l)|^{\eta_l}d\eta_1\ldots d\eta_r\int_0^\infty e^{\frac{ns+q}{2}v}\left(-\psi(\mathfrak{a},0)P(0)+\Theta\left(e^v\prod_{l=1}^{r}|\varepsilon_l|^{2\eta_l};\mathfrak{a},\chi\right)\right)$$

für alle komplexen s gegen einen Grenzwert, wenn ω gegen ∞ strebt, und zwar gleichmäßig im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, und dieser Grenzwert ist in jenem Streifen absolut beschränkt. Der Ausdruck auf der zweiten und dritten Zeile von (41) ist also eine ganze, für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ absolut beschränkte Funktion von s. Aus Symmetriegründen (da dem Charakter $\bar{\chi}$ dasselbe $P(\xi)$ entspricht) gilt dasselbe von dem Ausdruck auf der vierten und fünften Zeile von (41).

Damit ist die Behauptung 2. und 4. bewiesen. Denn im Falle $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ ist $\psi(\mathfrak{a},0) = 0$, $\overline{\psi}(\tilde{\mathfrak{a}},0) = 0$, also $\Phi(s;\mathfrak{R},\chi)$ in $s=0$ und $s=1$ regulär, folglich ganz; im Falle $q > 0$ ist $P(0) = 0$, also $\Phi(s;\mathfrak{R},\chi$

hfalls ganz; im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, $q = 0$ ist $\psi(\mathfrak{a}, 0) P(0) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) \neq 0$, $, 0) P(0) = \chi(\tilde{\mathfrak{a}}) \neq 0$, und $W(\chi) \neq 0$, weil nach der Schlußbemer- beim Beweise des Satzes IL

$$1 = \bar{\chi}(\mathfrak{b}) C(\chi),$$

$C(\chi) \neq 0$ ist; daher ist $\Phi(s; \mathfrak{R}, \chi)$ überall regulär bis auf die Pole r Ordnung $s = 0$ und $s = 1$.

Aus (30) folgt also, daß $\zeta(s; \mathfrak{R}, \chi)$ im Falle $q > 0$ und im Falle 0, $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ ganz ist. Und daß es im Falle $q = 0$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ überall regu- st bis auf den Pol $s = 1$ mit dem Residuum

$$(A(\mathfrak{o}))^{-1} (\Gamma(\tfrac{1}{2}))^{-r_1} (\Gamma(1))^{-r_2} \frac{-2\,\mathsf{N}}{nw} W(\chi) \frac{\chi(\tilde{\mathfrak{a}})}{-1}$$

$$= 2^{r_2} \pi^{\frac{n}{2}} |\Delta|^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{r_1}{2}} \frac{2}{nw} \frac{n 2^r}{d_{r+1}} \mathsf{M} W(\chi) \chi(\tilde{\mathfrak{a}})$$

$$= \frac{2^n \pi^{r_2} \mathsf{M}}{w d_{r+1} \sqrt{|\Delta|}} C(\chi) \chi(\tilde{\mathfrak{a}}) = \lambda C(\chi) \chi(\tilde{\mathfrak{a}});$$

n

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{a})],$$

$$\chi(\mathfrak{a}) \chi(\mathfrak{a}') \chi(\mathfrak{b}) = 1$$

t (42) ist dies Residuum

$$= \lambda \chi(\mathfrak{b}) \chi(\tilde{\mathfrak{a}}) = \lambda \chi(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{a}') = \lambda \bar{\chi}(\mathfrak{a}),$$

it die Behauptung 1. bewiesen ist.

Nun die Funktionalgleichung! Aus

$$\tilde{\mathfrak{a}} \mathfrak{f} (\tilde{\mathfrak{a}} \mathfrak{f})' \mathfrak{b} = [\Delta(\tilde{\mathfrak{a}} \mathfrak{f})] = [\Delta(\tilde{\mathfrak{a}})] [N\mathfrak{f}^2] = [(\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f}))^{2n-1}] [N\mathfrak{f}^2]$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = [\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})]$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{a}}} = (\tilde{\mathfrak{a}} \mathfrak{f})' = \mathfrak{a} [(\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f}))^{2n-2}] [N\mathfrak{f}^2] = \mathfrak{a} \left[\frac{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{f})} N\mathfrak{f}^2\right]$$

$$= \mathfrak{a} \left[\frac{\Delta((\mathfrak{a}\mathfrak{f})')}{\Delta(\mathfrak{a})}\right] = \mathfrak{a} [g(\mathfrak{a})],$$

$$\psi(\tilde{\tilde{\mathfrak{a}}}, 0) = \begin{cases} 0 = \psi(\mathfrak{a}, 0) & \text{für } \mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}, \\ \bar{\chi}(\mathfrak{a}[g(\mathfrak{a})]) = \bar{\chi}(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a}, 0) & \text{für } \mathfrak{f} = \mathfrak{o} \end{cases}$$

$$c(\tilde{\tilde{\mathfrak{a}}}) = \frac{c(\mathfrak{a})}{(g(\mathfrak{a}))^q};$$

Satz LIV und (43) ist

$$\Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \tilde{\tilde{\mathfrak{a}}}, \chi\right) = (g(\mathfrak{a}))^q \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \mathfrak{a}, \chi\right).$$

Nach (41), (44), (45) und (46) ist also

$$(47)\quad \begin{cases} \Phi(1-s;\mathfrak{K},\bar{\chi}) = -\frac{2N}{nw}\left(\frac{\bar{\psi}(\tilde{a},0)P(0)}{1-s} + W(\bar{\chi})\frac{\psi(a,0)P(0)}{s}\right) \\ + \frac{N}{w}(\pi c(\tilde{a}))^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} d\eta_1 \ldots d\eta_r \\ \times \int_0^\infty e^{\frac{n(1-s)+q}{2}v}\left(-\bar{\psi}(\tilde{a},0)P(0) + \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; \tilde{a}, \bar{\chi}\right)\right) dv \\ + \frac{N}{w}(\pi c(a))^{\frac{q}{2}}(g(a))^{-q} W(\bar{\chi})(-i)^q \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{r} |P(\varepsilon_l)|^{\eta_l} d\eta_1 \ldots d\eta_r \\ \times \int_0^\infty e^{\frac{ns+q}{2}v}\left(-\psi(a,0)P(0) + (g(a))^q \Theta\left(e^v \prod_{l=1}^{r} |\varepsilon_l|^{2\eta_l}; a, \chi\right)\right) dv. \end{cases}$$

Ich habe nun zu verifizieren, daß die rechte Seite von (41) gleich $(-i)^q W(\chi)$ mal der rechten Seite von (47) ist. Hierfür ist offenbar nur

$$(48)\qquad W(\chi)W(\bar{\chi}) = (-1)^q$$

festzustellen.

Ich zeige zunächst

$$(49)\qquad W(\chi) \neq 0.$$

Wäre $W(\chi) = 0$, so wäre nach Satz LV identisch in den τ

$$\Theta(\tau;\ \mathfrak{v},\ \chi) = 0.$$

Weil für $s > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ns+q}{2}v} dv$$

divergiert, wäre wegen der Konvergenz von (38)

$$\psi(\mathfrak{v}, 0)P(0) = 0,$$

also nach (40) für alle $s > 1$, wenn $\mathfrak{E}$ die Hauptklasse bezeichnet,

$$\Phi(s;\ \mathfrak{E},\ \chi) = 0,$$

$$(50)\qquad \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } \mathfrak{C}} \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} = \zeta(s;\ \mathfrak{E},\ \chi) = 0.$$

In dieser absolut konvergenten Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m^s}$ ist aber $c_1 = 1$, weil $\mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{C}$ gehört, und aus der für $s > 2$ gültigen Abschätzung

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_m}{m^s}\right| \leqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|c_m|}{m^s} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|c_m|}{m^2} \frac{1}{m^{s-2}} \leqq \frac{1}{2^{s-2}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|c_m|}{m^2}$$

bei $s \to \infty$

$$\zeta(s;\ \mathfrak{E},\ \chi) \to 1.$$

ist also falsch und (49) bewiesen.

Es bezeichne nun ν eine Zahl wie im Satz IL, und zwar sei überdies
) und $\mathfrak{n}(\nu)$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd. (Ein solches ν gibt es, da $\mathfrak{n}_1$ nur in der
e von $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd gewählt zu werden braucht und alsdann in

$$[\alpha]\mathfrak{n}_1 = [\beta]\mathfrak{d}\mathfrak{f}$$

$\frac{\beta}{\alpha}\eta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\mathfrak{n} = \left[\eta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]\mathfrak{n}_1$ zu setzen ist.) Dann ist nach Satz IL die

$$\sum_{\beta} \chi(\beta) e^{2\pi i S(\beta\nu)} = \bar{\chi}(\mathfrak{n}) C(\chi);$$

$\mathfrak{n} - S(\beta\nu) = S(\beta(-\nu))$, $\mathfrak{n}(-\nu) = \mathfrak{n}(\nu)$, $\chi[\eta(-\nu)] = \operatorname{sign} P(-\nu)$
$-1)^q$ ist also $\bar{\chi}(\mathfrak{n})C(\chi)$ „konjugiert komplex" zu

$$\sum_{\beta} \bar{\chi}(\beta) e^{2\pi i S(\beta(-\nu))} = \chi(\mathfrak{n}[\eta(-\nu)])C(\bar{\chi}) = (-1)^q \chi(\mathfrak{n})C(\chi);$$

ist $C(\chi)$ „konjugiert komplex" zu $(-1)^q C(\bar{\chi})$, $W(\chi)$ zu $(-1)^q W(\bar{\chi})$.
Die zweimalige Anwendung von Satz LV ergibt

$$; \mathfrak{o}, \chi) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}} \frac{(-i)^q (g(\mathfrak{o}))^{-\frac{q}{2n}}}{\tau_1 \dots \tau_q} \Theta\left(\frac{1}{\tau};\ \tilde{\mathfrak{o}},\ \bar{\chi}\right)$$

$$\frac{W(\chi)}{\tau_1 \dots \tau_n} \frac{(-i)^q g(\mathfrak{o})^{-\frac{q}{2n}}}{\tau_1 \dots \tau_q} W(\bar{\chi}) \sqrt{\tau_1 \dots \tau_n}\, \tau_1 \dots \tau_q (-i)^q (g(\tilde{\mathfrak{o}}))^{-\frac{q}{2n}} \Theta(\tau;\ \tilde{\tilde{\mathfrak{o}}},\ \chi)$$

$$(\chi) W(\bar{\chi}) (-1)^q (g(\mathfrak{o}))^{-\frac{q}{2n}} (g(\tilde{\mathfrak{o}}))^{-\frac{q}{2n}} g(\mathfrak{o})^q \Theta(\tau;\ \mathfrak{o},\ \chi)$$

Satz LIV und (43)); weil $\Theta(\tau;\ \mathfrak{o},\ \chi)$ nach dem obigen nicht iden-
in den τ verschwindet, ist daher

$$1 = W(\chi) W(\bar{\chi}) (-1)^q \left((g(\mathfrak{o}))^{2n-1} (g(\tilde{\mathfrak{o}}))^{-1}\right)^{\frac{q}{2n}},$$

es ist

$$g(\tilde{\mathfrak{o}}) = \frac{\Delta(\tilde{\tilde{\mathfrak{o}}})}{\Delta(\tilde{\mathfrak{o}})} = \frac{\Delta(\mathfrak{o}[g(\mathfrak{o})])}{\Delta(\tilde{\mathfrak{o}})} = \frac{\Delta(\mathfrak{o})(g(\mathfrak{o}))^{2n}}{\Delta(\mathfrak{o}) g(\mathfrak{o})} = (g(\mathfrak{o}))^{2n-1},$$

$$1 = W(\chi) W(\bar{\chi}) (-1)^q,$$

$$W(\chi) W(\bar{\chi}) = (-1)^q.$$

Damit ist auch die Behauptung 3. bewiesen; (48) liefert, weil $W(\chi)$
$-1)^q W(\bar{\chi})$ konjugiert ist, noch

$$|W(\chi)| = 1.$$

Definition XVII: *Bei jedem (eigentlichen oder uneigentlichen)*
akter mod $\mathfrak{f}$ *werde die für* $\sigma > 1$ *durch*

$$\sum_{\mathfrak{b}}' \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s}$$

definierte analytische Funktion $= \zeta(s, \chi)$ *gesetzt.*

Satz LVIII: *Für* $\sigma > 1$ *ist*

$$\zeta(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}},$$

also

$$\zeta(s, \chi) \neq 0.$$

Beweis: Für $\sigma > 1$ ist

$$\prod_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = \prod_{N\mathfrak{p} \leqq x} \left(1 + \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} + \cdots + \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N\mathfrak{p}^{ms}} + \cdots\right) = \sum_{\mathfrak{b}}' \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s},$$

wo $\mathfrak{b}$ alle Ideale durchläuft, die durch kein Primideal mit Norm $>$ teilbar sind, usw. wie beim Satz 141.

Satz LIX: *Für* $\sigma > 1$ *ist*

$$\zeta(s, \chi) = e^{\sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N\mathfrak{p}^{ms}}}$$

Beweis: Folgt aus

$$\frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = e^{\sum_{m}' \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N\mathfrak{p}^{ms}}}.$$

Satz LX: *Für* $\sigma > 1$ *ist*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) = -\sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}.$$

Beweis: Folgt aus Satz LIX.

Satz LXI: χ *sei ein eigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$.

1. $\zeta(s, \chi)$ *ist für* $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ *ganz. Für* $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, *wenn* χ *nicht der Haup*
charakter ist, auch. Für $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ *und den Hauptcharakter ist* $\zeta(s, \chi)$ *übera*
regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ *mit dem Residuum h*
wo h die Klassenzahl im alten Sinne ist.

2. *Wird*

$$(52) \qquad (A(\mathfrak{f}))^s \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1 - q} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta(s, \chi) = \Phi(s, \chi)$$

gesetzt, wo q *die in Satz* LVI *vorkommende, durch* χ *bestimmte Za*
ist, so ist $\Phi(s, \chi)$ *im Falle* $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ *und bei jedem Nicht-Haup*
charakter auch im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ *ganz. Im Falle* $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ *ist* $\Phi(s, \chi)$ *be*
Hauptcharakter überall regulär bis auf Pole erster Ordnung in $s =$
und $s = 1$.

3. *Es besteht die Funktionalgleichung*

3) $$\Phi(s,\chi) = (-i)^q W(\chi)\,\Phi(1-s,\bar{\chi}).$$

4. *In jedem festen Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *ist für* $|t| \geqq 1$ *die Funktion* $\left|\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q} (\Gamma(s))^{r_2}\zeta(s,\chi)\Big|$ *beschränkt.*

5. $\zeta(s,\chi)$ *hat in der Halbebene* $\sigma < 0$ *als Nullstellen nur die Punkte* $1, -3, -5, \ldots$ *von der Ordnung* $q + r_2 \geqq 0$ *und die Punkte* $-2, 4, -6, \ldots$ *von der Ordnung* $r_1 - q + r_2 \geqq 0$.

Beweis: 1. Es ist

4) $$\zeta(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{R}} \zeta(s;\mathfrak{R},\chi).$$

(s,χ) ist also nach Satz LVII, 1. im Falle $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{o}$ ganz. Im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, > 0 (wobei sicher χ nicht der Hauptcharakter ist) ist ebenfalls $\zeta(s,\chi)$ ch (54) ganz. Im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, $q = 0$, χ Hauptcharakter, hat $\zeta(s,\chi)$ ch Satz LVII, 1. in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\sum_{\mathfrak{R}} \lambda\,\bar{\chi}(\mathfrak{a}) = h\lambda$$

d ist sonst regulär. Im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, $q = 0$, χ nicht Hauptcharakter, rd bewiesen sein, daß $\zeta(s,\chi)$ ganz ist, wenn

$$\sum_{\mathfrak{R}} \bar{\chi}(\mathfrak{a}) = 0$$

zeigt werden kann. Dies folgt aus der Fundamentaleigenschaft der ruppencharaktere, weil $\bar{\chi}(\mathfrak{a})$ zugleich Charakter der Gruppe der Klassen alten Sinne, aber nicht der Hauptcharakter ist (vgl. Fußnote [7]).

2. und 3. Es ist

5) $$\Phi(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{N}} \Phi(s;\mathfrak{R},\chi).$$

ach Satz LVII, 2. ist also $\Phi(s,\chi)$ mit etwaiger Ausnahme der Pole erster rdnung $s = 0$ und $s = 1$ überall regulär. Im Punkte $s = 1$ verhält sich er $\Phi(s,\chi)$ nach (52) wie $\zeta(s,\chi)$. Aus (31) folgt (53), weil $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit $\mathfrak{R}$ le Klassen durchläuft. Aus (53) folgt, daß $\Phi(s,\chi)$ in $s = 0$ einen Pol nn und nur dann hat, wenn $\Phi(s,\bar{\chi})$ in $s = 1$ einen hat, also nur im lle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, χ Hauptcharakter.

4. Folgt aus (52), (55) und Satz LVII, 4.

5. Nach (52) und Satz LVIII ist $\Phi(s,\chi)$ für $\sigma > 1$ von 0 verschieden, $(s,\bar{\chi})$ also auch. Nach (53) ist also $\Phi(s,\chi)$ für $\sigma < 0$ von 0 verhieden. Die Nullstellen von $\zeta(s,\chi)$ in der Halbebene $\sigma < 0$ sind also ach (52) die dort gelegenen Pole von $\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q} (\Gamma(s))^{r_2}$,

woraus die Behauptung 5. folgt; da $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ dort die Pole $-1, -3, \ldots$ hat, $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ die Pole $-2, -4, \ldots$ und $\Gamma(s)$ die Pole $-1, -2, -3, \ldots$.

Satz LXII: *Es sei χ ein uneigentlicher Charakter* mod $\mathfrak{f}$; *es sei* X *der nach Satz* XLIV *zugehörige eigentliche Charakter* mod $\mathfrak{f}_0$ *und* $\zeta_0(s, \mathsf{X})$ *die ihm entsprechende Zetafunktion. Dann ist für* $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \chi) = \zeta_0(s, \mathsf{X}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\mathsf{X}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right).$$

Beweis: Nach Satz LVIII ist für $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\mathsf{X}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\mathsf{X}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \zeta_0(s, \mathsf{X}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\mathsf{X}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

Satz LXIII: *χ sei ein beliebiger Charakter* mod $\mathfrak{f}$.

1. *$\zeta(s, \chi)$ ist ganz, wenn χ nicht der Hauptcharakter ist. Für den Hauptcharakter ist $\zeta(s, \chi)$ überall regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$.*

2. *Es ist*

$$(56)\quad \zeta(s, \chi) = \prod_{m=1}^{v} \left(1 - \frac{\varrho_m}{P_m^s}\right) A^{-s} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{-q} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-r_1+q} (\Gamma(s))^{-r_2} \Phi(s, \chi)$$

wo die Buchstaben folgende Bedeutung haben:

$v \geqq 0$ und ganz rational $\left(\prod_{m=1}^{0}$ *bedeutet* $1\right)$;

die ϱ_m Einheitswurzeln;

die $P_m > 1$ (übrigens Primzahlpotenzen);

$A > 0$;

q eine Zahl der Reihe $0, 1, \ldots, r_1$;

$\Phi(s, \chi)$ ist für eigentliches χ die durch (52) *erklärte Funktion; für uneigentliches χ ist $\Phi(s, \chi)$ das dem Charakter* X *mod $\mathfrak{f}_0$ entsprechende $\Phi_0(s, \mathsf{X})$. Also ist nach Satz* XLV *dies $\Phi(s, \chi)$ für jeden Nicht-Hauptcharakter ganz, für den Hauptcharakter regulär bis auf die Pole erster Ordnung $s = 0$ und $s = 1$. Ferner ist*

$$(57)\qquad \Phi(s, \chi) = \gamma(\chi)\, \Phi(1 - s, \bar{\chi});$$

hierin ist $\gamma(\chi)$ eine Konstante vom absoluten Betrage 1.

3. *Über die Nullstellen von $\zeta(s, \chi)$ in der Halbebene $\sigma < 0$ gilt dasselbe wie in Satz* LXI.

Beweis: χ sei uneigentlich, da sonst nichts Neues zu beweisen ist.

1. Folgt aus Satz XLV, LXI und LXII.

2. Das

$$\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

es Satzes LXII hat die Gestalt

$$\prod_{m=1}^{\nu}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right),$$

o ν gleich der Anzahl der $\mathfrak{p}$ ist, die $\mathfrak{f}$. aber nicht $\mathfrak{f}_0$ teilen, $P_m = N\mathfrak{p}$, $_m = \chi(\mathfrak{p})$. Und das $\zeta_0(s, \chi)$ des Satzes LXII hat nach (52) die Gestalt

$$(A(\mathfrak{f}_0))^{-s}\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{-q}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{q-r_1}(\Gamma(s))^{-r_2}\,\Phi_0(s,\chi);$$

aher braucht nach (51) und (53) nur $\gamma(\chi) = (-i)^q\, W(\chi)$ gesetzt zu werden; ist ja offenbar $\Phi(s, \bar{\chi}) = \Phi_0(s, \bar{\chi})$, also (57) gültig und $|\gamma(\chi)| = 1$.

3. Folgt aus Satz LXII, da $1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}$, im Falle $\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}_0$ identisch 1 ist nd sonst alle Wurzeln auf der Geraden $\sigma = 0$ hat.

Satz LXIV: *Für* $\sigma = 1$ *ist*

$$\zeta(s, \chi) \neq 0.$$

Beweis: 1. (Beweis für $s = 1$.) Für $\sigma > 1$ ist das über alle Charaktere erstreckte Produkt

$$L(s) = \prod_{\chi}\zeta(s,\chi) = \prod_{\chi}\sum_{\mathfrak{b}}{}'\frac{\chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} = \sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{\gamma_k}{k^s},$$

o die γ_k ganz sind (weil $\chi(\mathfrak{b})$ Null oder Einheitswurzel ist und die γ_k us je endlich vielen $\chi(\mathfrak{b})$ durch Addition und Multiplikation zusammenesetzt sind). Nach Satz LIX ist ebenda

$$L(s) = e^{\sum_{\chi}\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N\mathfrak{p}^{ms}}} = e^{\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{1}{m N\mathfrak{p}^{ms}}\sum_{\chi}\chi(\mathfrak{p}^m)} = e^{h(\mathfrak{f})\sum_{\mathfrak{p}^m\sim 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\frac{1}{m N\mathfrak{p}^{ms}}};$$

aher sind die γ_k rational und $\geqq 0$, also ganze rationale Zahlen $\geqq 0$. s sind unendlich viele $\gamma_k > 0$, da in

$$\sum_{\mathfrak{p}^m\sim 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\frac{1}{m N\mathfrak{p}^{ms}}$$

des zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{p}$ (man braucht nur eines) mit $m = h(\mathfrak{f})$ auftritt. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k$ divergiert also.

Wäre nun für mindestens ein χ

$$\zeta(1, \chi) = 0,$$

o wäre die Funktion $L(s)$ nach Satz LXIII ganz, also die Potenzreihe

$$L(s)=\sum_{b=0}^{\infty}\frac{L^{(b)}(2)}{b!}(s-2)^b=\sum_{b=0}^{\infty}\frac{(s-2)^b}{b!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k(-\log k)^b}{k^2}$$

im Punkte $s=0$ konvergent. Es konvergierte also

$$\sum_{b=0}^{\infty}\frac{(-2)^b}{b!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k(-\log k)^b}{k^2}=\sum_{b=0}^{\infty}\frac{2^b}{b!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k\log^b k}{k^2},$$

also, da alle Elemente rechts $\geqq 0$ sind, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k^2}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{2^b\log^b k}{b!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k^2}e^{2\log k}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k,$$

gegen das obige.

Daher ist — soweit $\zeta(s,\chi)$ überhaupt in $s=1$ regulär ist, d. h. für jeden Nicht-Hauptcharakter —

$$\zeta(1,\chi)\neq 0.$$

$L(s)$ hat also im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung, $\frac{L'}{L}(s)$ also einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum -1. Abgesehen von $s=1$ ist $L(s)$ in der ganzen Ebene regulär.

2. (Beweis für $s\neq 1$.) Aus

$$-\frac{L'}{L}(s)=\sum_{\mathfrak{p}^m\sim 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})}\frac{h(\mathfrak{f})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}$$

folgt, da rechts alle Koeffizienten $\geqq 0$ sind, wörtlich wie beim Beweise von Satz 183, für $s=1+ti$, $t\gtrless 0$, das Nichtverschwinden von $L(s)$, also aller $\zeta(s,\chi)$.

Satz LXV: *Es sei d die Anzahl der ϱ_m, die $=1$ sind. Es sei $d_0=1$ für den Hauptcharakter, sonst $d_0=0$. Dann hat $\zeta(s,\chi)$ im Punkte $s=0$ eine Nullstelle der Ordnung $d-d_0+r_1-q+r_2\geqq 0$.*

Beweis: $1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}$ verschwindet im Punkte $s=0$ dann und nur dann, wenn $\varrho_m=1$ ist, und alsdann von erster Ordnung; $\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{-q}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-r_1+}$ $(\Gamma(s))^{-r_2}$ verschwindet im Punkte 0 von der Ordnung $r_1-q+r_2\geqq 0$. $\Phi(s,\chi)$ hat dort für den Hauptcharakter einen Pol erster Ordnung und verschwindet für jeden anderen Charakter nicht; denn alsdann ist $\zeta(1,\bar{\chi})\neq$ nach Satz LXIV, also $\Phi(1,\bar{\chi})\neq 0$, folglich (nach (57)) $\Phi(0,\chi)\neq 0$. Aus (56) folgt also die Behauptung.

Satz LXVI: *Für jedes eigentliche χ ist*

$$\frac{\zeta(1-s,\bar{\chi})}{\zeta(s,\chi)}=\frac{\zeta(1-s;\breve{\mathfrak{R}},\bar{\chi})}{\zeta(s;\mathfrak{R},\chi)}$$

$$(58)\quad =\frac{1}{(-i)^q W(\chi)}\left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^n|\Delta|^{s-\frac{1}{2}}N\mathfrak{f}^{s-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-q+r_2}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{q+r_2}(\Gamma(s))^n$$

Beweis: Nach Satz LVII und LXI ist

$$\frac{\zeta(1-s,\bar{\chi})}{\zeta(s,\chi)} = \frac{\zeta(1-s;\mathfrak{R},\bar{\chi})}{\zeta(s;\mathfrak{R},\chi)}$$

$$= \frac{1}{(-i)^q W(\chi)} (A(\mathfrak{f}))^{2s-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}\right)^q \left(\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\right)^{r_1-q} \left(\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\right)^{r_2};$$

den Formeln für $\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}$ und $\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$ vom Beweise des Satzes 156 nmt noch

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{2^{1-s}}{\sqrt{\pi}} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(s),$$

raus sich die Behauptung nach jenem Paradigma ergibt.

Satz LXVII: *Wird der reziproke Wert der rechten Seite von* (58) *ich* $f(s,\chi)$ *gesetzt, so gilt hierfür* (133), *also* (134). *Hierbei hängen und* A_0 *außer von den alten Parametern noch von* $\mathfrak{f}$ *und* χ *ab.*

Beweis: Gegen den Beweis von Satz 166 ändert sich im Ergebnis hts, da $\cos\frac{\pi s}{2}$ und $\sin\frac{\pi s}{2}$ abgesehen vom Faktor i dieselbe Abschätzung ch (135), (136) erfahren und zusammen $r_1 - q + r_2 + q + r_2$ $r_1 + 2r_2$ Male auftreten.

Satz LXVIII: *Für jeden eigentlichen Charakter ist in jedem festen eifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ *gleichmäßig bei wachsendem* $|t|$

$$f(s,\chi) = (-1)^q C(\chi) N\mathfrak{f}^{-s} f(s) + O(e^{-s|t|}),$$

$f(s)$ *die Funktion aus Satz* 166 *ist und* $C(\chi)$ *die Bedeutung* (χ) $\sqrt{N\mathfrak{f}}$ *aus Satz* LV *hat.*

Beweis: Im Falle $q = 0$ ist

$$f(s,\chi) = W(\chi) N\mathfrak{f}^{\frac{1}{2}-s} f(s) = C(\chi) N\mathfrak{f}^{-s} f(s).$$

Falle $q > 0$ ist

$$f(s,\chi) = (-i)^q W(\chi) N\mathfrak{f}^{\frac{1}{2}-s} f(s) \left(\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{\sin\frac{\pi s}{2}}\right)^q,$$

l für den Streifen ist gleichmäßig bei wachsendem t

$$\frac{}{} = i\frac{e^{\frac{\pi s}{2}i} + e^{-\frac{\pi s}{2}i}}{e^{\frac{\pi s}{2}i} - e^{-\frac{\pi s}{2}i}} = -i\frac{1+e^{\pi s i}}{1-e^{\pi s i}} = -i\frac{1+e^{\pi\sigma i}e^{-\pi t}}{1-e^{\pi\sigma i}e^{-\pi t}} = -i(1+O(e^{-\pi t})),$$

$$\left(\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{\sin\frac{\pi s}{2}}\right)^q = (-i)^q(1+O(e^{-\pi t})) = (-i)^q + O(e^{-\pi t}),$$

also bei wachsendem $|t|$ wegen (134)

$$f(s,\chi) = (-1)^q W(\chi) N\mathfrak{f}^{\frac{1}{2}} N\mathfrak{f}^{-s} f(s) + O(e^{-s|t|}).$$

Definition XVIII: *Es sei* $\mu(\mathfrak{a}) = 0$ *für jedes* $\mathfrak{a}$, *das durch ein Primidealquadrat teilbar ist*; $\mu(\mathfrak{o}) = 1$; $\mu(\mathfrak{a}) = (-1)^m$ *für „quadratfreies"* $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$.

Satz LXIX:

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \\ 0 & \text{für } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}. \end{cases}$$

Beweis: Für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist die Behauptung trivial. Für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ist, wenn $\mathfrak{a}$ durch l verschiedene Primideale teilbar ist, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \dots \mathfrak{p}_l^{a_l}$,

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_l} \mu(\mathfrak{b}) = 1 - l + \binom{l}{2} - \dots + (-1)^l = (1-1)^l = 0.$$

Satz LXX: *Für* $\sigma \geqq \sigma_1$, *wo* $\sigma_1 < 0$ *ist, ist gleichmäßig*

$$\zeta(s,\chi) = O(t^{n(\frac{1}{2}-\sigma_1)}).$$

Beweis: 1. Es sei χ eigentlich. Für $\sigma \geqq 2$ ist

$$|\zeta(s,\chi)| \leqq \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^2} = \zeta(2);$$

es braucht also nur für den Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq 2$ die Behauptung bewiesen zu werden. Für $\sigma = \sigma_1$ ist

$$|\zeta(s,\chi)| = |\zeta(1-s;\bar{\chi})|\ |f(s,\chi)| \leqq \zeta(1-\sigma_1)|f(s,\chi)|,$$

also, da nach Satz LXVII ebenda

$$f(s,\chi) = O(t^{n(\frac{1}{2}-\sigma_1)})$$

ist,

$$\zeta(s,\chi) = O(t^{n(\frac{1}{2}-\sigma_1)}),$$

usw. wie beim Beweise des Satzes 169.

2. Es sei χ uneigentlich. Nach Satz LXII ist

$$\zeta(s,\chi) = \zeta_0(s,\mathrm{X}) \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})\mathrm{X}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s},$$

also für $\sigma \geqq \sigma_1$

$$|\zeta(s,\chi)| \leqq |\zeta_0(s,\mathrm{X})| \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} N\mathfrak{b}^{-\sigma_1} = O(t^{n(\frac{1}{2}-\sigma_1)}).$$

Satz LXXI: *Es bezeichne $N(T)$ für $T>0$ die Anzahl der Null-ellen von $\zeta(s,\chi)$ im Rechteck $0\leqq\sigma<1$, $0<t\leqq T$. Es bedeute $\mathfrak{f}_0$ r uneigentliches χ das Ideal aus Satz* XLII, *für eigentliches χ das deal $\mathfrak{f}$. Dann ist bei wachsendem T*

$$(T)=\frac{n}{2\pi}T\log T+\frac{\log|\Delta|-n-n\log 2\pi+\log N\mathfrak{f}_0+\sum_{m=1}^{v}\log P_m}{2\pi}T+O(\log T).$$

Beweis: Jeder der v Faktoren $1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}$ in (56) hat, $\varrho_m=e^{\varphi_m i}$ gesetzt, e Würzeln $\frac{\varphi_m+2k\pi}{\log P_m}i$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, deren Anzahl im Rechteck $\frac{\log P_m}{2\pi}T+O(1)$ ist. Es genügt also wegen

$$\zeta(s,\chi)=\prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right)\zeta_0(s,\mathrm{X}),$$

r einen eigentlichen Charakter mod $\mathfrak{f}$

$$N(T)=\frac{n}{2\pi}T\log T+\frac{\log|\Delta|-n-n\log 2\pi+\log N\mathfrak{f}}{2\pi}T+O(\log T)$$

erweisen.

Aus

3) $$\Phi(s,\chi)=(-i)^q W(\chi)\,\Phi(1-s,\bar{\chi})$$

lgt

$$\frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)=-\frac{\Phi'}{\Phi}(1-s,\bar{\chi}).$$

ach (41) ist $\Phi(s;\mathfrak{R},\chi)$ zu $\Phi(\bar{s};\mathfrak{R},\bar{\chi})$ „konjugiert komplex", da $W(\chi)$ $(-1)^q W(\bar{\chi})$, also $W(\chi)(-i)^q$ zu $W(\bar{\chi})(-i)^q$ „konjugiert komplex" . Demnach ist $\Phi(s,\chi)$ zu $\Phi(\bar{s},\bar{\chi})$, also $\frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)$ zu $\frac{\Phi'}{\Phi}(\bar{s},\bar{\chi})$ „konju-ert komplex".

Es genügt (vgl. Beweis des Satzes 171) die Behauptung für „wurzelfrei" achsendes T zu beweisen, und $N(T)$ ist für $T>0$ die Wurzelzahl von (s,χ) im Rechteck $1-a\leqq\sigma\leqq a$, $q_0\leqq t\leqq T$ bei der entsprechenden edeutung von a und q_0. Die Gleichung

$$2\pi N(T)=\Im\int\frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds$$

ansformiert sich hier folgendermaßen.

$$\Im\int_{1-a+q_0 i}^{a+q_0 i}\frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds=O(1),$$

$$\Im \int_{1-a+Ti}^{1-a+q_0 i} \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds = \int_{T}^{q_0} \Re \frac{\Phi'}{\Phi}(1-a+ti,\chi)\,dt = -\int_{T}^{q_0} \Re \frac{\Phi'}{\Phi}(a-ti,\bar{\chi})\,dt$$

$$= -\int_{T}^{q_0} \Re \frac{\Phi'}{\Phi}(a+ti,\chi)\,dt = \Im \int_{a+q_0 i}^{a+Ti} \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds,$$

$$\Im \int_{\frac{1}{2}+Ti}^{1-a+Ti} \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds = \int_{\frac{1}{2}}^{1-a} \Im \frac{\Phi'}{\Phi}(\sigma+Ti,\chi)\,d\sigma = -\int_{\frac{1}{2}}^{1-a} \Im \frac{\Phi'}{\Phi}(1-\sigma-Ti,\bar{\chi})\,d\sigma$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-a} \Im \frac{\Phi'}{\Phi}(1-\sigma+Ti,\chi)\,d\sigma = \int_{a}^{\frac{1}{2}} \Im \frac{\Phi'}{\Phi}(\sigma+Ti,\chi)\,d\sigma = \Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds.$$

Es genügt also (vgl. (147)),

$$\Im \int_{a+q_0 i}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi)\,ds = \frac{n}{2} T \log T + \frac{\log|\Delta| - n - n\log 2\pi + \log N\mathfrak{f}}{2} T + O(\log T)$$

nachzuweisen. Und dies geschieht fast wörtlich wie beim Beweise des Satzes 171, da in

$$\frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi) = \log A(\mathfrak{f}) + \frac{q}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + \frac{r_1-q}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)$$

die Abweichung in den Γ-Gliedern nichts beeinflußt, und da $A(\mathfrak{f}) = A\sqrt{N\mathfrak{f}}$ ist, wo A die Konstante des Buches bezeichnet. Natürlich ist hier

$$G(s) = \tfrac{1}{2}\big(\zeta(s+Ti,\chi) + \zeta(s-Ti,\bar{\chi})\big)$$

zu setzen.

Für später merken wir uns noch aus diesem Beweise, daß aus

$$\limsup_{T=\infty} \frac{\left|\Im \int_{a+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds\right|}{\log T} \leqq \gamma \tag{59}$$

für eigentliches χ und „wurzelfrei" wachsendes T die Relation

$$\limsup_{T=\infty} \frac{|N(T) - A_1 T\log T - A_2 T|}{\log T} \leqq \frac{\gamma}{\pi}$$

bei entsprechender Bedeutung von A_1 und A_2 folgt, und damit (bei veränderlichem A_2) auch für uneigentliches χ.

Satz LXXII: 1. *$\zeta(s,\chi)$ hat unendlich viele Wurzeln im Streifen $0 < \sigma < 1$.*

2. *Die über alle von 0 verschiedenen Wurzeln ϱ von $\zeta(s,\chi)$ im Streifen $0 \leqq \sigma < 1$ erstreckte Summe*

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{|\varrho|^{1+\delta}}$$

nvergiert für alle $\delta > 0$.

Beweis: 1. Die Anzahl der Wurzeln von $\prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right)$ auf $\sigma = 0$ it positiver Ordinate $\leqq T$ ist nur $O(T)$. Ferner hat $\zeta(s, \bar{\chi})$ nach tz LXIV keine Wurzel auf $\sigma = 1$; also ist dort $\Phi(s, \bar{\chi}) \neq 0$; also t $\Phi(s, \chi)$ nach (57) keine Wurzel auf $\sigma = 0$, so daß dort $\zeta(s, \chi)$ ogesehen etwa von $s = 0$ nur für die Wurzeln von $\prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right)$ erschwindet.

2. Die Wurzelzahl von $\zeta(s, \chi)$ im Rechteck $0 \leqq \sigma < 1$, $-T \leqq t < 0$ t gleich der Wurzelzahl von $\zeta(s, \bar{\chi})$ im Rechteck $0 \leqq \sigma < 1$, $0 < t \leqq T$, so auch $O\left(T^{1+\frac{\delta}{2}}\right)$, usw. wie beim Beweise des Satzes 172.

Satz LXXIII: *Bei gegebenem* $\delta > 0$ *ist für alle hinreichend großen* $|s|$

$$|\Phi(s, \chi)| < e^{|s|^{1+\delta}}.$$

Beweis: Vgl. den Beweis von Satz 173. Nach (57) braucht die ehauptung nur für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ gezeigt zu werden, also, wegen Satz LXI, 4. und er Definition $\Phi(s, \chi) = \Phi_0(s, \mathrm{X})$ bei uneigentlichem χ, nur für $\sigma \geqq 2$. egen

$$\left|\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right| \leqq 1 + e^{\left|\frac{s+1}{2}\right| \log \left|\frac{s+1}{2}\right|}$$

r $\sigma \geqq 2$ folgt alles wie dort.

Satz LXXIV: *Es ist, wenn* d_0 *und* d *die Bedeutung aus Satz* LXV *ben,*

$$(s-1)^{d_0}\zeta(s, \chi) = \frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{q}} \frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q}} \frac{1}{(\Gamma(s))^{r_2}} a e^{bs} s^{d-d_0} \prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

o in beliebiger Anordnung ϱ *die Wurzeln von* $\zeta(s, \chi)$ *durchläuft, welche icht* $\leqq 0$ *sind.*

Beweis: Nach Satz LXXIII ist, wenn

$$\left|1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right| \leqq 1 + \frac{1}{P_m^{\sigma}} \leqq 1 + P_m^{|s|}$$

edacht wird, für alle hinreichend großen $|s|$

$$\left| s^{d_0}(s-1)^{d_0} s^{-d} \zeta(s, \chi)\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{q}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q}\left(\Gamma(s)\right)^{r_2}\right|$$

$$= \left| s^{d_0}(s-1)^{d_0} s^{-d} \prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right) A^{-s}\Phi(s, \chi)\right| < e^{|s|^{1+\delta}},$$

also nach dem Satz auf S. 501—502 des Handbuchs über die Weierstraßsche Produktzerlegung und Satz LXXII, 1.

$$s^{d_0}(s-1)^{d_0}s^{-d}\zeta(s,\chi)\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{q}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q}\left(\Gamma(s)\right)^{r_2}=ae^{bs}\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)$$

Satz LXXV:
$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)=b-\frac{d_0}{s-1}+\frac{d-d_0}{s}-\frac{q}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$
$$-\frac{r_1-q}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)-r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

Beweis: Folgt aus Satz LXXIV.

Satz LXXVI: *Wie Satz* 180, *wo die* α *absolute positive Konstanten,* λ *vom Körper,* $\mathfrak{f}$ *und* χ *abhängige positive Konstanten sind.*

Beweis: Nach Satz 164 ist für $s=2+Ti$, $T\geqq 2$

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right)\right|<\alpha'\log T,$$

also — wie bei Satz 180 — nach Satz LXXV

$$\left|\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\right|<\lambda_0+n\alpha_5\log T$$

usw.

Satz LXXVII: *Wie Satz* 181.

Beweis: Desgleichen, da nach Satz 164 für $-1\leqq\sigma\leqq 2$, $T\geqq 2$

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+4}{2}\right)\right|<\alpha''\log T$$

ist.

Satz LXXVIII:

$$\limsup_{T=\infty}\frac{\left|N(T)-\frac{n}{2\pi}T\log T-\frac{T}{2\pi}\left\{\log|\Delta|-n-n\log 2\pi+\log N\mathfrak{f}_0+\sum_{m=1}^{v}\log P_m\right\}\right|}{\log T}\leqq n$$

Beweis: Nach der im Beweise von Satz LXXI gemachten Bemerkung braucht nur bei eigentlichem Charakter (59) mit $\gamma=\pi n\alpha_{13}$ gezeigt zu werden, was genau wie beim Satz 182 geschieht.

Satz LXXIX: *Wie Satz* 184.

Beweis: Es werde $\chi(\mathfrak{n})=e^{\omega(\mathfrak{n})i}$ für $(\mathfrak{n},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ gesetzt, wo die eindeutige Festlegung des reellen $\omega(\mathfrak{n})$ unnötig ist. Dann ist, wenn Σ' bezeichnet, daß die in $\mathfrak{f}$ aufgehenden $\mathfrak{p}$ fehlen, nach Satz LX für $\sigma>1$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{p},m}{}'\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}=\sum_{\mathfrak{p},m}{}'\frac{e^{\omega(\mathfrak{p}^m)i}\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}};$$

$1 < \sigma < 2$, $t \geqq 2$ ist daher nach Satz LXXV und Satz 164

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+ti,\chi) = \sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}\cos(\omega(\mathfrak{p}^m)-mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m\sigma}}$$

$$< \lambda_{15} + n\alpha_{20}\log t - \sum_{\varrho}\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}. \tag{0}$$

Aus (60) folgt zunächst

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+ti,\chi) < \lambda_{15} + n\alpha_{20}\log t. \tag{1}$$

Nun sei $\beta_0+\gamma_0 i$ eine Nullstelle mit $\gamma_0 \geqq 2$. Dann gibt (60) für $< \sigma < 2$

$$\sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}\cos(\omega(\mathfrak{p}^m)-m\gamma_0\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m\sigma}} < \lambda_{15} + n\alpha_{20}\log\gamma_0 - \frac{1}{\sigma-\beta_0};$$

ner, wenn (61) auf $t = 2\gamma_0$ und den Charakter χ^2 statt χ angewandt wird,

$$\sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}\cos(2\omega(\mathfrak{p}^m)-2m\gamma_0\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m\sigma}} < \lambda_{16} + n\alpha_{20}\log\gamma_0.$$

dlich ist für $1 < \sigma < 2$

$$\sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{m\sigma}} < \lambda_{17} + \frac{1}{\sigma-1},$$

o wegen (168), auf $\varphi = \omega(\mathfrak{p}^m) - m\gamma_0\log N\mathfrak{p}$ angewandt,

$$0 < 4\lambda_{15} + 4n\alpha_{20}\log\gamma_0 - \frac{4}{\sigma-\beta_0} + \lambda_{16} + n\alpha_{20}\log\gamma_0 + 3\lambda_{17} + \frac{3}{\sigma-1},$$

w. wie beim Beweise des Satzes 184.

Satz LXXX: *Wie Satz* 186.

Beweis: Desgleichen.

Satz LXXXI: *Wie Satz* 188, *aber für*

$$K(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}}\frac{\chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s};$$

und k hängen vom Körper, $\mathfrak{f}$ *und* χ *ab. Einziger Unterschied:* $s = 1$ *für jeden Nicht-Hauptcharakter regulär, für den Hauptcharakter Pol ter Ordnung mit dem Residuum* 1.

Beweis: Wie dort, wegen des Verhaltens von $\zeta(s,\chi)$ im Punkte $s = 1$. s Verhalten von $\zeta(s,\chi)$ in der unteren Halbebene ergibt sich aus dem n $\zeta(s,\bar{\chi})$ in der oberen Halbebene.

§ 4.

Primideale in Idealklassen.

Satz LXXXII:

$$P(x,\chi)=\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}\log\frac{x}{N\mathfrak{p}}=d_0x+O\left(xe^{-\frac{a_{24}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right).$$

Beweis: Wie bei Satz 189.

Satz LXXXIII: $\vartheta(x,\chi)=\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}=d_0x+O\left(xe^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$

Beweis: Wie Satz 190 wegen

$$\left|\sum_{x<N\mathfrak{p}\leqq x+\delta x}\chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}\log\frac{x+\delta x}{N\mathfrak{p}}\right|\leqq\sum_{x<N\mathfrak{p}\leqq x+\delta x}\log N\mathfrak{p}\log\frac{x+\delta x}{N\mathfrak{p}}.$$

Satz LXXXIV: $\pi(x,\chi)=\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\chi(\mathfrak{p})=d_0\int_2^x\frac{du}{\log u}+O\left(xe^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)$

Beweis: Wie bei Satz 191.

Satz LXXXV: *Die Anzahl* $\pi(x;\mathfrak{H})$ *der Primideale einer Klasse* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *mit Norm* $\leqq x$ *genügt der Relation*

$$\pi(x;\mathfrak{H})=\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\int_2^x\frac{du}{\log u}+O\left(xe^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right),$$

ist also für zwei Klassen asymptotisch gleich.

Beweis: Ist $\mathfrak{l}$ ein Ideal der zu $\mathfrak{H}$ inversen Klasse mod $\mathfrak{f}$, so ist

$$\sum_\chi\chi(\mathfrak{l})\pi(x,\chi)=\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\sum_\chi\chi(\mathfrak{p}\mathfrak{l})=h(\mathfrak{f})\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqq x\\ \mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{H}}}1=h(\mathfrak{f})\pi(x;\mathfrak{H});$$

die linke Seite ist aber nach Satz LXXXIV gleich

$$\int_2^x\frac{du}{\log u}\sum_\chi d_0(\chi)\chi(\mathfrak{l})+O\left(xe^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right)=\int_2^x\frac{du}{\log u}+O\left(xe^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right).$$

Satz LXXXVI: *Wie Satz* 194; μ_1 *darf vom Körper,* $\mathfrak{f}$ *und* χ *ab hängen.*

Beweis: Folgt für eigentliches χ aus Satz LXVI so wie Satz 19 aus Satz 156; alsdann für uneigentliches χ aus Satz LXII wegen der fü $\sigma\leqq-1$ gültigen Abschätzung

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}}\frac{\mathrm{X}(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s-\mathrm{X}(\mathfrak{p})}\right|\leqq\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{1-N\mathfrak{p}^{-1}}.$$

Satz LXXXVII: *Wie Satz* 196, *hier, wenn*

$$G(k) = \sum_{N\mathfrak{p}^m = k} \chi(\mathfrak{p}^m) \log N\mathfrak{p}$$

esetzt wird, bei $\zeta(s, \chi)$ *und*

$$\Psi(x, \chi) = \begin{cases} \sum_{k<x} G(k) & \text{für nicht ganze } x > 0, \\ \lim_{\delta=0} \frac{\Psi(x-\delta, \chi) + \Psi(x+\delta, \chi)}{2} & \text{für ganze } x > 0. \end{cases}$$

Beweis: Wie dort.

Satz LXXXVIII: *Für* $x > 1$ *ist*

$$\Psi(x, \chi) = d_0 x - (r_0 \log x + a_0) - \left(\frac{r_1}{2} - q\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{n}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho},$$

o r_0 *die Ordnung der etwaigen Nullstelle* $s = 0$ *von* $\zeta(s, \chi)$ *bezeichnet, nd die Anordnung der* ϱ *die gleiche ist wie in Satz* 197.

Beweis: $T > 0$ sei so beschaffen, daß kein ϱ die Ordinate T oder $-T$ hat, usw. wie beim Beweise des Satzes 197. Die auf die negativen ullstellen erstreckte Residuensumme ist

$$\left(\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + \cdots\right) + (r_1 - q)\left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-4}}{-4} + \cdots\right) + r_2\left(\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{q}{2}\left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) + \frac{r_1 - q}{2}\left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$+ r_2 \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{r_1}{2} - q\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{n}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Satz LXXXIX: *Wie Satz* 198.

Beweis: 1. Für $x > 1$ ist die Konvergenz von

2) $$\sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

rch Satz LXXXVIII bewiesen.

2. Für $x = 1$ wird die Konvergenz von (62) so bewiesen. Ist $\varrho = \beta + \gamma i$ ne Nullstelle, so ist für $|\gamma| \geqq 2$ wegen $0 \leqq \beta < 1$

$$\left|\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\gamma i}\right| = \left|\frac{1}{\beta + \gamma i} - \frac{1}{\gamma i}\right| = \left|\frac{-\beta}{(\beta + \gamma i)\gamma i}\right| < \frac{1}{|\varrho|\,|\gamma|} < \frac{1}{|\varrho|\,(|\varrho| - 1)} \leqq \frac{2}{|\varrho|^2},$$

o wegen der Konvergenz von $\sum_{\varrho} \frac{1}{|\varrho|^2}$ nur die Konvergenz von

3) $$\sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{1}{\gamma}$$

rzutun, wo nach wachsenden $|\gamma|$ geordnet ist.

Werden die positiven γ so numeriert:

$$0 < \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots,$$

so ist, wenn $N(\gamma_0)$ Null bedeutet, für $T \geqq \gamma_2$

$$\sum_{0<\gamma\leqq T} \frac{1}{\gamma} = \sum_{n=1}^{N(T)} \frac{N(\gamma_n) - N(\gamma_{n-1})}{\gamma_n} = \sum_{n=1}^{N(T)-1} N(\gamma_n)\left(\frac{1}{\gamma_n} - \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right) + \frac{N(\gamma_{N(T)})}{\gamma_{N(T)}}$$

$$= \int_{\gamma_1}^{\gamma_{N(T)}} \frac{N(u)}{u^2}\,du + \frac{N(\gamma_{N(T)})}{\gamma_{N(T)}},$$

also, wegen

$$N(u) = A_1 u \log u + A_2 u + O(\log u), \tag{64}$$

$$\sum_{0<\gamma\leqq T} \frac{1}{\gamma} = A_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma_{N(T)}} \frac{\log u}{u}\,du + A_2 \int_{\gamma_1}^{\gamma_{N(T)}} \frac{du}{u} + A_3 + o(1) + A_1 \log \gamma_{N(T)} + A_2 + o(1)$$

$$= \frac{A_1}{2} \log^2 \gamma_{N(T)} + (A_2 + A_1) \log \gamma_{N(T)} + A_4 + o(1).$$

Nun ist nach (64) von einer Stelle an

$$N(T - \sqrt{T}) = A_1 (T - \sqrt{T}) \log (T - \sqrt{T}) + A_2 (T - \sqrt{T}) + O(\log T)$$

$$= A_1 T \log T + A_2 T - A_1 \sqrt{T} \log T + o(\sqrt{T} \log T) < N(T),$$

also

$$T - \sqrt{T} < \gamma_{N(T)} \leqq T,$$

$$\gamma_{N(T)} = T\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\right),$$

$$\log \gamma_{N(T)} = \log T + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) = \log T \left(1 + o\left(\frac{1}{\log^2 T}\right)\right),$$

$$\sum_{0<\gamma\leqq T} \frac{1}{\gamma} = \frac{A_1}{2} \log^2 T + (A_2 + A_1) \log T + A_4 + o(1),$$

wo A_1 und A_2 nach Satz LXXI für χ und $\bar{\chi}$ dieselben sind. Da die Wurzeln von $\zeta(s, \chi)$ in der unteren Halbebene zu denen von $\zeta(s, \bar{\chi})$ in der oberen Halbebene „konjugiert komplex" sind, ist also

$$-\sum_{-T\leqq\gamma<0} \frac{1}{\gamma} = \frac{A_1}{2} \log^2 T + (A_2 + A_1) \log T + A_5 + o(1),$$

$$\sum_{0<|\gamma|\leqq T} \frac{1}{\gamma} = A_4 - A_5 + o(1) = A_6 + o(1),$$

so daß (63) konvergiert.

3. Es sei $0 < x < 1$. Nach 1., wenn es auf $\zeta_0(s, \overline{X})$ angewandt rd, konvergiert die über alle Wurzeln τ von $\zeta_0(s, \overline{X})$ mit $\Re\tau \geqq 0$, h. $\Re\tau > 0$ erstreckte Summe

$$\sum_{\tau} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\tau}}{\tau} = \sum_{\tau} \frac{x^{-\tau}}{\tau};$$

o konvergiert

$$\sum_{\tau} \frac{x^{1-\tau}}{\tau}.$$

o, wegen

5) $$\frac{x^{1-\tau}}{\tau} = -\frac{x^{1-\tau}}{1-\tau} + \frac{x^{1-\tau}}{\tau(1-\tau)},$$

r Konvergenz von

6) $$\sum_{\tau} \frac{1}{|\tau(1-\tau)|}$$

d $|x^{1-\tau}| < 1$, die Reihe

$$\sum_{\tau} \frac{x^{1-\tau}}{1-\tau},$$

o, da $1-\tau$ alle Wurzeln ϱ von $\zeta(s, \chi)$ mit positivem reellen Teil rchläuft, gleichfalls nach absolut steigender Ordinate geordnet, die Reihe

$$\sum_{\varrho}' \frac{x^{\varrho}}{\varrho},$$

in Σ' nur die ϱ mit $\beta > 0$ vorkommen.

Ist χ eigentlich, oder χ uneigentlich und $v = 0$, d. h. $\zeta(s, \chi) = \zeta_0(s, X)$, ist damit die Konvergenz von (62) bewiesen.

Ist χ uneigentlich und $v > 0$, so konvergiert nach 1., wenn es auf $s, \chi)$ und $\zeta_0(s, X)$ angewandt wird, die auf die $\varrho = \gamma i$ erstreckte (nach chsenden $|\gamma|$ geordnete) Summe

$$\sum_{\varrho}'' \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\varrho}}{\varrho} = \sum_{\gamma}'' \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma i}}{\gamma i},$$

die Summe mit „konjugiert komplexen“ Gliedern

$$\sum_{\gamma}'' \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-\gamma i}}{-\gamma i} = \sum_{\gamma}'' \frac{x^{\gamma i}}{-\gamma i},$$

[8])

$$\sum_{\varrho}'' \frac{x^{\varrho}}{\varrho};$$

[8]) Alles hier und in der Folge über diese Reihe Gesagte ließe sich natürlich

daher konvergiert

$$R(x) = \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}. \tag{67}$$

Satz XC: *Wie Satz* 199; *nur sind die Ausnahmepunkte* 1, k *mit* $G(k) \neq 0$ *und diejenigen* $\frac{1}{k}$, *wo* $k\,G(k) - (k-1)\,G_0(k) \neq 0$ *ist; hierbei bezeichnet* $G_0(k)$ *die auf den Charakter* $\chi \bmod \mathfrak{f}_0$ *bezügliche G-Funktion, also* $\sum_{N\mathfrak{p}^m = k} \chi(\mathfrak{p}^m) \log N\mathfrak{p}$.

Beweis: 1. a) und b) wie dort.

c) α) Es sei χ eigentlich oder χ uneigentlich und $v = 0$; dann ist jedes $\beta > 0$. Aus der Konvergenz von (66) folgt die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau} \frac{x^{1-\tau}}{\tau(1-\tau)}$$

für $0 < x \leqq 1$; daher ist nach (65) wegen $\varrho = 1 - \tau$

$$\sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + x \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\tau}}{\tau} \tag{68}$$

für $0 < x < 1$ stetig und hat für $x = 1$ einen endlichen Limes von links. Aus den Ergebnissen von a) und b) bei $\zeta(s, \bar{\chi}) = \zeta_0(s, \bar{\chi})$ folgt also für $\frac{1}{k}$, $G(k) \neq 0$ beiderseitige Unstetigkeit von $R(x)$, für 1 Unstetigkeit von $R(x)$ nach links.

β) Es sei χ uneigentlich und $v > 0$. Wie eben schließt man für

$$\sum_{\varrho}{}' \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + x \sum_{\tau} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\tau}}{\tau}$$

das soeben über (68) Gesagte. Aus Satz LXXXVIII folgt, wenn $G(k) \neq 0$ ist, für die „Sprünge" bei k, wenn δ zu 0 abnimmt,

$$\lim_{\delta=0} R(k+\delta) - R(k) = -\tfrac{1}{2} G(k),$$

$$R(k) - \lim_{\delta=0} R(k-\delta) = -\tfrac{1}{2} G(k),$$

ferner

$$\lim_{\delta=0} R(1+\delta) = +\infty;$$

---

wegen der äquidistanten Verteilung der Wurzeln eines $1 - \frac{\varrho_m}{P_m^s}$ auch direkt beweisen; es kommt im wesentlichen auf die bekannte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ky}{k}$ hinaus.

rd dies auf $\zeta_0(s, \overline{\mathrm{X}})$ angewandt, so folgt,

$$\sum_{\mathfrak{r}}' \frac{x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} = R_1(x)$$

setzt, wenn $\bar{G}_0(k) \neq 0$ ist,

$$\lim_{\delta=0} R_1(k+\delta) - R_1(k) = R_1(k) - \lim_{\delta=0} R_1(k-\delta) = -\tfrac{1}{2}\bar{G}_0(k),$$

$$\lim_{\delta=0} R_1(1+\delta) = +\infty.$$

An der Stelle $x = \frac{1}{k}$, $k > 1$, sind also bei

$$\sum_{\mathfrak{p}}' \frac{x^{\varrho}}{\varrho}$$

e „Sprünge" $\frac{1}{2k}\bar{G}_0(k)$ (d. h. eben 0 für $\bar{G}_0(k) = 0$). An der Stelle $x = 1$ der „Sprung nach links" $-\infty$.

Andererseits folgt aus Satz LXXXVIII, auf $\zeta(s, \bar{\chi})$ und $\zeta_0(s, \overline{\mathrm{X}})$ angewandt, bei passender Wahl zweier Konstanten r_0' und a_0'

$$\Omega(x) = \sum_{\varrho}'' \frac{x^{-\varrho}}{-\varrho} = \begin{cases} r_0' \log x + a_0' - \sum_{k<x} \bar{G}(k) + \sum_{k<x} \bar{G}_0(k) & \text{für nicht ganzes } x > 1, \\ \lim_{\delta=0} \frac{\Omega(x-\delta)+\Omega(x+\delta)}{2} & \text{für ganzes } x > 1, \end{cases}$$

so

$$\lim_{\delta=0} \Omega(k+\delta) - \Omega(k) = \Omega(k) - \lim_{\delta=0} \Omega(k-\delta) = \frac{-\bar{G}(k)+\bar{G}_0(k)}{2},$$

$$\lim_{\delta=0} \Omega(1+\delta) = a_0'.$$

ür $0 < x < 1$ ist nun

$$\sum_{\varrho}'' \frac{x^{\varrho}}{\varrho} = \sum_{\varrho}'' \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-\varrho}}{\varrho} = -\Omega\left(\frac{1}{x}\right);$$

der Stelle $\frac{1}{k}$, $k > 1$, ist also bei $R(x)$ der beiderseitige Sprung $\frac{1}{2k}\bar{G}_0(k)$ $\frac{\bar{G}(k)-\bar{G}_0(k)}{2} = \frac{k\bar{G}(k)-(k-1)\bar{G}_0(k)}{2k}$; an der Stelle 1 hat $R(x)$ keinen mes von links. Ist also $kG(k) - (k-1)G_0(k) \neq 0$, so ist $R(x)$ bei $\frac{1}{k}$ iderseits unstetig; in 1 ist $R(x)$ nach links unstetig. Für jedes einen ausnahmepunkt" enthaltende Intervall ist also die Reihe (67) ungleichäßig konvergent.

2. a) wie dort.

b) Es sei $0 < x_0 < x_1 < 1$ und das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ von den snahmepunkten frei. Nach der Beweismethode der Sätze 197 und 199 all 2. a)) wird die gleichmäßige Konvergenz von $R(x)$ für $x_0 \leqq x \leqq x_1$

bewiesen sein, falls für jedes ganze $k_0 > 1$ mit $k_0 G(k_0) - (k_0 - 1) G_0(k_0) = 0$ und jedes ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ in den Intervallen $k_0 - \vartheta < x < k_0$ und $k_0 < x < k_0 + \vartheta$ gleichmäßig

$$x \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) \, ds - (x-1) \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta_0'}{\zeta_0}(s, \overline{\chi}) ds \to 2\pi i \left(- x \Psi(x, \bar{\chi}) + (x-1) \Psi_0(x, \right.\right.$$

festgestellt wird. Wegen

$$- x \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) + (x-1) \frac{\zeta_0'}{\zeta_0}(s, \overline{\chi}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \overline{G}(k) - (x-1) \overline{G}_0(k)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x + b_k}{k^s},$$

wo $a_{k_0} k_0 + b_{k_0} = 0$ ist, ist daher nur (für $0 < |x - k_0| < \vartheta$) gleichmäßig

$$\int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x + b_k}{k^s} ds \to 2\pi i \sum_{k<x} (a_k x + b_k)$$

zu beweisen. Die Summe rechts ist aber

$$2\pi i \sum_{k \leqq k_0 - 1} (a_k x + b_k) \quad \text{für} \quad k_0 - \vartheta < x < k_0,$$

$$2\pi i \sum_{k \leqq k_0} (a_k x + b_k) \quad \text{für} \quad k_0 < x < k_0 + \vartheta.$$

Nach dem Paradigma auf Seite 120 des Buches ist die einzige Schwierigkeit, für $k_0 - \vartheta < x < k_0$ gleichmäßig

$$(69) \qquad (a_{k_0} x + b_{k_0}) \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{k^s} \to 0$$

und für $k_0 < x < k_0 + \vartheta$ gleichmäßig

$$(70) \qquad (a_{k_0} x + b_{k_0}) \left(\int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{k_0^s} - 2\pi i \right) \to 0$$

zu zeigen, und das folgt wegen $b_{k_0} = - a_{k_0} k_0$ daraus, daß die linke Seite von (69) und (70) absolut

$$\leqq |a_{k_0}| \, |x - k_0| \, \frac{2}{T} \, \frac{\left(\frac{x}{k_0}\right)^2}{\left| \log \frac{x}{k_0} \right|}$$

und $\dfrac{|x - k_0|}{\left| \log \frac{x}{k_0} \right|}$ für $0 < |x - k_0| < \vartheta$ beschränkt ist.

§ 5.

Ideale in Idealklassen.

Satz XCI—XCIV: *Wie Satz* 205—208, *wo jetzt* $f(s, \chi)$ *an Stelle* n $f(s)$ *tritt.*

Beweis: Wie dort. Nur ist zu beachten, daß $s = 1$ jetzt Pol er Ordnung $r_1 - q + r_2$, d. h. für $q = r_1$, $r_2 = 0$ regulär ist, was nichts usmacht; das Residuum $R_1(w)$ von $f(s, \chi)\frac{w^{s+n}}{s(s+1)\dots(s+n)}$ ist eben $^{n+1}\left(A_{r_1-q+r_2-1}\log^{r_1-q+r_2-1}w + \dots + A_0\right)$ bzw. 0. Und daß $s = 0$ nicht otwendig Nullstelle von $f(s, \chi)$, sondern im Falle $q = r_1$, $r_2 = 0$ regulär, ber keine Nullstelle ist, so daß der Integrand beim Beweise des Satzes XCII i diesem Falle das Residuum $R_2(w) = f(0, \chi)\frac{w^n}{n!}$ besitzt. $R_1(w) + R_2(w)$ $= R(w)$ ist eben die Summe der etwaigen Residuen in $s = 1$ und $s = 0$. ur Vermeidung des Poles $s = 0$ ist beim Beweise des Satzes 207 im alle $-\frac{1}{2} + \frac{k-\frac{1}{2}}{n} = 0$ $\left(\text{d. h. } k = \frac{n+1}{2}\right)$ der linke Rand des Rechtecks urch einen kleinen Halbkreis mit festem Radius δ nach links auszuuchten, dessen Beitrag in das O-Glied hineingeht; denn die Wegnge ist fest, $\left|\frac{f(s, \chi)}{s\dots(s+n-k)}\right|$ dort beschränkt, und für $w \geqq 1$ ist $w^{s+n-k}| \leqq w^{-\frac{1}{2}+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}+n-k} = w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+n-k\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. Die jetzt erforderliche elation

$$\int_{\delta}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-n\pi i\left(\log t - A - \frac{1}{n}\log w\right)} dt = O(1)$$

olgt natürlich aus der dortigen über $\int_0^{\infty}$ wegen $\left|\int_0^{\delta}\right| \leqq 2\sqrt{\delta}$. Jedenfalls t (bei eventueller Ausbuchtung des Weges)

$$\int_{-\frac{1}{2}+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}+\infty i} f(s, \chi)\frac{w^{s+n-k}}{s\dots(s+n-k)} ds = O\left(w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+n-k\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right),$$

nd das Integral links ist im Falle $-\frac{1}{2} + \frac{k-\frac{1}{2}}{n} \leqq 0$ gleich

$$L^{(k)}(w) - 2\pi i R^{(k)}(w) = K^{(k)}(w),$$

n Falle $-\frac{1}{2} + \frac{k-\frac{1}{2}}{n} > 0$ gleich

$$L^{(k)}(w) - 2\pi i R_1^{(k)}(w) = K^{(k)}(w) + 2\pi i R_2^{(k)}(w) = K^{(k)}(w) + O(w^{n-k})$$

$$= K^{(k)}(w) + O\left(w^{-\frac{1}{2}+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}+n-k}\right) = K^{(k)}(w) + O\left(w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+n-k\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right),$$

so daß jedenfalls (214) herauskommt.

Satz XCV: *Es werde für jeden Charakter*

$$H(x, \chi) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \chi(\mathfrak{a}).$$

gesetzt; es bedeute $g(\chi)$ *für den Hauptcharakter die Zahl* $h\lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)$ $= h\lambda \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}}$, *sonst die Zahl* 0. *Dann ist*

$$H(x, \chi) = g(\chi)x + O\left(x^{1-\frac{1}{n+1}}\right).$$

Beweis: 1. Es sei $n = 1$. Ich stelle die $\mathfrak{a}$ durch $[a]$, $a > 0$ und ganz rational, dar, $\mathfrak{f}$ durch $[f]$, $f > 0$ und ganz rational. Durchläuft a irgendein vollständiges Restsystem zu f teilerfremder positiver Zahlen, so repräsentiert $[a]$ die Klassen mod $\mathfrak{f}$; daher ist für jeden Nicht-Hauptcharakter und $m = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\sum_{a=mf+1}^{(m+1)f} \chi[a] = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{[x]} \chi[a] = O(1) = g(\chi)x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right);$$

für den Hauptcharakter ist

$$\sum_{a=mf+1}^{(m+1)f} \chi[a] = f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$\sum_{a=1}^{[x]} \chi[a] = \sum_{a=1}^{\left[\frac{x}{f}\right]f} \chi[a] + O(1) = \left[\frac{x}{f}\right] f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(1)$$

$$= x \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(1) = g(\chi)x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

2. Es sei $n > 1$.

a) χ sei eigentlich. Der Beweis verläuft bis zum Analogon von (223) wie der Beweis von (219) bei Satz 210. Denn für $\sigma < 0$ ist

$$\zeta(s, \chi) = f(s, \chi)\zeta(1 - s, \chi) = f(s, \chi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m} m^s,$$

$|e_m| \leqq F(m)$ ist. Das Analogon zu h_0 in (223) ist das etwaige Re-
uum von $\zeta(s, \chi)$ in $s = 1$, ist also $h\lambda$ im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ nebst Haupt-
rakter, sonst 0.

So gelangt man zunächst bis zu

$$\Delta_z \Omega(x) = \int_x^{x+z} dy_1 \dots \int_{y_{n-1}}^{y_{n-1}+z} H(y_n, \chi)\, dy_n = g(\chi) x z^n + O(z^{n+1}).$$

In diesem Integral ist aber, wenn Satz 210 beachtet wird,

$$|H(y_n, \chi) - H(x, \chi)| = \Big|\sum_{x < N\mathfrak{a} \leqq y_n} \chi(\mathfrak{a})\Big| \leqq \sum_{x < N\mathfrak{a} \leqq x+nz} 1$$

$$H(x+nz) - H(x) = h\lambda(x+nz) + O\left((x+nz)^{1-\frac{2}{n+1}}\right) - h\lambda x - O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right)$$

$$h\lambda nz + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right) = O(z);$$

her ist

$$\Delta_z \Omega(x) = z^n H(x, \chi) + O(z^{n+1})$$

o

$$H(x, \chi) = g(\chi) x + O(z) = g(\chi) x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

b) χ sei uneigentlich. Dann ist in

$$\zeta(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} \zeta_0(s, \chi)$$

eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}_0$, und zwar, falls χ Hauptcharakter ist,
uptcharakter mod $\mathfrak{o}$, sonst Nicht-Hauptcharakter mod $\mathfrak{f}_0$. Ent-
echend ist

$$H(x, \chi) = \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{f}} \mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b}) H_0\left(\frac{x}{N\mathfrak{b}}, \chi\right) = g(\chi)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right),$$

für den Hauptcharakter χ

$$g(\chi) = h\lambda \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}} = h\lambda \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}},$$

ist

$$g(\chi) = 0$$

Satz XCVI: *Die Anzahl $H(x; \mathfrak{H})$ der Ideale einer Klasse $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ t Norm $\leqq x$ genügt der Relation*

$$H(x; \mathfrak{H}) = \frac{h}{h(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Beweis: Repräsentiert $\mathfrak{l}$ die zu $\mathfrak{H}$ inverse Klasse mod $\mathfrak{f}$, so ist

$$H(x;\mathfrak{H}) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{a}\mathfrak{l}) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{l}) \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \chi(\mathfrak{a}) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{l}) H(x,\chi)$$

also nach Satz XCV

$$H(x;\mathfrak{H}) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{l}) g(\chi) x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right) = \frac{h}{h(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right)$$

Satz XCVII: *Die zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden Ideale jeder Klasse des Körpers zerfallen in gleich viele, also in je* $\frac{h(\mathfrak{f})}{h}$ *Klassen* mod $\mathfrak{f}$.

Beweis: Es mögen die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale der Hauptklasse in die j Klassen $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_j$ (mod $\mathfrak{f}$) zerfallen. ($\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_j$ ist eine Untergruppe der Gruppe der Klassen mod $\mathfrak{f}$, da das Produkt von zwei Hauptidealen ein Hauptideal ist.) Ist $\mathfrak{H}_0$ eine beliebige Klasse mod $\mathfrak{f}$, die nicht aus Hauptidealen besteht, so sind

$$\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_j$$

verschiedene Klassen mod $\mathfrak{f}$, die alle zur selben Klasse $\mathfrak{K}$ gehören; und ist $\mathfrak{H}'$ irgendeine Klasse mod $\mathfrak{f}$, die mit $\mathfrak{H}_0$ zur selben Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, so ist die durch $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_0\mathfrak{H}''$ bestimmte Klasse $\mathfrak{H}''$ mod $\mathfrak{f}$ aus Hauptidealen gebildet, also ein $\mathfrak{H}_m$, $1 \leqq m \leqq j$. Zu jeder Klasse $\mathfrak{K}$ gehören also genau j Klassen mod $\mathfrak{f}$. (Hinter dem Ganzen steckt natürlich die Zerlegung einer Gruppe nach einem Teiler, wobei die entstehenden Komplexe gleich viele Elemente besitzen.)

Satz XCVIII: *Die Anzahl* $\pi(x;\mathfrak{K})$ *der Primideale einer Klasse* $\mathfrak{K}$ *genügt der Relation*

$$\pi(x;\mathfrak{K}) = \frac{1}{h} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\frac{a_{25}}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}}\right).$$

Beweis: Ich setze $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$. Durchläuft $\mathfrak{H}$ die $\frac{h(\mathfrak{f})}{h}$ in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Klassen mod $\mathfrak{o}$, so folgt aus

$$\pi(x;\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{H}} \pi(x;\mathfrak{H})$$

und Satz LXXXV die Behauptung.

Satz IC: *Die über alle Ideale einer Klasse* $\mathfrak{K}$ *erstreckte Summe*

$$H(x;\mathfrak{K},\chi) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqq x \\ \mathfrak{a} \text{ in } \mathfrak{K}}} \chi(\mathfrak{a})$$

ist, falls $\chi(\mathfrak{a})$ *für alle zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremden Hauptideale* 1 *ist,*

$$\chi(\mathfrak{K})\lambda\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right),$$

$\chi(\mathfrak{K})$ *der nach dem Beweise des Satzes* XCVII *gemeinsame Wert von* $\chi(\mathfrak{H})$ *für alle in* $\mathfrak{K}$ *enthaltenen Klassen* $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ *ist; sonst ist*

$$H(x;\mathfrak{K},\chi)=O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Beweis: Durchläuft $\mathfrak{H}$ die $\frac{h(\mathfrak{f})}{h}$ in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Klassen mod $\mathfrak{f}$, so nach Satz XCVI

$$x;\mathfrak{K},\chi)=\sum_{\mathfrak{H}}\chi(\mathfrak{H})H(x;\mathfrak{H})=x\frac{h}{h(\mathfrak{f})}\lambda\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)\sum_{\mathfrak{H}}\chi(\mathfrak{H})+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

$\chi(\mathfrak{a})$ für alle zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Hauptideale $=1$, so ist

$$\sum_{\mathfrak{H}}\chi(\mathfrak{H})=\chi(\mathfrak{K})\frac{h(\mathfrak{f})}{h};$$

derenfalls ist $\chi(\mathfrak{H}_1),\ldots,\chi(\mathfrak{H}_j)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener arakter der Gruppe $\mathfrak{H}_1,\ldots,\mathfrak{H}_j$, also

$$\sum_{m=1}^{j}\chi(\mathfrak{H}_m)=0,$$

glich, wenn über die $j=\frac{h(\mathfrak{f})}{h}$ Klassen $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_m$ in $\mathfrak{K}$ summiert wird,

$$\sum_{\mathfrak{H}}\chi(\mathfrak{H})=\chi(\mathfrak{H}_0)\sum_{m=1}^{j}\chi(\mathfrak{H}_m)=0.$$

Satz C: *Es sei für jeden Charakter* $a(\chi)$ *eine komplexe Konstante;*

$$Z_1(s)=\sum_{\chi}a(\chi)\zeta(s,\chi)$$

schwinde nicht identisch, so daß

$$R(x)=\sum_{\chi}a(\chi)H(x,\chi)$$

ht identisch in x *verschwindet. Dann gilt für kein* $\vartheta<\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ *die lation*

$$R(x)=a(\chi_0)h\lambda\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)x+O(x^{\vartheta}),$$

χ_0 *der Hauptcharakter ist.*

Vorbemerkung: Nach Satz XCV ist

$$R(x)=a(\chi_0)h\lambda\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Beweis: 1. Es sei $n=1$. Da $R(x)$ nicht identisch 0 ist, verschwindet $R(k)-R(k-1)=\sum_{\chi} a(\chi)\chi(k)$ nicht für alle positiven ganzen rationalen k; wegen der Periodizität ist diese Summe also unendlich oft $\neq 0$, und da sie nur endlich viele Werte hat, ist der absolute Betrag dieser Sprünge von $R(x)$ größer als eine gewisse positive Zahl. Daher kann $R(x)-cx$ nicht gegen 0 streben, was $\vartheta<0$ ausschließt.

2. Es sei $n>1$. Für jeden Charakter ist (die eigentlichen mit $\mathfrak{f}_0=\mathfrak{f}$, $\mathsf{X}=\chi$, $\zeta_0=\zeta$, $v=0$ einbegriffen)

$$\zeta(s,\chi)=\zeta_0(s,\mathsf{X})\prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}\right),$$

$$\zeta(1-s,\bar{\chi})=\zeta_0(1-s,\bar{\mathsf{X}})\prod_{m=1}^{v}\left(1-\frac{\bar{\varrho}_m}{P_m^{1-s}}\right),$$

$$\zeta_0(s,\mathsf{X})=f(s,\mathsf{X})\,\zeta_0(1-s,\bar{\mathsf{X}}),$$

also

$$\zeta(s,\chi)\prod_{m=1}^{v}\frac{1-\frac{\bar{\varrho}_m}{P_m^{1-s}}}{1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}}=f(s,\mathsf{X})\,\zeta(1-s,\bar{\chi}).$$

Für $\sigma>0$ ist nun, weil $\prod_{m=1}^{v}P_m=\frac{\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}}N\mathfrak{p}}{\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}_0}N\mathfrak{p}}$ in $\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}}N\mathfrak{p}$, also in $N\mathfrak{f}$ aufgeht, bei absoluter Konvergenz der Reihen

$$\prod_{m=1}^{v}\frac{1-\frac{\bar{\varrho}_m}{P_m^{1-s}}}{1-\frac{\varrho_m}{P_m^s}}=\left(\prod_{m=1}^{v}P_m\right)^s\prod_{m=1}^{v}\left(\left(-\frac{\bar{\varrho}_m}{P_m}+\frac{1}{P_m^s}\right)\left(1+\frac{\varrho_m}{P_m^s}+\frac{\varrho_m^2}{P_m^{2s}}+\ldots\right)\right)$$

$$=\left(\prod_{m=1}^{v}P_m\right)^s\left(a_1(\chi)+\frac{a_2(\chi)}{2^s}+\ldots\right)=N\mathfrak{f}^s\left(b_1(\chi)+\frac{b_2(\chi)}{2^s}+\ldots\right);$$

also ist für $\sigma>1$

$$f(s,\mathsf{X})\,\zeta(1-s,\bar{\chi})=N\mathfrak{f}^s\sum_{a}\frac{\chi(a)}{Na^s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(\chi)}{k^s}=N\mathfrak{f}^s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(\chi)}{k^s},$$

wo die Reihe rechts absolut konvergiert.

Andererseits ist nach Satz LXVIII für $\sigma=2$

$$f(s,\mathsf{X})=(-1)^q C(\mathsf{X})N\mathfrak{f}_0^{-s}f(s)+O(e^{-3|t|})=b(\chi)N\mathfrak{f}_0^{-s}f(s)+O(e^{-3|t|}),$$

o

$$N\mathfrak{f}^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(\chi)}{k^s} = b(\chi) N\mathfrak{f}_0^{-s} f(s)\zeta(1-s,\bar{\chi}) + O(e^{-2|t|}),$$

glich wegen $b(\chi) = (-1)^q C(\mathfrak{X}) + 0$

$$f(s)\zeta(1-s,\bar{\chi}) = d(\chi) N(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0)^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(\chi)}{k^s} + O(e^{-2|t|})$$

$$= N\mathfrak{f}^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\chi)}{k^s} + O(e^{-2|t|})$$

i absoluter Konvergenz der Reihe; diese Reihe ist auf Grund ihrer Entehung für $\sigma > 1$ absolut konvergent, also regulär. Auf der Geraden $= 2$ ist auch $f(s)\zeta(1-s,\bar{\chi})$, also die als $O(e^{-2|t|})$ abgeschätzte Funktion gulär, da $f(s)$ im Punkte $s = 2$ einen Pol der Ordnung r_2, $\zeta(1-s,\bar{\chi})$ ne Nullstelle der Ordnung $q + r_2$ hat.

Nun ist

$$Z_1(s) = \sum_{\chi} a(\chi)\zeta(s,\chi) = \sum_{\chi} a(\bar{\chi})\zeta(s,\bar{\chi}),$$

so, wenn

$$Z(s) = f(s) Z_1(1-s)$$

setzt wird, für $\sigma > 1$

1) $$Z(s) = \sum_{\chi} a(\bar{\chi}) f(s)\zeta(1-s,\bar{\chi})$$

2) $$= N\mathfrak{f}^{2s} \sum_{\chi} a(\bar{\chi}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\chi)}{k^s} + \psi(s) = N\mathfrak{f}^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k}{k^s} + \psi(s),$$

$\psi(s)$ für $\sigma = 2$ regulär und $O(e^{-2|t|})$ ist.

Hierin verschwinden nicht alle j_k. Denn sonst wäre für $\sigma = 2$

$$Z(s) = O(e^{-2|t|}),$$

so nach (133) für $\sigma = -1$ bei wachsendem t

$$Z_1(s) = O(e^{-t}) = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

ür $\sigma = 3$ ist

$$Z_1(s) = O(1).$$

ür $-1 \leqq \sigma \leqq 3$ ist nach Satz LXX gleichmäßig

$$Z_1(s) = O(e^t).$$

ür die Funktion

$$g(s) = e^{\frac{s-3}{4}\log s - \frac{\pi}{8}si},$$

$\log s$ in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschlitzten Ebene regulär und für > 0 reell ist, ist im Streifen $-1 \leqq \sigma \leqq 3$ gleichmäßig

$$(s)| = \left|e^{\left(\frac{\sigma-3}{4}+\frac{t}{4}i\right)\left(\log t + \frac{\pi}{2}i + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) + O(1) + \frac{\pi}{8}t}\right| = e^{\frac{\sigma-3}{4}\log t + O(1)} = t^{\frac{\sigma-3}{4}} e^{O(1)}.$$

Die Funktion

$$\frac{Z_1(s)}{g(s)} = G(s)$$

genügte also für $-1 \leqq \sigma \leqq 3$ den Bedingungen von Satz 168. Daher wäre für $-1 \leqq \sigma \leqq 3$ gleichmäßig

$$G(s) = O(1),$$

$$Z_1(s) = O\left(t^{\frac{\sigma-3}{4}}\right),$$

insbesondere also für $\sigma = 2$

$$Z_1(s) = o(1). \tag{73}$$

Das ist aber nicht wahr; denn es ist

$$Z_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k^s},$$

wo nicht alle e_k verschwinden; ist z. B. $e_{k_0} \neq 0$, so wäre wegen (73)

$$\int_2^{2+Ti} k_0^s Z_1(s)\,ds = o(T),$$

während

$$\int_2^{2+Ti} k_0^s Z_1(s)\,ds = \int_2^{2+Ti} \left(e_{k_0} + \sum_{k \gtrdot k_0}^{\infty} \frac{e_k}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^s}\right) ds$$

$$= e_{k_0} Ti + \left(-\sum_{k \gtrdot k_0}^{\infty} \frac{e_k}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^{2+Ti} \log \frac{k}{k_0}} + \sum_{k \gtrdot k_0}^{\infty} \frac{e_k}{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \log \frac{k}{k_0}}\right) = e_{k_0} Ti + O(1)$$

ist, da

$$\sum_{k \gtrdot k_0}^{\infty} \frac{|e_k|}{k^2 \left|\log \frac{k}{k_0}\right|}$$

konvergiert.

Aus (72) folgt für $x > 0$

$$\left\{\begin{aligned} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+n}}{s \dots (s+n)} Z(s)\,ds &= \frac{1}{Nf^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} j_k k^n \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{Nf^2 x}{k}\right)^{s+n}}{s \dots (s+n)} ds \\ &\quad + \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+n}}{s \dots (s+n)} \psi(s)\,ds. \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Hierin ist das zweite Integral rechts beliebig oft nach x differentiierbar, da wegen $\psi(s) = O(e^{-2|t|})$ für jedes $l \geqq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2+n-l}}{|s \dots (s+n)|} |(s+n) \dots (s+n-l+1)|\,|\psi(s)|\,dt$$

vergiert. Das erste Glied rechts in (74) ist, $N\mathfrak{f}^2 x = y$ gesetzt,

$$= \frac{1}{N\mathfrak{f}^{2n}} 2\pi i\, \Omega(y),$$

$\Omega(y)$ durch (220) mit $Q(y) = \sum_{k=1}^{[y]} j_k$ erklärt ist. Weil

$$\Omega^{(n-1)}(y) = \int_0^y Q(z)\,dz$$

ist $\Omega(y)$ nicht $n$mal für alle $y > 0$ nach y differentiierbar. Daher ist

$$\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+n}}{s\ldots(s+n)} Z(s)\,ds$$

ıt $n$mal für alle $x > 0$ nach x differentiierbar.

Nun ist für $-\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

$$Z(s) = O\left(|t|^{\frac{3}{4}n}\right).$$

ın für $\sigma = -\frac{1}{4}$ gilt (75) nach (71) und (134); für $\sigma = 2$ ist nach (72) sogar

$$Z(s) = O(1);$$

$-\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq 2$ ist nach (71), (134) und Satz LXX gleichmäßig

$$Z(s) = O(e^{|t|});$$

er ist nach Satz 168 für $-\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

$$\frac{Z(s)}{s^{\frac{3}{4}n}} = O(1),$$

(75) richtig.

Es kann daher der Integrationsweg $\sigma = 2$ wie beim Beweise des zes 210 auf $\sigma = -\frac{1}{4}$ verschoben werden. Es war für $\sigma > 1$

$$Z_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k^s}$$

etzt, so daß für $\sigma < 0$

$$Z(s) = f(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k} k^s$$

Dann ergibt sich, wenn $K(w)$ die alte Funktion aus Satz 207 ist, daß

$$g(x) = \int_{-\frac{1}{4}-\infty i}^{-\frac{1}{4}+\infty i} \frac{x^{s+n}}{s\ldots(s+n)} f(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k} k^s\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k^{n+1}} K(kx)$$

ıt $n$mal für alle $x > 0$ differentiierbar ist.

Wäre nun für ein $\vartheta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

$$R(x) = \sum_{k=1}^{[x]} e_k = a(\chi_0) h \lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O(x^\vartheta),$$

so wäre nach den Schlüssen beim Beweise von Satz 211 hiergegen ein Widerspruch vorhanden.

Satz CI: *Die Funktion* $H(x; \mathfrak{H})$ *des Satzes* XCVI *genügt für kein* $\vartheta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ *der Relation*

$$H(x; \mathfrak{H}) = \frac{h}{h(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O(x^\vartheta).$$

Beweis: Aus der Formel

$$H(x; \mathfrak{H}) = \sum_{\chi} \frac{\chi(\mathfrak{l})}{h(\mathfrak{f})} H(x, \chi) = \sum_{\chi} a(\chi) H(x, \chi)$$

beim Beweise des Satzes XCVI ergibt sich die Behauptung nach Satz C.

Satz CII: *Ist* b *irgendeine positive ganze rationale Zahl* $\leqq h(\mathfrak{f})$, *und sind* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_b$ *verschiedene Klassen* mod $\mathfrak{f}$, *so ist für kein* $\vartheta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

$$\sum_{q=1}^{b} H(x; \mathfrak{H}_q) = b \frac{h}{h(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O(x^\vartheta).$$

Beweis: $\sum_{q=1}^{b} H(x; \mathfrak{H}_q) = \sum_{q=1}^{b} \sum_{\chi} \frac{\chi(\mathfrak{l}_q)}{h(\mathfrak{f})} H(x, \chi) = \sum_{\chi} a(\chi) H(x, \chi)$

und Satz C.

§ 6.

Nochmals Primideale in Idealklassen.

Satz CIII: *Für* $T > 0$, $0 < y < 2$ *ist*

$$\left| \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{y^s}{s} ds \right| < 10\pi.$$

Beweis: 1. Für $0 < y \leqq 1$ ergibt die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf die Strecke $2 - Ti$ bis $2 + Ti$ und den über ihr als Sehne nach rechts beschriebenen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0, also den Radius $R = \sqrt{4 + T^2}$,

$$\left| \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{y^s}{s} ds \right| < \pi R \frac{y^2}{R} = \pi y^2 \leqq \pi.$$

2. Für $2 > y > 1$ ergibt die Betrachtung des komplementären Kreisgens nach links

$$\left| \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i \right| < 2\pi R \frac{y^2}{R} = 2\pi y^2 < 8\pi,$$

$$\left| \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{y^s}{s} ds \right| < 10\pi.$$

Satz CIV: *Es ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1, \\ 1 - \frac{1}{y} & \text{für } y \geqq 1. \end{cases}$$

Beweis: Siehe die auch für $n = 1$ gültige Begründung bei Satz 209.

Satz CV: *Es sei $\varphi(t)$ für $t \geqq 2$ definiert, reell, stetig und beständig nehmend. Es sei $\varphi(2) < 1$ und $\varphi(t) \to 0$ bei $t \to \infty$. Es sei $H(s)$ r $t \geqq 2$, $\varphi(t) \leqq \sigma \leqq 1$ regulär (Gebiet $\mathfrak{G}$). Auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ sei $(s)|$ beschränkt:*

$$|H(s)| \leqq c.$$

Innern sei bei wachsendem t gleichmäßig

$$H(s) = O(e^{at^2}).$$

nn ist auch im Innern

$$|H(s)| \leqq c.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Ich setze

$$g(s) = e^{-i\varepsilon s^2} H(s).$$

nn ist für alle Punkte von $\mathfrak{G}$

$$|g(s)| = |e^{-i\varepsilon(\sigma^2+3\sigma^2 ti-3\sigma t^2-t^3 i)}||H(s)| = e^{\varepsilon(3\sigma^2 t-t^3)}|H(s)|$$

$$\leqq e^{\varepsilon(3t-t^3)}|H(s)| \leqq |H(s)|.$$

o ist auf dem Rande

$$|g(s)| \leqq c,$$

en gleichmäßig

$$g(s) = O(e^{\varepsilon(3t-t^3)+at^2}) \to 0,$$

o (vgl. den entsprechenden Schluß beim Beweise des Satzes 168) innen

$$e^{\varepsilon(3\sigma^2 t-t^3)}|H(s)| = |g(s)| \leqq c,$$

$$|H(s)| \leqq c.$$

Satz CVI: *Es sei eine reelle Funktion $\omega(u)$ für $u \geqq u_0$, wo $u_0 > 1$ definiert; es sei dort $\omega(u) \geqq 0$ und von $u = u_0$ bis $u = U$ für jedes $> u_0$ eigentlich integrabel. Es sei*

(76) $$\int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-s}\, du$$

für $s > \alpha$ konvergent, also für $\sigma > \alpha + \delta$ gleichmäßig konvergent, also für $\sigma > \alpha$ regulär. Die in dieser Halbebene durch das Integral dargestellte Funktion $G(s)$ sei für $\alpha \geqq s > \beta$ regulär. Dann konvergiert das Integral für $s > \beta$, so daß $G(s)$ für $\sigma > \beta$ regulär ist.

Beweis: Es sei γ die untere Grenze der reellen s, für die (76) konvergiert. Wäre die Behauptung falsch, so wäre $\beta < \gamma \leqq \alpha$. Die in der Umgebung von $s = \gamma + 1$ gebildete Potenzreihe

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{(k)}(\gamma+1)}{k!}(s-\gamma-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-\gamma-1)^k(-1)^k}{k!} \int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-\gamma-1} \log^k u$$

würde, da $s = \gamma$ regulär ist, für ein $s = \gamma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ konvergieren. Ist

$$\sum_{k=0} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k!} \int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-\gamma-1} \log^k u\, du$$

sind aber alle Elemente $\geqq 0$; also konvergierte das durch Vertauschung von Summation und Integration entstehende Integral

$$\int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k!} \log^k u\, du = \int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-\gamma-1} e^{(1+\varepsilon)\log u}\, du$$

$$= \int_{u_0}^{\infty} \omega(u) u^{-\gamma+\varepsilon}\, du,$$

gegen die Definition von γ.

Satz CVII: *Es ist*

$$\gamma = \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} e^{-v}\, dv > 0.$$

Beweis: Für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist wegen $\sin(v+\pi) = -\sin$

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin v}{v} e^{-v}\, dv \right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v| \frac{e^{-v}}{v}\, dv > \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\sin v| \frac{e^{-v}}{v}\, dv = \left| \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin v}{v} e^{-v}\, dv \right|,$$

und $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ ist abwechselnd positiv und negativ.

Satz CVIII: *Sind $\mu_1, \ldots, \mu_l$ reell und ist $1 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_l > 0$ so ist,*

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k = s_m$$

$1 \leqq m \leqq l$ *gesetzt,*

$$\Big|\sum_{k=1}^{l} \mu_k \varepsilon_k\Big| \leqq \underset{1 \leqq m \leqq l}{\text{Max.}} |s_m|.$$

Beweis:

$$\sum_{=1} \mu_k \varepsilon_k \Big| = \Big| s_1 \varepsilon_1 + \sum_{k=2}^{l} (s_k - s_{k-1}) \varepsilon_k \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{l-1}{}' s_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + s_l \varepsilon_l \Big|$$

$$\leqq \text{Max.} |s_m| \Big(\sum_{k=1}^{l-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_l \Big) = \varepsilon_1 \text{ Max.} |s_m| \leqq \text{Max.} |s_m|.$$

Satz CIX: *Es seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *reell,* $q > 0$ *ganz rational,* $\tau > 0$. *nn gibt es im Intervall* $\tau \leqq v \leqq q^l \tau$ *ein* v, *so daß mit gewissen ganzen ionalen* x_k *für* $1 \leqq k \leqq l$

$$|v\alpha_k - x_k| < \frac{1}{q}$$

Beweis: Man setze $u = 0, \tau, 2\tau, \ldots, q^l \tau$ und bestimme zu jedem u ganzen rationalen Zahlen $y_k(u)$, $1 \leqq k \leqq l$, so, daß

$$0 \leqq u\alpha_k - y_k < 1$$

Deutet man das System der l Zahlen $u\alpha_k - y_k$ als Punkt eines l di-nsionalen Raumes, so sind durch dies Verfahren $q^l + 1$ Punkte des heitswürfels exkl. der nicht durch den Nullpunkt gehenden Begrenzungs-hen festgelegt. Mindestens einem der q^l Teilwürfel, die sich auf der q gleiche Teile $\left(\frac{m}{q} \leqq z < \frac{m+1}{q} \text{ für } m = 0, \ldots, q-1\right)$ geteilten Ein-tsstrecke aufbauen, müssen also mindestens zwei der Punkte angehören. d u_1, u_2 die beiden u-Werte, $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ die zugehörigen ganzen len, so ist

$$\Big| |u_1 - u_2| \alpha_k - (y_k^{(1)} - y_k^{(2)}) \operatorname{sign}(u_1 - u_2) \Big| < \frac{1}{q}, \quad 1 \leqq k \leqq l.$$

setze nun $|u_1 - u_2| = v$. Wegen $\tau \leqq |u_1 - u_2| \leqq q^l \tau$ ist dann die hauptung bewiesen.

Satz CX: *Es sei* $0 < \delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_k \leqq \ldots$, $\delta_k \to \infty$. *Die An-l* $Q(T)$ *der* $\delta_k \leqq T$ *sei von der Gestalt*

$$Q(T) = B_1 T \log T + B_2 T + O(\sqrt{T}), \quad B_1 > 0.$$

nn ist die Reihe

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k \sigma}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma}$$

für $\sigma > 0$ *konvergent und für* $\sigma \to 0$

$$S(\sigma) = \nu_1 \log \frac{1}{\sigma} + o\left(\log \frac{1}{\sigma}\right),$$

wo ν_1 *(desgl. nachher* $\nu_2, \ldots$*) positive, nur von der* δ*-Menge abhängige Zahlen sind. Übrigens ist* $\nu_1 = B_1 \nu$*, wo* ν *die Zahl aus Satz* CVII *ist.*

Beweis: 1. Aus

$$k \leqq Q(\delta_k) = O\left(\delta_k^{-\frac{3}{2}}\right)$$

folgt

$$\frac{1}{\delta_k} = O\left(\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}\right),$$

also für $\sigma > 0$ die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} \frac{1}{\delta_k \sigma},$$

also die von $S(\sigma)$.

2. $Q(\delta_0)$ bedeute 0. Dann ist für $\sigma > 0$

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k \sigma}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \left(Q(\delta_k) - Q(\delta_{k-1})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Q(\delta_k) \left(\frac{\sin \delta_k \sigma}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} - \frac{\sin \delta_{k+1} \sigma}{\delta_{k+1}} e^{-\delta_{k+1} \sigma}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} Q(\delta_k) \int_{\delta_k}^{\delta_{k+1}} \frac{d}{du}\left(\frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right) du = -\int_{\delta_1}^{\infty} Q(u) \frac{d}{du}\left(\frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right) du$$

Nun ist

$$Q(u) = B_1 u \log u + B_2 u + \tau(u), \qquad |\tau(u)| < \nu_2 \sqrt{u} \text{ für } u \geqq \delta_1.$$

Wegen

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right) = -e^{-\sigma u} \sigma \frac{\sin \sigma u}{u} + e^{-\sigma u} \sigma \frac{\cos \sigma u}{u} - e^{-\sigma u} \frac{\sin \sigma u}{u^2}$$

ist daher

$$\left| \int_{\delta_1}^{\infty} \tau(u) \frac{d}{du}\left(\frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right) du \right| < \nu_2 \int_{\delta_1}^{\infty} \sqrt{u} \left(\frac{2\sigma}{u} + \frac{1}{u^2}\right) e^{-\sigma u} du$$

$$= \nu_2 \int_{\delta_1 \sigma}^{\infty} \sqrt{\frac{v}{\sigma}} \left(\frac{2\sigma^2}{v} + \frac{\sigma^2}{v^2}\right) e^{-v} \frac{dv}{\sigma} = \nu_2 \sqrt{\sigma} \int_{\delta_1 \sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \left(2 + \frac{1}{v}\right) e^{-v} dv = O(1)$$

Andererseits ist

$$\int (B_1 u \log u + B_2 u) \frac{d}{du}\left(\frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right) du$$

$$\left\{(B_1 u \log u + B_2 u) \frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u}\right\}_{\delta_1}^{\infty} - \int_{\delta_1}^{\infty} (B_1 \log u + B_1 + B_2) \frac{\sin \sigma u}{u} e^{-\sigma u} du$$

$$B_1 \delta_1 \log \delta_1 + B_2 \delta_1) \frac{\sin \delta_1 \sigma}{\delta_1} e^{-\delta_1 \sigma} - \int_{\delta_1 \sigma}^{\infty} (B_1 \log \frac{1}{\sigma} + B_1 \log v + B_1 + B_2) \frac{\sin v}{v} e^{-v} dv$$

$$o(1) - B_1 \log \frac{1}{\sigma} \int_{\delta_1 \sigma}^{\infty} \frac{\sin v}{v} e^{-v} dv - \int_{\delta_2 \sigma}^{\infty} (B_1 \log v + B_1 + B_2) \frac{\sin v}{v} e^{-v} dv,$$

o, wenn ν die Bedeutung aus Satz CVII hat,

$$= o(1) - B_1 \nu \log \frac{1}{\sigma} + o\left(\log \frac{1}{\sigma}\right) + O(1) = -B_1 \nu \log \frac{1}{\sigma} + o\left(\log \frac{1}{\sigma}\right);$$

ier ist

$$S(\sigma) = B_1 \nu \log \frac{1}{\sigma} + o\left(\log \frac{1}{\sigma}\right).$$

Satz CXI: *Unter den Voraussetzungen von Satz* CX *gibt es ein* ν_3 *d ein* ν_4, *so daß für* $0 < \sigma < \nu_3$

3)
$$\sum_{k=\left[\frac{\nu_4}{\sigma} \log \frac{1}{\sigma}\right]}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} < \frac{\nu_4}{4} \log \frac{1}{\sigma}$$

Beweis: Ich wähle ν_5 so, daß für $T > 2$

$$Q(T) < \nu_5 T \log T$$

; alsdann $\nu_6 > 1$ so, daß

$$\nu_5 \int_{\nu_6}^{\infty} \left(\frac{1}{v} + 1\right) e^{-v} dv < \frac{\nu_4}{5}$$

Für $0 < \sigma < \frac{\nu_6}{2}$ ist also

$$Q\left(\frac{\nu_6}{\sigma}\right) < \nu_5 \frac{\nu_6}{\sigma} \log \frac{\nu_6}{\sigma} = \frac{\nu_5 \nu_6}{\sigma} \left(\log \frac{1}{\sigma} + \log \nu_6\right);$$

ier ist, $2 \nu_5 \nu_6 = \nu_4$ gesetzt, für $0 < \sigma < \nu_7 \left(\leqq \frac{\nu_6}{2}\right)$

$$Q\left(\frac{\nu_6}{\sigma}\right) < \left[\frac{\nu_4}{\sigma} \log \frac{1}{\sigma}\right],$$

$$\delta_{\left[\frac{\nu_4}{\sigma} \log \frac{1}{\sigma}\right]} > \frac{\nu_6}{\sigma}.$$

Für $0 < \sigma < \nu_7$ ist also

$$\sum_{k=\left[\frac{\nu_6}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right]}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \leqq \sum_{\delta_k > \frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} = \sum_{\delta_k > \frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} (Q(\delta_k) - Q(\delta_{k-1})) \frac{e^{-\delta_k \sigma}}{\delta_k}$$

$$\leqq \sum_{\delta_k > \frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} Q(\delta_k) \left(\frac{e^{-\delta_k \sigma}}{\delta_k} - \frac{e^{-\delta_{k+1} \sigma}}{\delta_{k+1}} \right)$$

$$\leqq -\int_{\frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} Q(u) \frac{d}{du}\left(\frac{e^{-\sigma u}}{u}\right) du = \int_{\frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} Q(u) \left(\frac{e^{-\sigma u}}{u^2} + \sigma \frac{e^{-\sigma u}}{u} \right) du$$

$$< \nu_5 \int_{\frac{\nu_6}{\sigma}}^{\infty} \log u \left(\frac{1}{u} + \sigma\right) e^{-\sigma u} du = \nu_5 \int_{\nu_6}^{\infty} \left(\log\frac{1}{\sigma} + \log v\right) \left(\frac{1}{v} + 1\right) e^{-v} dv$$

$$= \nu_5 \log\frac{1}{\sigma} \int_{\nu_6}^{\infty} \left(\frac{1}{v} + 1\right) e^{-v} dv + \nu_5 \int_{\nu_6}^{\infty} \log v \left(\frac{1}{v} + 1\right) e^{-v} dv < \frac{\nu_1}{5} \log\frac{1}{\sigma} + \nu_8$$

für $0 < \sigma < \nu_3$ ist dies schließlich

$$< \frac{\nu_1}{4} \log\frac{1}{\sigma}.$$

Satz CXII: *Unter den Voraussetzungen des Satzes* CX *werde die offenbar für* $\sigma > 0$ *reguläre Funktion*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\delta_k s}}{\delta_k}$$

betrachtet. Dann gibt es zu jedem $t_0 > 1$ *im Gebiet* $0 < \sigma < 1$, $t > t_0$ *einen Punkt, wo*

$$\Im f(s) < -\frac{\nu_1}{9} \log\log t \tag{79}$$

ist, und einen, wo

$$\Im f(s) > \frac{\nu_1}{9} \log\log t \tag{80}$$

ist. (Damit ist dann a fortiori gezeigt, daß $\Im f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma >$ *nicht beschränkt ist, und daß dort* $\frac{|\Im f(s)|}{\log\log t}$ *nicht gleichmäßig bei* $t \to \infty$ *gegen* 0 *strebt.)*

Beweis: Für $\sigma > 0$ ist

$$-\Im f(s) = -\Im \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\delta_k (\sigma + t i)}}{\delta_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma}.$$

Ich wähle nun nach Satz CX ein positives $\nu_9 < \nu_3$ so, daß für $0 < \sigma <$

1) $$-\Im f(\sigma+\sigma i) = S(\sigma) > \frac{7}{8}\nu_1 \log\frac{1}{\sigma}$$

Nun sei $t_0 > 1$ gegeben. Ich setze für jedes σ der Strecke $0 < \sigma < \nu_9$

$$l = l(\sigma) = \left[\frac{\nu_4}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right].$$

nd ich wende den Satz CIX an mit $\alpha_k = \frac{\delta_k}{2\pi}\,(1 \leqq k \leqq l)$, $q = \left[\frac{2\pi}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right]+1$, $= t_0 + 1$; er ergibt die Existenz eines $v = v(\sigma)$ derart, daß mit geeignet ganzen rationalen x_k für $1 \leqq k \leqq l$

$$\left| v\frac{\delta_k}{2\pi} - x_k \right| < \frac{\sigma}{2\pi\log\frac{1}{\sigma}}$$

, und außerdem v dem Intervall

$$t_0 + 1 \leqq v \leqq (t_0+1)\left(\left[\frac{2\pi}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right]+1\right)^{\left[\frac{\nu_4}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right]}$$

gehört. Also ist für $1 \leqq k \leqq l$

2) $$|\delta_k v - 2\pi x_k| < \frac{\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}}.$$

1. (Beweis von (79).) Wegen $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqq |\alpha - \beta|$ ist für $1 \leqq k \leqq l$

3) $$|\sin\delta_k(\sigma+v) - \sin\delta_k\sigma| = |\sin(\delta_k v - 2\pi x_k + \delta_k\sigma) - \sin\delta_k\sigma| < \frac{\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}}.$$

un ist

$$-\Im f(\sigma+(\sigma+v)i) + \Im f(\sigma+\sigma i) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\delta_k(\sigma+v)}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\delta_k\sigma}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma}$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\frac{\sin\delta_k(\sigma+v)-\sin\delta_k\sigma}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma} + \sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{\sin\delta_k(\sigma+v)-\sin\delta_k\sigma}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma}.$$

ach (78) und (83) ist also

$$\left|-\Im f(\sigma+(\sigma+v)i) + \Im f(\sigma+\sigma i)\right| < \sum_{k=1}^{l}\frac{\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}}\frac{1}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma} + 2\sum_{k=\left[\frac{\nu_4}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}\right]}^{\infty}\frac{1}{\delta_k}e^{-\delta_k\sigma}$$

$$< \frac{\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}}\sum_{k=1}\frac{1}{\delta_1} + 2\frac{\nu_1}{4}\log\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\delta_1}\frac{l\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}} + \frac{\nu_1}{2}\log\frac{1}{\sigma} \leqq \frac{\nu_4}{\delta_1} + \frac{\nu_1}{2}\log\frac{1}{\sigma}.$$

ür $0 < \sigma < \nu_{10}$, wo $\nu_{10} < 1$, ist also

$$|-\Im f(\sigma+(\sigma+v)i) + \Im f(\sigma+\sigma i)| < \frac{3}{4}\nu_1\log\frac{1}{\sigma},$$

so wegen (81)

$$-\Im f(\sigma+(\sigma+v)i) > \frac{1}{8}\nu_1\log\frac{1}{\sigma}.$$

Nun setze ich $\sigma + v = \sigma + v(\sigma) = t$. Dann ist $t > v \geqq t_0 + 1 > t_0$; der Punkt $s = \sigma + ti$ liegt also im vorgeschriebenen Gebiet; ferner ist für alle hinreichend kleinen positiven σ

$$t \leqq \sigma + (t_0 + 1)\left(\frac{2\pi}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma} + 1\right)^{\frac{\nu_4}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}} < e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{9}{8}}},$$

$$0 < \log t < \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{9}{8}},$$

$$\log\log t < \frac{9}{8}\log\frac{1}{\sigma},$$

$$-\Im f(s) = -\Im f(\sigma + (\sigma + v)i) > \frac{1}{8}\nu_1\frac{8}{9}\log\log t = \frac{\nu_1}{9}\log\log t.$$

2. (Beweis von (80).) Für $1 \leqq k \leqq l$ ist nach (82)

$$|\sin\delta_k(\sigma - v) - \sin\delta_k\sigma| = |\sin(-\delta_k v + 2\pi x_k + \delta_k\sigma) - \sin\delta_k\sigma| < \frac{\sigma}{\log\frac{1}{\sigma}},$$

also in derselben Weise wie oben für $0 < \sigma < \nu_{10} < 1$

$$|-\Im f(\sigma + (\sigma - v)i) + \Im f(\sigma + \sigma i)| < \frac{3}{4}\nu_1\log\frac{1}{\sigma},$$

$$\Im f(\sigma + (v - \sigma)i) = -\Im f(\sigma + (\sigma - v)i) > \frac{1}{8}\nu_1\log\frac{1}{\sigma}.$$

Jetzt setze ich $v - \sigma = t$. Dann ist $t > v - 1 \geqq t_0$ und für alle hinreichend kleinen positiven σ

$$t < (t_0 + 1)\left(\frac{2\pi}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma} + 1\right)^{\frac{\nu_4}{\sigma}\log\frac{1}{\sigma}} < e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{9}{8}}},$$

$$\Im f(s) = \Im f(\sigma + (v - \sigma)i) > \frac{\nu_1}{9}\log\log t.$$

Satz CXIII: 1. *Die Folge δ_k möge die Voraussetzungen des Satzes* CX *erfüllen und außerdem die drei folgenden:*

2. *Es konvergiert*

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\delta_k t}{\delta_k} \tag{84}$$

für alle reellen t.

3. *Für $t \geqq 2$, $m \geqq 1$ ist*

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin\delta_k t}{\delta_k}\right| < \nu_{11}t^2. \tag{85}$$

4. *Zu jedem ganzen rationalen $\mu \geqq 2$ gibt es ein ganzes rationales $M(\mu) \geqq 0$ derart, daß für $\mu \leqq t \leqq \mu + 1$ und $m \geqq M$*

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin\delta_k t}{\delta_k}\right| < \nu_{12} \tag{86}$$

ist. (*M ist von t unabhängig.*)

Alsdann ist

$$\limsup_{t=\infty} \frac{F(t)}{\log\log t} > 0$$

$$\liminf_{t=\infty} \frac{F(t)}{\log\log t} < 0.$$

fortiori ist also $F(t)$ nicht beschränkt.

Beweis: Nach Satz CVIII und (85) ist für $t \geqq 2$, $m \geqq 1$, $\sigma > 0$

$$\Big| \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \Big| < \nu_{11} t^2,$$

für $t \geqq 2$, $\sigma > 0$

$$|\Im f(s)| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \Big| \leqq \nu_{11} t^2.$$

Nach (86) ist für $\mu \leqq t \leqq \mu+1$, $m_1 > m \geqq M(\mu)$

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{m_1} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \Big| < 2\nu_{12};$$

Verbindung mit Satz CVIII zeigt dies, daß für $\mu \leqq t \leqq \mu+1$, $> m \geqq M(\mu)$, $\sigma > 0$

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{m_1} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \Big| < 2\nu_{12},$$

für $\mu \leqq t \leqq \mu+1$, $m \geqq M(\mu)$, $\sigma > 0$

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \Big| \leqq 2\nu_{12}$$

Da jedes $M(\mu)$ durch jede größere Zahl ersetzt werden kann, darf

$$1 < M(2) < M(3) < M(4) < \ldots, \quad M(\mu) \to \infty$$

enommen werden.

Für $\mu \leqq t \leqq \mu+1$, $\sigma > 0$ ist nach (86) und (90)

$$-\Im f(s) - F(t)| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} (e^{-\delta_k \sigma} - 1) \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{M(\mu)} + \sum_{k=M(\mu)+1}^{\infty} \Big|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{M(\mu)} \frac{1}{\delta_k} (1 - e^{-\delta_k \sigma}) + \Big| \sum_{k=M(\mu)+1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} e^{-\delta_k \sigma} \Big| + \Big| \sum_{k=M(\mu)+1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \Big|$$

$$< \sum_{k=1}^{M(\mu)} \frac{1}{\delta_k} \delta_k \sigma + 2\nu_{12} + \nu_{12} = M(\mu)\sigma + 3\nu_{12}.$$

Für $\mu \leqq t \leqq \mu+1$, $0 < \sigma \leqq \frac{1}{M(\mu)}$ ist also

$$|-\Im f(s) - F(t)| < 1 + 3\nu_{12}. \tag{91}$$

Verbindet man die Punkte $\frac{1}{M(2)}+2i$, $\frac{1}{M(3)}+3i$, $\ldots$, $\frac{1}{M(\mu)}+\mu i$, $\ldots$ sukzessive geradlinig, so hat die entstehende, aus geraden Strecken zusammengesetzte Kurve $\sigma = \varphi(t)$ die in Satz CV geforderte Gestalt, und für $t \geqq 2$, $0 < \sigma \leqq \varphi(t)$ (Gebiet $\mathfrak{A}$) ist (91) gültig.

Es sei (87) bzw. (88) falsch, also

$$\limsup_{t=\infty} \frac{F(t)}{\log\log t} \leqq 0 \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{t=\infty} \frac{F(t)}{\log\log t} \geqq 0. \tag{92}$$

Dann setze ich in der von 1 bis 0 aufgeschlitzten Halbebene $\sigma > 0$

$$H(s) = e^{if(s) - \frac{\nu_1}{10}\log\log s} \quad \text{bzw.} \quad e^{-if(s) - \frac{\nu_1}{10}\log\log s},$$

wo $\log\log s$ den für $s > 1$ reellen Zweig bezeichnet. Ich behaupte, daß $H(s)$ in dem Gebiete $t \geqq 2$, $\varphi(t) \leqq \sigma \leqq 1$ des Satzes CV (Gebiet $\mathfrak{G}$, welches das obige Gebiet $\mathfrak{A}$ zum Halbstreifen $0 < \sigma \leqq 1$, $t \geqq 2$ ergänzt) die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Für $0 < \sigma \leqq 1$ ist gleichmäßig bei wachsendem t

$$\Re \log\log s = \log|\log s| = \log(\log t + O(1)) = \log\log t + O(1);$$

also ist auf der Kurve $\sigma = \varphi(t)$ nach (91) und (92)

$$|H(s)| = e^{-\Im f(s) - \frac{\nu_1}{10}\log\log t + O(1)} = e^{F(t) - \frac{\nu_1}{10}\log\log t + O(1)} = O(1)$$

bzw.

$$|H(s)| = e^{\Im f(s) - \frac{\nu_1}{10}\log\log t + O(1)} = e^{-F(t) - \frac{\nu_1}{10}\log\log t + O(1)} = O(1);$$

auf der Geraden $\sigma = 1$ ist $|H(s)|$ beschränkt, da $|f(s)|$ dort beschränkt ist. Im Innern von $\mathfrak{G}$ ist nach (89) gleichmäßig

$$\Im f(s) = O(t^2),$$

also

$$H(s) = O(e^{at^2}).$$

Nach Satz CV ist also $H(s)$ im Gebiet $\mathfrak{G}$ beschränkt. Dort ist also gleichmäßig

$$-\Im f(s) < \frac{\nu_1}{10}\log\log t + \nu_{13} \quad \text{bzw.} \quad \Im f(s) < \frac{\nu_1}{10}\log\log t + \nu_{13};$$

also ist in $\mathfrak{G}$, sobald $t > \nu_{14}$ ist,

$$\Im f(s) > -\frac{\nu_1}{9}\log\log t \quad \text{bzw.} \quad \Im f(s) < \frac{\nu_1}{9}\log\log t; \tag{93}$$

nach (91) und (92) gilt (93) im Gebiet $\mathfrak{A}$, sobald $t > \nu_{15}$ ist. (93) gilt also für $0 < \sigma \leqq 1$, $t > \nu_{16}$, was Satz CXII widerspricht.

Satz CXIV: *Es sei χ ein Charakter* mod $\mathfrak{f}$. *Es werde*

$$\psi(x)=\sum_{N\mathfrak{p}^m\leqq x}\chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p}=\sum_{k=1}^{[x]}G(k)$$

setzt. Dann ist für $x\geqq 3$, $T>3$

4) $$\left|\psi(x)-d_0x+\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho}\right|\leqq\mu_7\left(x^2\log x\frac{1}{T}+x^2\frac{\log T}{T}+\log x\right),$$

in Fortsetzung der alten Numerierung μ_7, desgl. in der Folge $\mu_8,\ldots$ ne positive, höchstens vom Körper, $\mathfrak{f}$ und χ abhängige Konstante ist.

Beweis: Es sei $x\geqq 3$. Es sei $T>3$; es genügt den Beweis für lche T zu führen, daß kein γ den Wert T oder $-T$ hat, da beide iten von (94) nach links stetig sind. Nach dem Analogon zu (191) im Beweise des Satzes LXXXVIII ist

5) $$\begin{cases}\displaystyle\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds=2\pi i\Big(-d_0x+r_0\log x+a_0\\ \displaystyle+\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho}+\Big(\frac{r_1}{2}-q\Big)\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)+\frac{n}{2}\log\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big)+\int_{-\infty+Ti}^{2+Ti}-\int_{-\infty-Ti}^{2-Ti}.\end{cases}$$

ach dem Analogon zu (195) ist

$$\left|\int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti}\right|<\frac{\mu_1\log T}{T}\int_{-\infty}^{-1}x^\sigma d\sigma=\mu_1\frac{1}{x\log x}\frac{\log T}{T}.$$

erner ist nach dem Analogon zu (196), (197) und (198)

$$\left|\int_{-1+Ti}^{2+Ti}\right|<3\mu_5x^2\frac{\log T}{T}+3\mu_6x^2\frac{\log T}{T(T-1)}+\tfrac{3}{2}\pi\mu_6x^2\frac{\log T}{T-\frac{1}{2}}<\mu_8x^2\frac{\log T}{T}.$$

aher ist

$$\left|\int_{-\infty+Ti}^{2+Ti}\right|<\mu_9x^2\frac{\log T}{T},$$

enso

$$\left|\int_{-\infty-Ti}^{2-Ti}\right|<\mu_{10}x^2\frac{\log T}{T}.$$

ch (95) ist also

6) $$\left|\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds+2\pi i\Big(d_0x-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho}\Big)\right|<\mu_{11}x^2\frac{\log T}{T}+\mu_{12}\log x.$$

Nun ist

$$-\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}G(k)\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^s}{s}\,ds,$$

$$-\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds-2\pi i\psi(x)=\sum_{k=1}^{[x]-1}G(k)\left(\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^s}{s}\,ds-2\pi i\right)$$

$$-2\pi i G([x])+\sum_{k=[x]}^{\infty}G(k)\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^s}{s}\,ds.$$

Nun werde die Klammer in der ersten Summe rechts nach Satz 195 abgeschätzt, in der zweiten Summe alle Integrale vom dritten an ($k\geqq[x]+2$) auch, aber die beiden Integrale mit $k=[x]$ und $k=[x]+1$ nach Satz CIII. Wegen

$$|G(k)|\leqq\sum_{Np^m=k}\log Np\leqq\sum_{p\mid k}\log Np\leqq\log N[k]=n\log k$$

ergibt sich

$$\left|-\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds-2\pi i\psi(x)\right|<\frac{\mu_{13}}{T}\sum_{k=1}^{[x]-1}\log k\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{\log\frac{x}{k}}+\mu_{14}\log x$$

$$+\frac{\mu_{15}}{T}\sum_{k=[x]+2}^{\infty}\log k\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{\log\frac{k}{x}}<\mu_{14}\log x+\frac{\mu_{15}x^2\log x}{T}\sum_{k=1}^{[x]-1}\frac{1}{k^2\log\frac{x}{k}}+\frac{\mu_{15}x^2}{T}\sum_{k=[x]+2}^{\infty}\frac{\log k}{k^2\log\frac{k}{x}}.$$

Hierin ist

$$\sum_{k=1}^{[x]-1}\frac{1}{k^2\log\frac{x}{k}}<\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}\frac{1}{k^2\log 2}+\sum_{k=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\log\frac{x}{x-1}}<\mu_{16}+\mu_{17}\frac{x}{x^2\frac{1}{x}}=\mu_{18},$$

$$\sum_{k=[x]+2}^{\infty}\frac{\log k}{k^2\log\frac{k}{x}}<\sum_{k=[x]+2}^{2[x]+1}\frac{\log(2x+1)}{x^2\log\frac{x+1}{x}}+\sum_{k=2[x]+2}^{\infty}\frac{\log k}{k^2\log 2}<\mu_{19}\frac{x\log x}{x^2\frac{1}{x}}+\mu_{20}<\mu_{21}\log x$$

es folgt

$$\left|\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds+2\pi i\psi(x)\right|<\mu_{14}\log x+\mu_{22}x^2\log x\frac{1}{T},$$

also in Verbindung mit (96)

$$2\pi\left|\psi(x)-d_0x+\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho}\right|<\mu_{11}x^2\frac{\log T}{T}+\mu_{12}\log x+\mu_{14}\log x+\mu_{22}x^2\log x$$

$$=\mu_{23}x^2\log x\frac{1}{T}+\mu_{11}x^2\frac{\log T}{T}+\mu_{23}\log x,$$

womit (94) bewiesen ist.

Satz CXV: *Für* $x \geqq 3$, $T \geqq x^2$ *ist*

$$\left| \psi(x) - d_0 x + \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| < \mu_{24} \log x. \tag{7}$$

Beweis: Folgt aus Satz CXIV, da $\frac{\log T}{T} \leqq \frac{\log(x^2)}{x^2}$ ist.

Satz CXVI: *Es sei (bei einem bestimmten* $\zeta(s,\chi)$*) wahr, daß alle cht reellen* ϱ *auf den Geraden* $\sigma = 0$ *und* $\sigma = \frac{1}{2}$ *liegen. Dann ist, nn* $\sum'$ *im Falle der Nichtexistenz eines reellen* ϱ *Null bezeichnet,*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\Re\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0}' \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\Re\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0}' \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x}, \tag{8}$$

o a fortiori

$$\psi(x) - d_0 x + o(\sqrt{x}\log\log\log x), \tag{9}$$

$$\psi(x) - d_0 x + O(\sqrt{x}). \tag{10}$$

Beweis: 1. Der Charakter χ sei eigentlich. Dann sind nach Voraussetzung, (53) und Satz LXIV alle $\beta = \frac{1}{2}$. Es seien, wachsend geordnet, $|\gamma| + 0$ mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnet:

$$0 < \delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_k \leqq \ldots .$$

nn werde ich konstatieren, daß die δ_k die Voraussetzungen des Satzes CXIII illen.

a) Nach Satz LXXI ist

$$Q(T) = \frac{n}{\pi} T \log T + B_2 T + O(\log T),$$

daß (77) erfüllt ist.

b) Ferner konvergiert für $x > 0$ nach Satz LXXXIX die Reihe

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho},$$

o (nach wachsenden $|\gamma|$ geordnet)

$$\sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\frac{1}{2}+\gamma i} = \sqrt{x} \sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{x^{\gamma i}}{\frac{1}{2}+\gamma i}.$$

gen

$$\left| \frac{x^{\gamma i}}{\frac{1}{2}+\gamma i} - \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} \right| = \left| -\frac{1}{2} x^{\gamma i} \frac{1}{\gamma i(\frac{1}{2}+\gamma i)} \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{|\gamma| \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma^2}} \tag{11}$$

vergiert daher

$$\sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i}$$

also

$$\sum_{\gamma \gtrless 0} \Re \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} = \sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} = \sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{\sin(|\gamma| \log x)}{|\gamma|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\delta_k \log x)}{\delta_k}.$$

(84) konvergiert also für alle reellen t. Zugleich ergibt sich aus dem vorangehenden

$$\Re \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} = \sum_{\gamma=0} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + \sqrt{x}\, F(\log x) + O(\sqrt{x}). \tag{102}$$

c) Es sei $x \geqq 3$. Nach Satz LXXXVIII ist, wegen

$$\psi(x) - \Psi(x, \chi) = O(\log x),$$

$$\left| \psi(x) - d_0 x + \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| < \mu_{25} \log x. \tag{103}$$

Aus (97), angewandt auf $T = x^2$, folgt

$$\left| \psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| < \mu_{24} \log x + \left| \sum_{0<|\gamma|<x^2} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| \leqq \mu_{24} \log x + \sqrt{x} \sum_{\delta_k \leqq x^2} \frac{1}{\delta_k}.$$

Nach Satz LXXVI ist die Anzahl der δ_l auf der Strecke $l \leqq t \leqq l+1$ für $l \geqq 2$ höchstens $\mu_{26} \log l$. Daher ist

$$\left| \psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| < \mu_{24} \log x + \sqrt{x} \left(\mu_{27} + \sum_{l=2}^{[x^2]} \frac{\mu_{26} \log l}{l} \right) < \mu_{28} \sqrt{x} \log^2 x. \tag{104}$$

Aus Satz CXV und (104) folgt nun für $T \geqq x^2$

$$\left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| < \mu_{29} \sqrt{x} \log^2 x; \tag{105}$$

für $0 < T < x^2$ ergibt sich direkt

$$\left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| \leqq \sqrt{x} \left(\mu_{27} + \sum_{l=2}^{[x^2]} \frac{\mu_{26} \log l}{l} \right) < \mu_{28} \sqrt{x} \log^2 x. \tag{106}$$

Aus (105) und (106) folgt für alle $T > 0$

$$\left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| < \mu_{30} \sqrt{x} \log^2 x,$$

$$\left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\gamma i}}{\frac{1}{2} + \gamma i} \right| < \mu_{30} \log^2 x,$$

$$\left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} \right| < \mu_{30} \log^2 x + \sum_{\gamma \gtrless 0} \left| \frac{1}{\frac{1}{2} + \gamma i} - \frac{1}{\gamma i} \right| < \mu_{31} \log^2 x,$$

$$\left| \Re \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} \right| = \left| \sum_{0<|\gamma|<T} \frac{\sin(|\gamma| \log x)}{|\gamma|} \right| < \mu_{31} \log^2 x.$$

er ist für $t \geqq 2$, $T > 0$

7) $$\left| \sum_{\delta_k < T} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \right| < \mu_{31} t^2.$$

nun die Lösungszahl von $\delta_k = T$ für $T \geqq 2$ höchstens $\mu_{26} \log T$ ist, also $T \geqq 2$

8) $$\sum_{\delta_k = T} \left| \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \right| \leqq \frac{\mu_{26} \log T}{T} < \mu_{32}$$

ergibt sich aus (107) für $t \geqq 2$, $m \geqq 1$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \right| < \mu_{33} t^2,$$

es (85) verlangt.

d) Aus Satz CXV und (103) folgt für $x \geqq 3$, $T \geqq x^2$

$$\left| \sum_{|\gamma| \geqq T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| < \mu_{34} \log x,$$

$$\left| \sum_{|\gamma| \geqq T} \frac{x^{\gamma i}}{\frac{1}{2} + \gamma i} \right| < \mu_{34} \frac{\log x}{\sqrt{x}} < \mu_{35},$$

nach (101)

$$\left| \sum_{|\gamma| \geqq T} \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} \right| < \mu_{36},$$

$$\left| \Re \sum_{|\gamma| \geqq T} \frac{x^{\gamma i}}{\gamma i} \right| = \left| \sum_{|\gamma| \geqq T} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} \right| < \mu_{36}.$$

$t \geqq 2$, $T \geqq e^{2t}$ ist also

$$\left| \sum_{\delta_k \geqq T} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \right| < \mu_{36}.$$

gen (108) ist also, wenn $\mu \geqq 2$ ist und $M(\mu)$ so gewählt wird, daß

$$\delta_{M(\mu)+1} \geqq e^{2(\mu+1)}$$

für $m \geqq M(\mu)$, $\mu \leqq t \leqq \mu + 1$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\sin \delta_k t}{\delta_k} \right| < \mu_{37},$$

es (86) verlangt.

Da somit Satz CXIII anwendbar ist und nach (103)

$$\psi(x) - d_0 x + \sum_{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho} = O(\log x),$$

nach (102)

$$\Re \psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^\varrho}{\varrho} + \sqrt{x}\, F(\log x) + O(\sqrt{x}) = O(\log x)$$

ist, so ergeben die Formeln

$$\limsup_{x=\infty} \frac{F(\log x)}{\log\log\log x} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{F(\log x)}{\log\log\log x}$$

des Satzes CXIII

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\Re\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0}^{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\Re\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0}^{\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x}.$$

2. Der Charakter χ sei uneigentlich. Wenn $\psi_0(x)$ die zu $\zeta_0(s, \chi)$ gehörige Funktion ist, ist

$$\psi(x) - \psi_0(x) = -\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m \leqq x \\ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p} = -\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \log N\mathfrak{p} \sum_{m \leqq \frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}}} \chi(\mathfrak{p}^m) = O(\log x).$$

Wird also, was erlaubt ist, das Resultat von 1. auf $\zeta_0(s, \chi)$ und $\psi_0(x)$ angewandt, so kommt (98) mit $\psi(x)$ heraus.

Satz CXVII: *Es sei χ beliebig. (Über die Lage der ϱ wird nichts Einschränkendes vorausgesetzt.) Dann gilt* (99), *also* (100).

Beweis: Für $s > 1$ ist

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k) - \psi(k-1)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}}\,du,$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{d_0 s}{s-1} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(u) - d_0 u}{u^{s+1}}\,du. \tag{109}$$

Wäre nun (99) falsch, so wäre

$$\psi(x) - d_0 x = o(\sqrt{x}\log\log\log x), \tag{110}$$

also das Integral rechts in (109) für $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $\delta > 0$ gleichmäßig konvergent. Also wäre $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{d_0 s}{s-1}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär; es wären also alle $\beta \leqq \frac{1}{2}$, also alle $\beta = 0$ oder $\frac{1}{2}$. Dann gälte aber nach dem vorigen Satz (99) und nicht (110).

Satz CXVIII[9]: *Es sei χ beliebig. Es werde*

$$\vartheta(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}$$

gesetzt. Dann ist

$$\vartheta(x) - d_0 x + o(\sqrt{x}\log\log\log x),$$

also

$$\vartheta(x) - d_0 x + O(\sqrt{x}).$$

---

[9]) Vgl. Satz LXXXIII.

Beweis: Es ist

$$|\psi(x)-\vartheta(x)| = \Big|\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m\leqq x\\ m\geqq 2}} \chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p}\Big| \leqq \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m\leqq x\\ m\geqq 2}} \log N\mathfrak{p},$$

lso, da das größte vorkommende $m \leqq \frac{\log x}{\log 2}$ ist,

$$|\psi(x)-\vartheta(x)| \leqq \sum_{N\mathfrak{p}\leqq\sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}\leqq\sqrt[3]{x}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}\leqq\sqrt[4]{x}} \log N\mathfrak{p} + \dots$$

111) $$\leqq \sum_{N\mathfrak{p}\leqq\sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} + \frac{\log x}{\log 2}\sum_{N\mathfrak{p}\leqq\sqrt[3]{x}} \log N\mathfrak{p} = O(\sqrt{x}) + O(\log x\sqrt[3]{x}) = O(\sqrt{x}),$$

o daß aus Satz CXVII die Behauptung folgt.

Satz CXIX: *Ist χ ein reeller Charakter, so ist*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)-d_0x+\sum_{\gamma=0}\frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)-d_0x+\sum_{\gamma=0}\frac{x^\varrho}{\varrho}}{\sqrt{x}\log\log\log x},$$

lso nach (111) *dasselbe auch für $\vartheta(x)$ richtig.*

Beweis: Es sei Θ die obere Grenze der Abszissen β der nicht reellen ϱ.

1. Ist $\Theta = \frac{1}{2}$, so ist alles schon durch Satz CXVI bewiesen.

2. Es sei $\frac{1}{2} < \Theta \leqq 1$. Dann werde ich sogar für jedes $\delta > 0$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\psi(x)-d_0x+\sum_{\gamma=0}\frac{x^\varrho}{\varrho}}{x^{\Theta-\delta}} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\psi(x)-d_0x+\sum_{\gamma=0}\frac{x^\varrho}{\varrho}}{x^{\Theta-\delta}}$$

ewei sen[10]).

Es genügt, so kleine $\delta > 0$ zu betrachten, daß $\zeta(s,\chi)$ für $\Theta-\delta < s < \Theta$ icht verschwindet.

Für $s > 1$ ist

12)
$$\begin{aligned} &-\frac{\zeta'}{\zeta}(s;\chi) - \frac{d_0 s}{s-1} + \sum_{\gamma=0}\frac{s}{\varrho(s-\varrho)} \pm \frac{s}{s-\Theta+\delta} \\ &= s\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}}\Big(\psi(u)-d_0u+\sum_{\gamma=0}\frac{u^\varrho}{\varrho}\pm u^{\Theta-\delta}\Big)du. \end{aligned}$$

äre nun lim inf $\geqq 0$ bzw. lim sup $\leqq 0$, so wäre für alle $u \geqq u_0$

$$\frac{\psi(u)-d_0u+\sum_{\gamma=0}\frac{u^\varrho}{\varrho}}{u^{\Theta-\delta}} > -1 \text{ bzw. } < 1;$$

[10]) lim sup $= \infty$, lim inf $= -\infty$ ist wegen des δ genau dieselbe Behauptung.

also würde für $u \geqq u_0$ die Klammer des Integrals rechts in (112) mit dem Pluszeichen > 0 bzw. die mit dem Minuszeichen < 0 sein. Da die linke Seite von (112) für $s > \Theta - \delta$ regulär ist, würde sie nach Satz CVI für $\sigma > \Theta - \delta$ regulär sein; $\zeta(s, \chi)$ hätte also in der Halbebene $\sigma > \Theta - \delta$ keine nicht reelle Nullstelle, gegen die Definition von Θ.

Satz CXX[11]): *Es sei χ beliebig. Es werde*

$$\pi(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \chi(\mathfrak{p})$$

gesetzt. Dann ist, wenn $\Lambda(x)$ für $x > 1$ die Funktion $\int_2^x \frac{du}{\log u}$ bezeichnet,

1. *im Falle $\Theta = \frac{1}{2}$*

$$113) \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\Re\pi(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\Re\pi(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x}$$

also a fortiori

$$(114) \qquad \pi(x) - d_0 \Lambda(x) + o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x\right);$$

$$(115) \qquad \pi(x) - d_0 \Lambda(x) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right);$$

2. *in jedem Falle (mag $\Theta = \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$ sein) (114), also (115) gültig;*

3. *wenn χ reell ist (mag $\Theta = \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$ sein) (113) — wo das Zeichen $\Re$ fortbleiben kann — gültig.*

Beweis: Es genügt, alle Behauptungen an Stelle von $\pi(x)$ für die Funktion

$$\omega(x) = \sum_{N\mathfrak{p}^m \leqq x} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m}$$

zu beweisen, da

$$|\omega(x) - \pi(x)| = \Big|\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m \leqq x \\ m \geqq 2}} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m}\Big| \leqq \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m \leqq x \\ m \geqq 2}} 1 \leqq \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{x}} 1 + \frac{\log x}{\log 2} \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt[3]{x}} 1$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\log x \, \frac{\sqrt[3]{x}}{\log x}\right) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

ist.

---

[11]) Vgl. Satz LXXXIV.

1. Es sei $\Theta = \frac{1}{2}$. Dann genügt es nach Satz CXVI,

$$6) \quad \omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho) = \frac{\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\log x} + o\left(\frac{\sqrt{x} \log\log\log x}{\log x}\right)$$

u beweisen, da hiernach der $\limsup_{x=\infty}$ in (113) dem in (98) gleich ist, esgl. der $\liminf_{x=\infty}$.

Es ist nach Satz CIV für $x > 0$

$$\frac{x^{s+1}}{(s+1)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds = x \sum_{k=1}^{\infty} G(k) \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \left(\frac{x}{k}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} = 2\pi i x \sum_{k \leqq x} G(k)\left(1 - \frac{k}{x}\right)$$

$$i \sum_{k \leqq x} G(k)(x-k) = 2\pi i \sum_{k \leqq x} G(k) \int_k^x dy = 2\pi i \int_1^x dy \sum_{k \leqq y} G(k) = 2\pi i \int_1^x \psi(y)\,dy.$$

Nun sei $T \geqq 2$ und $\pm T$ kein γ. Dann wende ich den Cauchyschen atz auf das bei -1 nach links ausgebuchtete Rechteck mit den Ecken $\pm Ti$, $-1 \pm Ti$ an. Die Residuensumme des Integrals ist

$$-\left(\frac{d_0 x^2}{2} - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)} + b_0 x \log x + b_1 x + b_2 \log x + b_3\right).$$

un gehe ich zur Grenze $T = \infty$ über. Dann strebt jedes der Integrale ber die Horizontalseiten gegen 0. Denn — es sei z. B. von der oberen e Rede — nach Satz LXXVII ist für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

$$17) \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) = \sum_{|T-\gamma|<1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log T);$$

rner ist

$$\frac{x^{s+1}}{s(s+1)} = O\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

nd für jede der $O(\log T)$ Wurzeln im Intervall $|T-\gamma|<1$ (die in er Summe rechts in (117) vorkommen) ist nach dem Kunstgriff am Ende es Beweises von Satz 197

$$\left|\int \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \frac{ds}{s-\varrho}\right| < \frac{c}{T^2}.$$

Außerdem konvergiert (bei Umweg um -1)

$$\int_{-1-\infty i}^{-1+\infty i} \left|\frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\right| dt$$

ach Satz LXXXVI und ist $O(1)$ bei wachsendem x.

Also ergibt sich, da $\sum_\varrho \left|\frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)}\right|$ konvergiert,

$$\int_1^x \psi(y)\,dy = \frac{d_0 x^2}{2} - \sum_\varrho \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)} + O(x\log x).$$

Hierin ist wegen $\Theta = \frac{1}{2}$ für $x \geqq 1$

$$\left|\sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)}\right| \leqq \sum_{\gamma \gtrless 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{|\varrho(\varrho+1)|} = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

also

$$\int_1^x \psi(u)\,du = \frac{d_0 x^2}{2} - \sum_{\gamma=0} \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\psi_1(x) = \int_1^x \left(\psi(u) - d_0 u + \sum_{\gamma=0} \frac{u^\varrho}{\varrho}\right) du = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right). \tag{118}$$

Andererseits ist

$$\omega(x) = \sum_{k=2}^{x} \frac{G(k)}{\log k} = \sum_{k=2}^{x} \frac{\psi(k)-\psi(k-1)}{\log k} = \sum_{k=2}^{[x]-1} \psi(k)\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) + \dots$$

$$= \int_2^{[x]} \frac{\psi(u)}{u\log^2 u}\,du + \frac{\psi(x)}{\log[x]} = \int_2^x \frac{\psi(u)}{u\log^2 u}\,du + O\left(\frac{x}{x\log^2 x}\right) + \frac{\psi(x)}{\log x + C}$$

$$= \int_2^x \frac{\psi(u)}{u\log^2 u}\,du + \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

$$= \int_2^x \frac{\psi(u) - d_0 u + \sum_{\gamma=0} \frac{u^\varrho}{\varrho}}{u\log^2 u}\,du + d_0 \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} - \sum_{\gamma=0} \frac{1}{\varrho} \int_2^x \frac{u^{\varrho-1}}{\log^2 u}\,du$$
$$+ \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Hierin ist nach (118)

$$\int_2^x \frac{\psi(u) - d_0 u + \sum_{\gamma=0} \frac{u^\varrho}{\varrho}}{u\log^2 u}\,du = \left\{\frac{\psi_1(u)}{u\log^2 u}\right\}_2^x + \int_2^x \psi_1(u)\left(\frac{1}{u^2\log^2 u} + \frac{2}{u^2\log^3 u}\right) du$$

$$= \frac{\psi_1(x)}{x\log^2 x} + O(1) + \int_2^x \psi_1(u)\frac{1+\frac{2}{\log u}}{u^2\log^2 u}\,du = O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x\log^2 x}\right) + O(1) + O\int_2^x u^{\frac{3}{2}} \frac{}{u^2}$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) + O\int_2^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{\sqrt{2}\log^2 2} + O\int_{\sqrt[3]{x}}^x \frac{du}{\sqrt{u}\log^2(\sqrt[3]{x})}$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) + O(\sqrt[3]{x}) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right).$$

119) liefert also

$$\omega(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + d_0 \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} - \sum_{\gamma=0} \frac{1}{\varrho} \int_2^x \frac{u^{\varrho-1}}{\log^2 u} du + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right).$$

Nun ist

$$\Lambda(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} = \left\{\frac{u}{\log u}\right\}_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + O(1),$$

also für reelles $\varrho > 0$

$$\Lambda(x^\varrho) = \frac{x^\varrho}{\varrho \log x} + \int_2^{x^\varrho} \frac{du}{\log^2 u} + O(1) = \frac{x^\varrho}{\varrho \log x} + \int_{\sqrt[\varrho]{2}}^x \frac{\varrho v^{\varrho-1} dv}{\varrho^2 \log^2 v} + O(1)$$

$$= \frac{x^\varrho}{\varrho \log x} + \frac{1}{\varrho} \int_2^x \frac{v^{\varrho-1} dv}{\log^2 v} + O(1).$$

Daher wird

$$\omega(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + d_0 \Lambda(x) - d_0 \frac{x}{\log x} - \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho) + \sum_{\gamma=0} \frac{1}{\varrho} \frac{x^\varrho}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right),$$

$$\omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho) = \frac{\psi(x) - d_0 x + \sum_{\gamma=0} \frac{x^\varrho}{\varrho}}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right);$$

also ist a fortiori (116) gültig.

2. Es sei χ beliebig. Für $s > 1$ ist

$$\log \zeta(s, \chi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\omega(k) - \omega(k-1)}{k^s} = s \int_2^\infty \frac{\omega(u)}{u^{s+1}} du.$$

Ferner ist dort

120) $$\int_2^\infty \frac{du}{u^s \log u} = \log \frac{1}{s-1} + \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ ganz ist; denn die Ableitung der linken Seite ist

$$-\int_2^\infty \frac{du}{u^s} = -\frac{1}{s-1} \frac{1}{2^{s-1}} = -\frac{1}{s-1} + \varphi_1(s),$$

wo $\varphi_1(s)$ ganz ist. Andererseits ist für $s > 1$

121) $$\int_2^\infty \frac{du}{u^s \log u} = \int_2^\infty \frac{du}{\log u} s \int_u^\infty \frac{dv}{v^{s+1}} = s \int_2^\infty \frac{dv}{v^{s+1}} \int_2^v \frac{du}{\log u} = s \int_2^\infty \frac{\Lambda(v)}{v^{s+1}} dv.$$

Für $s > 1$ ist also

$$\log \zeta(s, \chi) - d_0 \log \frac{1}{s-1} - d_0 \varphi(s) = s \int_2^\infty \frac{\omega(u) - d_0 \Lambda(u)}{u^{s+1}} du. \tag{122}$$

Wäre nun gegen die Behauptung

$$\omega(x) - d_0 \Lambda(x) = o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log \log \log x\right), \tag{123}$$

so wäre die rechte Seite von (122) für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, also ebenda $\zeta(s, \chi) \neq 0$, also $\Theta = \frac{1}{2}$. Im Falle $\Theta = \frac{1}{2}$ war aber (123) schon in 1. widerlegt.

3. Es sei χ reell. Es darf jetzt $\frac{1}{2} < \Theta \leqq 1$ angenommen werden. Für $s > 1$, $0 < \varrho < 1$, ist nach (120) und (121), wenn $\varphi_2(s), \ldots$ ganze Funktionen bezeichnen,

$$\log \frac{1}{\frac{s}{\varrho} - 1} + \varphi_2(s) = \frac{s}{\varrho} \int_2^\infty \frac{\Lambda(v)}{v^{\frac{s}{\varrho}+1}} dv = \frac{s}{\varrho} \int_{\sqrt[\varrho]{2}}^\infty \frac{\Lambda(u^\varrho)}{u^{s+\varrho}} \varrho u^{\varrho-1} du = s \int_{\sqrt[\varrho]{2}}^\infty \frac{\Lambda(u^\varrho)}{u^{s+1}} du$$

$$= s \int_2^\infty \frac{\Lambda(u^\varrho)}{u^{s+1}} du + \varphi_3(s),$$

$$s \int_2^\infty \frac{\Lambda(u^\varrho)}{u^{s+1}} du = \log \frac{1}{s-\varrho} + \varphi_4(s),$$

$$\begin{cases} \log \zeta(s, \chi) - d_0 \log \frac{1}{s-1} + \sum_{\gamma=0} \log \frac{1}{s-\varrho} \pm \frac{s}{s-\Theta+\delta} + \varphi_5(s) \\ \qquad = s \int_2^\infty \frac{1}{u^{s+1}} \left(\omega(u) - d_0 \Lambda(u) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(u^\varrho) \pm u^{\Theta-\delta}\right) du. \end{cases} \tag{124}$$

δ sei so gewählt, daß $\zeta(s, \chi)$ für $\Theta - \delta < s < \Theta$ nicht verschwindet. Dann ist die linke Seite von (124) für $s > \Theta - \delta$ regulär: also kann (analog zum Schlusse beim Beweis des Satzes CXIX) die Klammer rechts nicht von einer Stelle an festes Vorzeichen haben. Daher ist

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{x^{\Theta-\delta}} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{x^{\Theta-\delta}}$$

also a fortiori

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log \log \log x} > 0 > \liminf_{x=\infty} \frac{\omega(x) - d_0 \Lambda(x) + \sum_{\gamma=0} \Lambda(x^\varrho)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log \log \log x}$$

Anhang.

Andere Äquivalenzbegriffe.

Definition XIX: $\mathfrak{a}$ *heißt äquivalent zu* $\mathfrak{b}$ *modulo* $\mathfrak{f}$ *im weiteren Sinn, wenn* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ *ist, und es zwei ganze Zahlen* α, β *im Körper gibt, so daß*

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \qquad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \qquad N\alpha > 0, \qquad N\beta > 0$$

ist.

Definition XX: $\mathfrak{a}$ *heißt äquivalent zu* $\mathfrak{b}$ *modulo* $\mathfrak{f}$ *im weitesten Sinn, wenn* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ *ist, und es zwei ganze Zahlen* α, β *im Körper gibt, so daß*

$$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \qquad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist.

Satz CXXI: *Die drei in den Sätzen* XXII—XXIV *ausgedrückten Postulate der Äquivalenz gelten auch für die beiden neuen Begriffe, so daß von Klassen gesprochen werden kann.*

Beweis: Klar nach den alten Formeln, da das Produkt zweier Zahlen positiver Norm selbst positive Norm hat.

Satz CXXII: *Es gelten Satz* XXVII, XXVIII *und* XXIX *auch für die beiden neuen Äquivalenzbegriffe, so daß die Klassen eine Abelsche Gruppe bilden.*

Beweis: Klar.

Satz CXXIII: *Zwei* mod $\mathfrak{f}$ *äquivalente Ideale im weiteren Sinn sind* [] *im weitesten Sinn; zwei* mod $\mathfrak{f}$ *äquivalente Ideale im bisherigen (engeren) Sinn sind es im weiteren Sinn. Jede Klasse* mod $\mathfrak{f}$ *im weiteren und weitesten Sinn zerfällt also in eine oder mehrere Klassen im engeren Sinn, so daß die Klassenzahl im weiteren und die im weitesten Sinn endlich ist.*

Beweis: Klar, da jede total positive Zahl positive Norm hat.

Satz CXXIV: *Jede Klasse im weitesten Sinn zerfällt in gleich viele Klassen im engeren Sinn. Diese Zahl* g *ist* 1 *für* $r_1 = 0$; *im Falle* $r_1 > 0$ *ist, wenn für die Einheiten* ε, *welche* $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ *sind, bei* $\operatorname{sign}\varepsilon^{(1)}, \ldots, \operatorname{sign}\varepsilon^{(r_1)}$ *genau* g_1 *der* 2^{r_1} *Möglichkeiten vorkommen,* $g = \frac{2^{r_1}}{g_1}$.

Beweis: Es sei $r_1 > 0$, da sonst die Behauptung trivial ist. $\mathfrak{a}$ sei ein festes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Ideal, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ zwei beliebige zu $\mathfrak{a}$ im weitesten Sinne mod $\mathfrak{f}$ äquivalente Ideale. In

(125) $$[\alpha_1]\mathfrak{a} = [\beta_1]\mathfrak{b}_1, \qquad \alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}},$$

(126) $$[\alpha_2]\mathfrak{a} = [\beta_2]\mathfrak{b}_2, \qquad \alpha_2 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_1 \succ 0$, $\alpha_2 \succ 0$ angenommen werden. Ist $\beta_1\beta_2 \succ 0$, so ist $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}$, wie aus

$$[\alpha_2\beta_1]\mathfrak{b}_1 = [\alpha_1\beta_2]\mathfrak{b}_2$$

nach Satz XXV folgt. Alle $\mathfrak{b}$ mit

(127) $$[\alpha]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}, \qquad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \qquad \alpha \succ 0,$$

(128) $$\operatorname{sign}\beta^{(1)} = \varepsilon_1, \ldots, \operatorname{sign}\beta^{(r_1)} = \varepsilon_{r_1},$$

wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1}$ eine feste der 2^{r_1} Möglichkeiten ± 1 ist, gehören also derselben Klasse im engeren Sinn an. Jede dieser 2^{r_1} Möglichkeiten kommt vor; denn wenn $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ und den Bedingungen (128) gemäß gewählt wird, so sei $\mathfrak{b} = [\beta]\mathfrak{a}$; dann ist $[\beta^2]\mathfrak{a} = [\beta]\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $\beta^2 \succ 0$, $\beta^2 \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, so daß $\beta^2 = \alpha$ gesetzt werden kann. Es fragt sich nun, wie viele dieser höchstens 2^{r_1} Klassen im engeren Sinn verschieden sind. Dazu wähle ich 2^{r_1} Repräsentanten, und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ mögen zwei dieser (in Wahrheit gleichen oder verschiedenen) Klassen mod $\mathfrak{f}$ repräsentieren.

Es sei in (125), (126) mit $\alpha_1 \succ 0$, $\alpha_2 \succ 0$

$$\operatorname{sign}\beta_1^{(1)} = \varepsilon_1, \ldots, \operatorname{sign}\beta_1^{(r_1)} = \varepsilon_{r_1}, \quad \operatorname{sign}\beta_2^{(1)} = t_1, \ldots, \operatorname{sign}\beta_2^{(r_1)} = t_{r_1}.$$

Ich werde zunächst zeigen, daß dann und nur dann

$$\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist, wenn es eine Einheit $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ mit

(129) $$\operatorname{sign}\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_1 t_1, \ldots, \operatorname{sign}\varepsilon^{(r_1)} = \varepsilon_{r_1} t_{r_1}$$

gibt.

1. Es gebe ein solches ε. Dann ist

$$[\alpha_1]\mathfrak{a} = [\varepsilon\beta_1]\mathfrak{b}_1,$$
$$[\alpha_2]\mathfrak{a} = [\beta_2]\mathfrak{b}_2,$$

$$[\alpha_2\varepsilon\beta_1]\mathfrak{b}_1 = [\alpha_1\beta_2]\mathfrak{b}_2, \quad \alpha_2\varepsilon\beta_1 \equiv \alpha_1\beta_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \alpha_2\varepsilon\beta_1\alpha_1\beta_2 \succ 0,$$

also nach Satz XXV

$$\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

2. Ist

$$\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}},$$

so ist

$$[\gamma_1]\mathfrak{b}_1 = [\gamma_2]\mathfrak{b}_2, \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \gamma_1 \succ 0, \quad \gamma_2 \succ 0,$$

also

$$[\alpha_2\beta_1\gamma_2] = [\alpha_1\beta_2\gamma_1],$$
$$\varepsilon\alpha_2\beta_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_2\gamma_1,$$

o ε eine Einheit mit

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$s_j \operatorname{sign} \varepsilon^{(j)} = t_j,$$

$$\operatorname{sign} \varepsilon^{(j)} = \frac{t_j}{s_j} = s_j t_j$$

t.

Wenn also $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ genau g_1 der Möglichkeiten für $\operatorname{sign} \varepsilon^{(1)}, \ldots,$ ign $\varepsilon^{(r_1)}$ bietet, sind von den obigen 2^{r_1} Repräsentanten genau je g_1 einnder äquivalent mod $\mathfrak{f}$. g_1 ist also ein Teiler von 2^{r_1} (was auch darum irekt klar ist, weil diejenigen der 2^{r_1} Möglichkeiten, denen eine Einheit ntspricht, eine Gruppe bilden), und es ist $g = \frac{2^{r_1}}{g_1}$.

Satz CXXV: *Jede Klasse im weiteren Sinn ist für $r_1 = 0$ Klasse m engeren Sinn und zerfällt für $r_1 > 0$ in je $\frac{2^{r_1-1}}{g_2}$ Klassen im engeren Sinn, wo g_2 die Anzahl der Möglichkeiten* $\operatorname{sign} \varepsilon^{(1)}, \ldots, \operatorname{sign} \varepsilon^{(r_1)}$ *für eine Einheit $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ mit positiver Norm $\left(d.\,h. \prod_{j=1}^{r_1} \operatorname{sign} \varepsilon^{(j)} = 1\right)$ ist.*

Beweis: Es sei $r_1 > 0$. Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$; es seien $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ zu $\mathfrak{a}$ n weiteren Sinn mod $\mathfrak{f}$ äquivalent. In (125), (126) mit den Nebenedingungen $N\alpha_1 > 0$, $N\alpha_2 > 0$, $N\beta_1 > 0$, $N\beta_2 > 0$, wo sogar $\alpha_1 \succ 0$, $_2 \succ 0$ angenommen werden kann, ist für $\beta_1\beta_2 \succ 0$ sicher $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}$. lle $\mathfrak{b}$ mit (127), (128), wo $s_1, \ldots, s_{r_1}$ eine feste der 2^{r_1-1} Möglichkeiten $\neq 1$ mit $s_1 s_2 \ldots s_{r_1} = 1$ ist, gehören also derselben Klasse im engeren Sinn n. Ich wähle 2^{r_1-1} Repräsentanten; $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ seien zwei derselben.

Es ergibt sich nun aus dem vorigen Beweis, daß dann und nur dann $_1 \sim \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist, wenn es eine Einheit $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ mit (129) gibt; o ipso ist für diese Einheit $N\varepsilon = 1$. Und damit ist die Anzahlbestimnung $\frac{2^{r_1-1}}{g_2}$, also insbesondere die Unabhängigkeit der Anzahl von der lasse im weiteren Sinn bewiesen.

Satz CXXVI: *Für jede Klasse im weiteren bzw. weitesten Sinn ist, enn $h_1(\mathfrak{f})$ die zugehörige Klassenzahl ist, die Anzahl $H(x; \mathfrak{H})$ der deale mit Norm $\leqq x$*

$$\frac{h}{h_1(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O\left(x^{1 - \frac{1}{n+1}}\right),$$

ber für kein $\vartheta < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

$$\frac{h}{h_1(\mathfrak{f})} \lambda \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) x + O(x^{\vartheta}).$$

Beweis: Ersteres folgt aus Satz XCVI, letzteres aus Satz CII.

Satz CXXVII: *Ist* $\chi_1(\mathfrak{a})$ *ein entsprechend zum früheren definierte Charakter der Gruppe der Klassen im weiteren oder weitesten Sinn, s ist* $\chi_1(\mathfrak{a})$ *gleich einem unserer alten Charaktere* $\chi(\mathfrak{a})$ *für den engere Klassenbegriff, also*

$$\zeta_1(s,\chi_1)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi_1(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} \qquad (\sigma>1)$$

eines unserer alten $\zeta(s,\chi)$, *so daß alle Eigenschaften unserer* ζ*-Funktionen für die* ζ_1*-Funktionen gelten.*

Beweis: Wird einfach $\chi(\mathfrak{a})=\chi_1(\mathfrak{a})$ gesetzt, so ist $\chi(\mathfrak{a})=0$ fü $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\neq\mathfrak{o}$, sonst $\chi(\mathfrak{a})\neq 0$, und aus $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $(\mathfrak{b},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}\,(\mathrm{mod}$ folgt, weil a fortiori $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{b}$ im weiteren bzw. weitesten Sinn äquivalen ist, $\chi_1(\mathfrak{a})=\chi_1(\mathfrak{b})$, also $\chi(\mathfrak{a})=\chi(\mathfrak{b})$.

Göttingen, den 8. Februar 1918.

(Eingegangen am 10. Februar 1918.)

Über einen Osgoodschen Satz aus der Integralrechnung.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

1. Herr F. Riesz hat kürzlich[1]) einen neuen Beweis für den folgenden Osgoodschen Satz veröffentlicht:

Wenn die $f_n(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig beschränkte Folge stetiger Funktionen sind, für welche der $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion ist, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Die Arbeit des Herrn Riesz veranlaßt mich, auch meinen Beweis dieses Satzes zu veröffentlichen, den ich seit 1916 in Vorlesungen vortrage. Ich halte ihn für wesentlich kürzer und durchsichtiger als den Rieszschen, und benutze gleich ihm nur die allerelementarsten Hilfsmittel. Daß ich einmal von einem bekannten Borelschen Satz Gebrauch mache, wird mir kein Kenner verübeln. Natürlich sind alle Integrale im Riemannschen Sinne zu nehmen. Die nun folgende Nr. 2 ist dem Beweise eines Hilfssatzes gewidmet, der dann in Nr. 3 in wenigen Zeilen die Begründung des Osgoodschen Satzes ermöglicht.

2. Offenbar genügt es anzunehmen, daß in $a \leqq x \leqq b$ die Funktion $f(x)$ identisch gleich Null sei. Ich könnte ja sonst die Folge $f_n(x) - f(x)$ betrachten. Dann bezeichne ich mit $J_n(\varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte, in welchen $f_n(x) > \varepsilon$ ist. Sie besteht wegen der Stetigkeit von $f_n(x)$ aus endlich oder unendlich vielen Intervallen einer Gesamtlänge $l_n(\varepsilon)$. Ich will zunächst beweisen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ der $\lim_{n\to\infty} l_n(\varepsilon) = 0$ ist. Wenn dies nämlich nicht der Fall ist, so darf ich unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $\lim_{n\to\infty} l_n(\varepsilon) = 2L > 0$ sei. Ferner darf ich unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß *alle* $l_n > L$ seien. Ich führe nun die

[1]) F. Riesz, Über Integration unendlicher Folgen, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 26 (1917), S. 274–278.

Vereinigungsmenge D der $J_n(\varepsilon)$ ein. Sie besteht aus endlich oder unendlich vielen Intervallen, deren Gesamtlänge größer als L ist. Ich ziehe noch eine konvergente Reihe wesentlich positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ heran, für die $\sum_1^\infty \varepsilon_k < \frac{L}{2}$ sein möge. Nun beschneide ich D. Ich behalte nämlich nur endlich viele seiner Intervalle bei, deren Gesamtlänge um höchstens $\frac{\varepsilon_1}{2}$ kleiner ist als die von D, also auch größer als $L - \frac{\varepsilon_1}{2}$ bleibt. Von jedem Ende eines jeden dieser endlich vielen (offenen) Intervalle schneide ich noch kleine Stückchen weg, deren Gesamtlänge $\frac{\varepsilon_1}{2}$ nicht übertreffen soll. Es bleibt so eine endliche Menge von *abgeschlossenen* Strecken übrig, die ich mit D_1 bezeichnen will. Nach dem Borelschen Satz kann sie von endlich vielen Intervallen aus der Menge der $J_k(\varepsilon)$ bedeckt werden. Es mögen dazu etwa Intervalle aus den Mengen $J_1(\varepsilon), \ldots, J_{n_1}(\varepsilon)$ benutzt werden. Dann bedecken die weiteren Mengen $J_{n_1+1}(\varepsilon)$ u. ff. einen Teil von D_1. Er heiße D'. Diese Menge besteht wieder aus endlich oder unendlich vielen Intervallen, deren Gesamtlänge größer als $L - \varepsilon_1$ ist. Denn D_1 unterscheidet sich nur um Intervalle von einer ε_1 nicht übertreffenden Gesamtlänge von D. Dies D' wird nun ebenso behandelt wie vorhin D. Es wird um ε_2 beschnitten, so daß eine aus endlich vielen Intervallen bestehende Menge D_2 von einer $L - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ übertreffenden Länge übrigbleibt. Dann wird diese mit endlich vielen Intervallen aus $J_{n_1+1}(\varepsilon), \ldots, J_{n_2}(\varepsilon)$ bedeckt. Der noch von $J_{n_2+1}(\varepsilon)$ u. ff. bedeckte Teil hat dann eine Gesamtlänge, die mindestens $L - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ beträgt. Diese Menge heiße D''. Sie wird so behandelt wie D und D'. So fortfahrend erhalten wir eine unendliche Folge $D_1, D_2, \ldots$ von Intervallmengen. Eine jede besteht aus endlich vielen Intervallen, deren Gesamtlänge mindestens $\frac{L}{2}$ ist. (Die Summe aller ε_k beträgt ja höchstens $\frac{L}{2}$.) Jede dieser Mengen D_k ist Teilmenge aller derjenigen D_i, welche eine kleinere Nummer tragen. *Es gibt* bei dieser Lage der Dinge *mindestens einen Punkt, der unendlich vielen der D_k angehört.* Denn in mindestens eines der endlich vielen Intervalle, aus welchen D_1 besteht, dringen unendlich viele der weiteren Mengen ein. Dies seien etwa $D_2, D_5, D_7, D_{13} \ldots$ Ein solches Intervall von D_1 sei d_1. Dieses betrachte ich weiter. In ihm liegen endlich viele Intervalle von D_2. In mindestens einem derselben, d_2, liegen unendlich viele der weiteren Mengen, etwa $D_5, D_{13} \ldots$ In d_2 wieder liegen endlich viele Intervalle von D_5 und in mindestens eines derselben dringen unendlich viele der weiteren Mengen ein. So fortfahrend erhalte ich eine unendliche Folge ineinanderliegender Intervalle $d_1, d_2, d_5 \ldots$, die mindestens einen innersten Punkt besitzen, der also allen Intervallen an

ehört. In ihm haben aber dann unendlich viele der Funktionen $f_n(x)$ inen ε übertreffenden Betrag, entgegen der Annahme, daß auch in diesem unkte $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ sein soll[2]).

3. Nachdem wir so eingesehen haben, daß $\lim_{n\to\infty} l_n(\varepsilon) = 0$ sein muß, bleibt ur noch darzulegen, daß aus dieser Tatsache folgt, daß $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$ st. Ich will allgemein zeigen:

Wenn die stetige Funktion $\varphi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ dem Betrage nach leiner als M ist, und wenn überdies $|\varphi(x)|$ nur in unendlich vielen ntervallen einer η nicht übertreffenden Gesamtlänge ε übertrifft, so ist

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| < \eta M + (b - a - \eta)\varepsilon.$$

Um das einzusehen, teile ich $a \leqq x \leqq b$ in k gleiche Teile. Ich muß nur rkennen, daß ich zu jeder solchen Einteilung eine Näherungssumme des ntegrales konstruieren kann, welche der im Satz angegebenen Abschätzung enügt. Zu dem Zwecke bemerke ich, daß ich der Regel nach in jedem eilintervall eine Stelle ξ finden kann, in der $|f(\xi)| \leqq \varepsilon$ ist. Höchstens ei $\frac{\eta k}{(b-a)}$ der k gleichlangen Intervalle ist dies unmöglich[3]). Betrachte ch daher eine Näherungssumme $\frac{f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_k)}{k}(b-a)$, so sind alle $f(\xi)| \leqq \varepsilon$. Für höchstens $\frac{\eta k}{(b-a)}$ derselben kann ich nur die Abschätzung $f(\xi)| < M$ verwenden. Diese liefern daher zur Näherungssumme einen eitrag, dessen Betrag $M\eta$ nicht übertrifft, während der Betrag der brigen Summanden unter $\varepsilon(b-a-\eta)$ bleibt. Beides zusammen liefert ie gewünschte Abschätzung.

---

[2]) Man wird bemerkt haben, daß durch die Ausführungen dieser Nummer gleichzeitig der folgende Satz über Punktmengen bewiesen ist: Wenn irgendeine Folge von ntervallmengen aus $a \leqq x \leqq b$ vorgelegt ist, deren Gesamtlängen durchweg oberhalb ner wesentlich positiven Schranke liegen, so gibt es mindestens einen Punkt, der llen diesen Intervallen angehört. Dieser Satz ist natürlich ein Spezialfall eines bekannten Theorems über das Maß des Durchschnittes einer Folge meßbarer Punktengen. Im Gegensatz zu diesem ist er aber ohne ein Eingehen auf allgemeine Meßbarkeitsfragen beweisbar.

[3]) Denn sonst würde die Gesamtlänge derjenigen Intervalle, in welchen $|\varphi(x)| > \varepsilon$ t, η übertreffen.

(Eingegangen am 11. März 1918.)

Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

Unter allen ganzen Funktionen sind die linearen die einzigen, welche keinen Wert mehrfach annehmen. Dieser klassische Satz steht in enger Beziehung zum Picardschen Satz, in welchem er als ein ganz spezieller Fall enthalten ist. Man kann ihn dahin verallgemeinern, daß eine jede in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle eindeutige und reguläre Funktion einzelne Werte mehrfach annimmt [1]). Diese Sätze lassen gewisse Vertiefungen zu, deren erste (§ 1) derjenigen analog ist, welche Landau für den Picardschen Satz gefunden hat. Auch die zweite (§ 2) besitzt, wie ich demnächst zeigen will, eine Parallele im Gebiet des Picardschen Satzes. (Vgl. auch den Schluß dieser Arbeit.)

§ 1.

1. Vor einiger Zeit habe ich den folgenden Satz bewiesen [2]):

Satz I: *Wenn* $\varrho > 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ *ist, so besitzt die durch die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

dargestellte Funktion im Kreise $|z| < \varrho$ *entweder singuläre Stellen oder sie nimmt daselbst einzelne Werte mehrfach an. Die für* ϱ *angegeben*

---

[1]) Das wird am bequemsten so bewiesen: Der singuläre Punkt liege bei $z=$ und $|z|<1$ werde schlicht abgebildet. Bedeutet dann r irgendeine positive Za unter Eins, so läßt das Bild von $|z|<r$ einzelne Punkte unbedeckt, und man de unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß die Umgebung des unendlich fern Punktes frei bleibt, daß also die Funktion beschränkt ist. Daher liegt bei $z=$ höchstens eine hebbare Singularität.

[2]) Vgl. L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welc eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. d. Kgl. Preu Akad., Berlin 1916, S. 940–955.

Schranke ist die genaue. Es gibt also Funktionen (1), *welche den Kreis* $|z| < 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ *schlicht abbilden.*

Ich gehe mit ein paar Worten auf den Beweis ein, weil ich a. a. O. den Satz nicht genau in dieser Fassung ausgesprochen habe. Bei dem Falle $a_1 = 0$ brauche ich mich nicht aufzuhalten. Denn dann ist die für ϱ angegebene Schranke Null. Und tatsächlich verschwindet dann die Ableitung der Funktion für $z = 0$, so daß nicht einmal die nächste Umgebung des Punktes $z = 0$ schlicht abgebildet wird. Sei also $a_1 \neq 0$. Wenn dann die Funktion (1) in einem Kreise $|z| < \varrho$ mit einem $\varrho > 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ regulär wäre und ihn schlicht abbildete, so müßte die Funktion

$$\frac{1}{\varrho a_1}\mathfrak{P}(\varrho z) = \frac{a_0}{\varrho a_1} + z + \frac{a_2 \varrho}{a_1} z^2 + \dots$$

eine schlichte Abbildung von $|z| < 1$ liefern. Dazu muß aber, wie ich a. a. O. S. 945 gezeigt habe, der Koeffizient von z^2 kleiner als zwei, also $\varrho < 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ sein. Weiter vermittelt die Funktion[3])

$$\varphi(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots nz^n + \dots = \frac{z}{(1-z)^2}$$

eine schlichte Abbildung des Einheitskreises auf die volle von $-\frac{1}{4}$ bis ∞ längs der negativen reellen Achse begrenzte Ebene. Daher leistet

$$a_1 \varrho \varphi\left(\frac{z}{\varrho}\right) = a_1 z + \frac{2a_1}{\varrho} z^2 + \dots$$

eine schlichte Abbildung von $|z| < \varrho$ und hier gilt $\frac{2a_1}{a_2} = \frac{2a_1}{2\frac{a_1}{\varrho}} = \varrho$.

2. Für jeden einzelnen der weiteren Koeffizienten besteht ein ganz analoger Satz. Es gibt also eine Zahlenfolge k_n derart, daß für $\varrho > k_n\left|\frac{a_1}{a_n}\right|$

---

[3]) $\varphi(z)$ und $e^{-i\vartheta}\varphi(e^{i\vartheta}z)$ sind die einzigen in $|z| < 1$ schlichten Funktionen $f(z)$, für die $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $|f''(0)| = 2$ ist (a. a. O.). Es ist bemerkenswert, daß die obere Schranke des Schlichtheitsradius nicht von den ganzen rationalen Funktionen zweiten Grades erreicht wird. Soll nämlich

$$z + a_2 z^2$$

den Kreis $|z| < 1$ schlicht abbilden, so muß $|a_2| \leqq \frac{1}{2}$ sein; denn nur dann liegt die Nullstelle der Ableitung nicht im Einheitskreis. Tatsächlich bildet aber auch $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ den Kreis $|z| < 1$ schlicht ab. Denn es wird

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| = |1 + \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)| > 1 - \tfrac{1}{2}(1+1) = 0$$

für $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so daß also die Funktion im Einheitskreis keinen Wert mehrfach annimmt. Daher bildet auch $a_1 z + a_2 z^2$ nur den Kreis $|z| < \frac{1}{2}\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ schlicht ab.

die Funktion (1) entweder im Kreise $|z| < \varrho$ Singularitäten besitzt oder daselbst einzelne Werte mehrfach annimmt. Das ist ein ganz spezieller Fall viel allgemeinerer Sätze, die ich a. a. O. bewiesen habe. Indessen ist die wirkliche Berechnung dieser Konstanten k_n, allgemeiner die wirkliche Bestimmung der in meiner Arbeit aufgewiesenen Koeffizientenräume, bisher nicht gelungen. Nur eine obere Schranke für die k_n läßt sich aus der Pickschen Fassung des Koebeschen Verzerrungssatzes gewinnen (vgl. weiter unten S. 161, Fußnote [5]). Es hat sich ergeben, daß $k_n < 5{,}1\, n^2$ ist. Der a. a. O. ausgesprochenen Vermutung, daß $k_n = n$ ist, möchte ich auch hier wieder Ausdruck geben.

Macht man aber die Annahme, daß $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$ sei, so ergibt sich folgender

Satz II: *Es gibt eine den Ungleichungen*

$$\frac{1}{n-2} \leqq k_n' < \frac{1}{\sqrt{n-2}}$$

genügende Zahlenfolge k_n' derart, daß für $\varrho > k_n' \left|\frac{a_1}{a_n}\right|$ die Funktion

$$a_0 + a_1 z + a_n z^n + \ldots$$

im Kreise $|z| < \varrho$ entweder Singularitäten besitzt oder einzelne Werte mehrfach annimmt. Für $n = 3$ fallen die beiden Schranken zusammen. Es ist also $k_3 = 1$.

Nach den bei Satz I angestellten Überlegungen genügt es zu beweisen, daß die Funktion

$$f(z) = z + a_n z^n + \ldots$$

den Einheitskreis nur dann schlicht abbilden kann, wenn $|a_n| \leqq k_n'$ ist. Der Beweis verläuft noch einfacher, wie der a. a. O. für $n = 2$ gegebene. Wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ schlicht ist, so ist $\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ für $|z| > 1$ schlicht.

Nun ist aber

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = z - a_n \frac{1}{z^{n-2}} + \ldots \tag{2}$$

Da aber für eine Reihe

$$z + \alpha_1 \frac{1}{z} + \ldots,$$

welche $|z| > 1$ schlicht abbildet (a. a. O.[2]) S. 942)

$$|\alpha_1|^2 + 2|\alpha_2|^2 + \ldots + n|\alpha_n|^2 + \ldots \leqq 1$$

sein muß, so ist hier namentlich $|a_n| \leqq \frac{1}{\sqrt{n-2}}$, also jedenfalls auch

$k_n' \leqq \frac{1}{\sqrt{n-2}}$. Diese Schranke könnte überdies nur erreicht werden, wenn alle auf a_n in (2) folgenden Koeffizienten verschwinden. Es käme also neben gewissen trivialen Transformierten nur

$$z + \frac{1}{\sqrt{n-2}} \frac{1}{z^{n-2}}$$

in Betracht. Diese Funktion bildet aber den Kreis $|z| > 1$, sofern $n > 3$ ist, *nicht* schlicht ab, weil die Ableitung

$$1 - \frac{1}{z^{n-1}} \sqrt{n-2}$$

für z-Werte von einem Eins übertreffenden Betrage verschwindet, sobald $n > 3$ ist. Für $n = 3$ aber kommt die Funktion $z + \frac{1}{z}$ zum Vorschein, welche tatsächlich schlicht abbildet. Also ist $k_3' = 1$ und $k_n' < \frac{1}{\sqrt{n-2}}$, sobald $n > 3$ ist. Wohl aber bildet die Funktion

$$w(z) = z + \frac{1}{n-2} \frac{1}{z^{n-2}}$$

den Bereich $|z| > 1$ schlicht ab. Denn es wird

$$\left| \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \left| 1 - \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{z_1^{n-2} z_2} + \frac{1}{z_1^{n-3} z_2^2} + \ldots + \frac{1}{z_1 z_2^{n-2}} \right) \right|$$

$$> 1 - \frac{1}{n-2} (1 + 1 + \ldots + 1) = 1 - 1 = 0$$

für $|z_1| > 1$ und $|z_2| > 1$. Daher kann die Funktion $w(z)$ für keine zwei Werte von z, deren Betrag Eins übertrifft, denselben Wert annehmen. So ist also wirklich

$$\frac{1}{n-2} \leqq k_n' < \frac{1}{\sqrt{n-2}}.$$

Ich komme nun zum Hauptgegenstand meiner Arbeit.

§ 2.

1. Wenn die Funktion $\varphi(\zeta)$ für $|\zeta| < 1$ regulär ist und eine schlichte Abbildung dieses Kreises vermittelt, so gilt nach Herrn Pick[4][5])

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(0)| \leqq \frac{|\varphi'(0)|}{4} \left\{ \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \right)^2 - 1 \right\} = |\varphi'(0)| \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}$$

[4]) G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz, Leipziger Berichte 1916, S. 58–64, insb. S. 62. In der hier angegebenen Formel steht dort statt des Exponenten 2 ein Exponent $\varkappa$. Aber Herr Pick gibt an, daß $\varkappa$ mit der Konstanten identisch sein muß, deren Wert ich a. a. O. [2]) S. 946 zu 2 bestimmt habe (vgl. oben Satz I).

[5]) Aus dieser Formel kann man die S. 160 gemachte Angabe erschließen, daß

für alle $|\zeta| \leqq \varrho < 1$. Man entnimmt daraus leicht, daß es eine von ζ unabhängige, nur von $\varphi(0)$ und $\varphi'(0)$ abhängende Zahl M gibt, derart, daß für alle $|\zeta| < 1$ die Ungleichung

$$|\varphi(\zeta)| \leqq \frac{M}{(1-|\zeta|)^2}$$

gilt. Diese wollen wir noch ein wenig umformen, um daraus namentlich einen Schluß über das Verhalten von $\varphi(\zeta)$ bei geradliniger Annäherung an einen Peripheriepunkt zu ziehen.

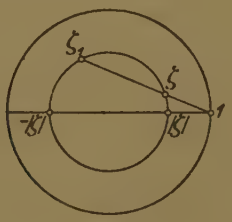


Fig. 1.

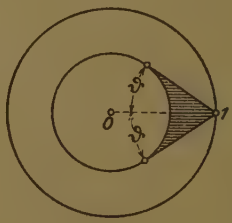


Fig. 2.

Es genügt völlig, die Annäherung an den Punkt $\zeta = 1$ zu betrachten. Ein Blick auf Fig. 1 lehrt, daß wegen des Sekantensatzes

$$\frac{|1-\zeta|\,|1-\zeta_1|}{(1-|\zeta|)\,(1+|\zeta|)} = 1 \tag{3}$$

ist. Nun werde ζ auf den aus Fig. 2 ersichtlichen schraffierten Zipfel beschränkt. Er ist von zwei Geraden durch den Punkt Eins begrenzt,

---

die dort mit k_n bezeichnete Konstante kleiner als $5{,}1\,n^2$ sein muß. Man hat nur auf die in $|z| < 1$ schlichte Funktion

$$z + a_2 z^2 + \ldots$$

unter Verwertung der Pickschen Verzerrungsformel den Cauchyschen Koeffizientensatz anzuwenden. Dann wird

$$|a_n| < \frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2 - 1}{\varrho^n}$$

für jedes $\varrho < 1$. Wir wählen nun ϱ so, daß der Ausdruck rechts seinen kleinsten Wert erhält. Es muß dazu

$$\varrho = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n-1}},$$

also

$$\frac{1+\varrho}{1-\varrho} = n$$

sein. Dann wird

$$|a_n| < \tfrac{1}{4}(n^2-1)\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \tfrac{1}{4}(n^2-1)\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n-1}} < \tfrac{1}{4}\,e^2 n^2 < 5{,}1\,n^2,$$

sobald $n \geqq 3$ ist.

elche mit der reellen Achse den Winkel ϑ einschließen; es ist also im ipfel

$$|\arg(1-\zeta)| \leqq \vartheta.$$

'eiter dient ein Bogen desjenigen Kreises um $\zeta = 0$ als Grenze, der diese eiden Geraden berührt. Es ist also auch $|\zeta| \geqq \sin\vartheta$ im Zipfel. Die änge der beiden Kreistangenten ist $\cos\vartheta$. Daher ist für jedes dem ipfel angehörige ζ

$$|1-\zeta_1| > \cos\vartheta \quad \text{und} \quad 1+|\zeta| < 2.$$

aher wird

$$\frac{|1-\zeta_1|}{1+|\zeta|} > \frac{\cos\vartheta}{2}.$$

lso ist nach (3)

$$\frac{|1-\zeta|}{1-|\zeta|^2} < \frac{2}{\cos\vartheta};$$

etzt man daher

$$N(\vartheta) = \frac{4M}{\cos^2\vartheta},$$

wird

$$|\varphi(\zeta)| \leqq \frac{N(\vartheta)}{|1-\zeta|^2}.$$

haben wir folgenden

Hilfssatz: *Für alle Werte von ζ, welche den beiden Ungleichungen*

$$|\arg(1-\zeta)| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad |\zeta| \geqq \sin\vartheta$$

enügen, ist

$$|\varphi(\zeta)| \leqq \frac{N(\vartheta)}{|1-\zeta|^2}.$$

Dabei ist $N(\vartheta)$ eine für alle $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ erklärte Zahl, welche über alle renzen wächst, wenn $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$ strebt.

2. Ich gehe nun durch die Transformation

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\zeta}$$

om Kreise $|\zeta| < 1$ zur Halbebene $\Re z > 0$ über. Dann sei

$$f(z) = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$$

ne Funktion, welche eine schlichte Abbildung dieser Halbebene ver- ittelt. Offenbar wird dann

$$|f(z)| \leqq \frac{N(\vartheta)}{|1-\zeta|^2} = N(\vartheta)\,|z+\tfrac{1}{2}|^2,$$

bald $|\arg z| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und $\Re z \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\sin\vartheta}$. Denn bei unserer

linearen Transformation gehen die Geraden durch $z = 0$ aus den Kreisen durch $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ hervor. Insbesondere liefern die beiden Geraden $\arg z = \vartheta$ und $\arg z = -\vartheta$ zwei Kreisbogen, die mit der reellen ζ-Achse den Winkel ϑ einschließen. Die Gerade $\Re z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\sin\vartheta}$ geht weiter aus einem Kreis über der Strecke $\zeta = \sin\vartheta$ bis $\zeta = 1$ als Durchmesser hervor. Der z-Bereich (Fig. 3)

$$|\arg z| < \vartheta, \quad \Re z > -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\sin\vartheta}$$

Fig. 3 (schematisch).

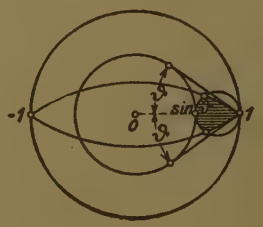


Fig. 4.

also geht aus dem in Fig. 4 schraffierten Bereich hervor. Dieser ist, wie in der Fig. 4 angedeutet ist, ein Teil desjenigen Zipfels, auf welchen sich die im Hilfssatz für $\varphi(\zeta)$ gegebene Abschätzung bezog. So liefert die Anwendung des Hilfssatzes die für $f(z)$ angegebene Abschätzung. Nimmt man weiter $\sin\vartheta \geqq \frac{1}{3}$ an, so wird $-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\sin\vartheta} \geqq 1$. Daher wird im Bereich der Fig. 3

$$|z| < |z|^2.$$

Also wird dann

$$|f(z)| < 4N(\vartheta)|z|^2.$$

Dies ist erst recht dann der Fall, wenn

$$|\arg z| \leqq \vartheta, \quad \sin\vartheta \geqq \tfrac{1}{3}, \quad |z| \geqq \frac{1}{\cos\vartheta}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-\sin\vartheta}\right) = r(\vartheta)$$

gilt.

Hat man endlich durch die Funktion $f(z)$ einen Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ — wir dürfen ihn symmetrisch zur positiven reellen Achse annehmen — schlicht abzubilden, so vermittelt $f(\eta^\alpha)$ eine schlichte Abbildung der Halbebene $\Re\eta > 0$. Daher muß

$$|f(\eta^\alpha)| < 4N(\vartheta)|\eta|^2$$

sein, sobald

$$|\arg\eta| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \qquad \Re\eta \geqq r(\vartheta), \qquad \sin\vartheta \geqq \tfrac{1}{3}$$

gilt. Also wird weiter

$$|f(z)| < 4N(\vartheta)|z|^{\frac{2}{\alpha}},$$

lange

$$|\arg z| \leqq \alpha\vartheta < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \sin\vartheta \geqq \tfrac{1}{3}, \quad |z| \geqq (r(\vartheta))^{\alpha}$$

eibt.

Zur weiteren Verwendung merken wir uns noch einen Teil dieser Erbnisse besonders an.

Satz III: *Wenn die Funktion $f(z)$ einen Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ hlicht abbilden soll, so muß in jedem inneren Teilwinkelraum*

$$f(z) = O\left(|z|^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

in.

3. Ein bekannter Satz von Liouville sagt aus, daß die einzigen in er ganzen Ebene regulären und beschränkten Funktionen die Konstanten nd. Eine erste wesentliche Vertiefung hat dieser Satz im Jahre 1904 [6]) urch Herrn Phragmén erfahren. Er hat ihn auf ganze Funktionen erallgemeinert, die nur in gewissen Winkelräumen beschränkt sind, außerlb derselben aber noch in gewisser nicht zu starker Weise wachsen irfen. Phragméns Satz lautet:

„Die ganze Funktion $F(z)$ möge den folgenden beiden Bedingungen enügen.

1. $|F(z)| < C_1 e^{|z|^{\varkappa}}$ für alle z, die einem gewissen Winkelraum von der Öffnung $\beta\pi$ angehören. Zwischen β und $\varkappa$ soll dabei die Beziehung $\beta\varkappa < 1$ bestehen.
2. $|F(z)| < C_2$ für alle anderen Punkte der Ebene (C_1 und C_2 sind zwei Konstanten).

Eine derartige ganze Funktion ist notwendig eine Konstante."

Ich will aus diesem Satz eine Folgerung ziehen, welche in dem folenden Satz enthalten ist.

IV: *Die ganze Funktion $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ möge in einem Winkelaum der Öffnung $\beta\pi$ der Bedingung $|f(z)| < C_1 e^{|z|^{\varkappa}}$ genügen. Es sei ieder $\beta\varkappa < 1$. Ferner aber soll für die übrigen Punkte der Ebene die nnahme $|f(z)| < C_2 |z|^{\lambda}$ gemacht werden. Dann ist $f(z)$ eine ganze tionale Funktion von höchstens dem λ-ten Grade.*

Zum Beweise nehme ich zunächst $\lambda = n$ ganzzahlig an und betrachte ie Funktion

$$F(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{n-1} z^{n-1}}{z^n}.$$

---

[6]) Vgl. E. Phragmén, Sur une extension d'un théoreme classique de la théorie s fonctions, Acta mathematica 28 (1904), (S. 351–368), S. 351. Einen sehr einchen Beweis und zugleich eine wesentliche Vertiefung enthält die folgende Arbeit: Phragmén und E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique d'analyse, cta math. 31 (1908), (S. 381–406), S. 385.

Sie ist natürlich eine ganze Funktion. Es gilt ja die Darstellung

$$F(z) = a_n + a_{n+1} z + \cdots$$

Für $F(z)$ aber sind die Phragménschen Voraussetzungen erfüllt, wie ohne weiteres einleuchtet. Daher ergibt sich, daß $F(z) = a_n$ ist. Daher wird

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Ist λ nicht ganzzahlig, so setze ich $n = [\lambda]$. Dann gilt ja auch $|f(z)| < C_2 |z|^{n+1}$, so daß also $f(z)$ höchstens vom $(n+1)$-ten Grade sein kann. Nun gilt aber weiter in dem in Satz IV näher bezeichneten Winkelraum

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = 0.$$

Also wird $f(z)$ höchstens vom n-ten Grade.

4. Dies Ergebnis will ich jetzt mit den Überlegungen von 1. und 2. zusammenbringen. Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion, deren Ordnung ϱ nicht übertrifft. Diese Funktion möge nun eine schlichte Abbildung des Winkelraumes $|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$ vermitteln. Dann ist in jedem Teilwinkelraum (nach III) $f(z) = O\left(|z|^{\frac{2}{\alpha}}\right)$. Wenn nun weiter $\varrho(2-\alpha) < 1$ [7]) voraus gesetzt wird, so muß $f(z)$ nach IV eine ganze rationale Funktion sein deren Grad $\frac{2}{\alpha}$ nicht übertrifft. So haben wir

Satz V: *Wenn eine ganze Funktion, deren Ordnung unter $\frac{1}{2-\alpha}$ liegt, eine schlichte Abbildung eines Winkelraumes vermittelt, dessen Öffnung $\alpha\pi$ oder mehr beträgt, so ist sie eine rationale Funktion, deren Grad $\frac{2}{\alpha}$ nicht übersteigt.*

Dies Ergebnis kann auch so ausgesprochen werden:

V′: *Eine ganze transzendente Funktion, deren Ordnung $\frac{1}{2-\alpha}$ nicht übertrifft, nimmt in jedem Winkelraum, dessen Öffnung mehr als $\alpha\pi$ beträgt, einzelne Werte mehrfach an.*

Oder auch so:

V″: *Eine ganze transzendente Funktion der Ordnung ϱ nimmt in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\frac{2\varrho-1}{\varrho}\pi$ übertrifft, einzelne Werte mehrfach an.*

Eine spezielle Folgerung hebe ich besonders hervor:

V_a: *Eine ganze transzendente Funktion, deren Ordnung $\frac{1}{2}$ nicht übertrifft, nimmt in jedem Winkelraum einzelne Werte mehrfach an.*

---

[7]) Der Restwinkelraum hat ja eine Öffnung $2\pi - \alpha\pi = \pi(2-\alpha)$.

5. Dies Ergebnis schließt sich unmittelbar an das bekannte Verhalten der anzen rationalen Funktionen an. Es ist ja klar, daß eine ganze rationale unktion, deren Grad $\frac{2}{\lambda}$ übertrifft, einen Winkelraum der Öffnung $\lambda\pi$ nicht chlicht abbilden kann. Das geht schon deshalb nicht, weil eine ganze tionale Funktion n-ten Grades im Unendlichen die Winkel ver-n-facht. e größer also der Grad wird, um so kleiner wird der Winkelraum, der llenfalls noch schlicht abgebildet werden kann. Daran reiht sich unittelbar der Satz V_a an. Er steht ja auch in guter Übereinstimmung it den bekannten Tatsachen über das Wachstum der Funktionen, deren rdnung unter $\frac{1}{2}$ liegt. Ist aber nun die Geltung von V_a auf die Funkonen der Ordnung unter $\frac{1}{2}$ beschränkt, oder gilt V_a für höhere Ordungen auch noch? Wenn man Beispiele wie die Exponentialfunktion, die rigonometrischen Funktionen, die Gammafunktion, die Besselschen Funkionen usw. durchgeht, immer schließt man schon aus dem in jedem Winkelraum exponentiellen Wachsen oder Abnehmen[8]) dieser Funktionen, aß sie nach III *keinen* Winkelraum schlicht abbilden können. Gleichwohl werden wir nun sehr einfache Beispiele kennen lernen, welche zeigen, aß die in V, V′, V″ gegebenen Schranken die genauen sind. Ich beweise also jetzt:

VI: *Es gibt ganze Funktionen der Ordnung ϱ, welche einen Winkelraum von der Öffnung $\frac{2\varrho-1}{\varrho}\pi$ schlicht abbilden.*

6. Den einfachsten Fall stelle ich an die Spitze: das ist die Ordnung Eins, zu welcher die Halbebene gehört. Hier gilt der

Satz VI_a: *Die Funktion $z+e^{-z}$ bildet die Halbebene $\Re z > 2$ schlicht ab.*

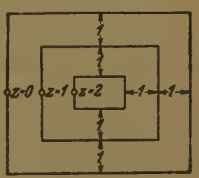


Fig. 5.

Für $\Re z \geqq 0$ ist nämlich $|e^{-z}| \leqq 1$. Daher nimmt $+e^{-z}$ im kleinsten Rechteck der Fig. 5 nur Werte n, die dem mittleren Rechteck derselben Figur anehören. Sei nun A irgendeiner dieser Werte, so ist m Rande des äußeren Rechtecks

$$|z-A|>1 \quad \text{und} \quad |e^{-z}| \leqq 1.$$

Daher nimmt nach dem Satz von Rouché[9]) $z+e^{-z}$ im äußeren Rechteck den Wert A ebenso oft an, wie z selbst, also genau einmal. Daher

[8]) Die reziproke Funktion nimmt ja dann exponentiell zu.

[9]) Es ist folgender Satz gemeint: Wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei in einem abgeschlossenen Bereiche reguläre Funktionen sind und wenn am Rande desselben $|\varphi|<|f|$ ist, so besitzt $f(z)+\varphi(z)$ im Bereiche ebenso viele Nullstellen wie $f(z)$. Dieser Satz ist natürlich fast rascher zu beweisen als auszusprechen. Indessen besitzt er einen erheblichen Wert. So ist ja z. B. ein viel zitierter Satz von Hurwitz (Math.

vermittelt $z + e^{-z}$ eine schlichte Abbildung des kleinsten Rechtecks de Fig. 5. Da aber diese Überlegung für jedes Rechteck aus der Halbeben $\Re z > 2$ gilt, so vermittelt $z + e^{-z}$ eine schlichte Abbildung derselben.

7. Für andere von der Halbebene verschiedene Winkelräume hat ma die Mittag-Lefflerschen Verallgemeinerungen der Exponentialfunktio heranzuziehen. Dann erhält man

Satz $\mathrm{VI_b}$: *Die Funktion* $z + E_\alpha(z)$ *der Ordnung* $\frac{1}{\alpha}$ $(0 < \alpha < 2)$ *ver mittelt eine schlichte Abbildung eines gewissen Winkelraumes der Öffnun* $(2 - \alpha)\pi$.

Die Funktion $z + E_\alpha(z)$ ist durch die Integralstellung

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int \frac{e^{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}}}{\zeta - z}\,d\zeta$$

erklärt. Im Integranden ist mit $e^{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}}$ der folgende Zweig der Funktion e^{ζ} bezeichnet. Man schneide die Ebene von Null bis Unendlich längs de negativen reellen Achse auf und nehme denjenigen Zweig von $e^{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}}$, welche auf der positiven reellen Achse positive reelle Wert hat. Als Integrationsweg ist der in Fig. 6 angegeben Linienzug zu nehmen. Aus dieser Integraldarstellun liest man sehr leicht alle wesentlichen Eigenschafte der Funktion ab [10]). So die Potenzreihendarstellung

Fig. 6.

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}.$$

Wir benötigen namentlich die Tatsache, daß die Funk tion von der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ ist. Das ergibt sich aus de für $|\varphi| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ geltenden Gleichung

$$\lim_{r \to \infty}\left(E_\alpha(r e^{i\varphi}) - \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}}\right) = 0.$$

Ferner brauchen wir den Umstand, daß für $|\varphi| \geqq \alpha\frac{\pi}{2}$ die Funktion be

---

Annalen 33 (1899), S. 247 ff.) eine unmittelbare Folgerung daraus. Es ist daher zweck mäßig, für den angeführten Satz einen kurzen Namen zu haben. Es empfiehlt sich ihn Satz von Rouché zu nennen, weil er von diesem Mathematiker schon im Jahr 1862 in seinem schönen „Mémoire sur la série de Lagrange" (Journal de l'école poly technique, Cahier 39 (1862), S. 218) mit dem vollen Bewußtsein seiner Tragweite au gesprochen wurde.

[10]) Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniform d'une fonction analytique, 5. note, Acta math. 29 (1905), S. 101–181 [S. 132–137].

nränkt ist. Das ergibt sich wie folgt. Auf den beiden Halbgeraden $= \pm \alpha \frac{\pi}{2}$ gilt nach der eben gegebenen Formel die Gleichung

$$\lim_{r \to \infty} \left| E_\alpha \left(r e^{\pm i \alpha \frac{\pi}{2}} \right) \right| = \frac{1}{\alpha},$$

ährend für jede Halbgerade, deren Argument der Ungleichung

$$|\varphi| > \alpha \frac{\pi}{2}$$

nügt, die Gleichung

$$\lim_{r \to \infty} E_\alpha (r e^{i\varphi}) = 0$$

t, wie man unmittelbar der Integraldarstellung ansieht. Daß dann die nktion $E_\alpha(z)$ für $|\arg z| \geqq \alpha \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist, ergibt sich z. B. aus dem non in 3. erwähnten Satz von Phragmén und Lindelöf:

Wenn eine Funktion der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ am Rande eines Winkelraumes, ssen Öffnung kleiner als $\alpha \pi$ ist, dem Betrage nach unter M bleibt, so t das gleiche im Inneren des Winkelraumes.

Wir müssen also nur den Winkelraum $|\arg z| \geqq \alpha \frac{\pi}{2}$ in Einzelräume legen, deren Öffnung unter $\alpha \pi$ bleibt. Dann erkennen wir sofort, daß (z) für $|\arg z| \geqq \alpha \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist. Es sei nun etwa $|E_\alpha(z)| \leqq M$. nn bildet die Funktion

$$z + E_\alpha(z)$$

n Winkelraum

$$\alpha \frac{\pi}{2} < \arg (z + 2\mu) < 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} \quad \left(M = \mu \sin \frac{\alpha \pi}{2} \text{ für } 0 < \alpha \leqq 1, \right.$$

$$\left. M = \mu \sin \pi \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ für } 1 \leqq \alpha < 2 \right)$$

licht ab. Um das einzusehen, betrachten wir wieder zunächst passend vählte Teilbereiche desselben, z. B. den kleinsten Bereich der Fig. 7. ihm nimmt $z + E_\alpha(z)$ nur Werte an, die dem eitgrößten Bereich derselben Figur angehören. dann A ein solcher Wert, so ist am Rande des ößten Bereiches jener Figur

$$|z - A| > M \quad \text{und} \quad |E_\alpha(z)| \leqq M.$$

her nimmt $z + E_\alpha(z)$ im größten Bereich den ert A ebenso oft an, wie z selbst, also genau mal. Daher vermittelt $z + E_\alpha(z)$ eine schlichte bildung des kleinsten Bereiches und damit wieder eine schlichte Abdung des angegebenen Winkelraumes.

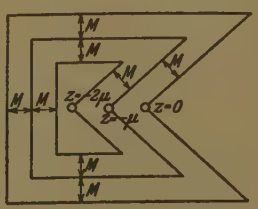


Fig. 7.

8. Die hier für ganze Funktionen besprochenen Ergebnisse übertragen sich ohne weiteres auf das Verhalten irgendwelcher Funktionen an wesentlich singulären Stellen, in deren Umgebung sie von endlicher Ordnung sind.

Während ganze Funktionen endlicher Ordnung nur solche Winkelräume schlicht abbilden können, deren Öffnung eine gewisse Grenze nicht übersteigt, kann ein und dieselbe ganze Funktion unendlicher Ordnung Winkelräume beliebig großer Öffnung schlicht abbilden, deren Scheitelpunkte natürlich nicht beschränkt sein können. Solche Beispiele lassen sich leicht mit Hilfe der von Mittag-Leffler und anderen angegebenen Funktionen bilden, die auf allen Halbstrahlen mit einer oder gar keine Ausnahme gegen Null streben.

Die hier besprochenen Dinge besitzen im Gebiete des Picardschen Satzes gewisse Analoga. Ich will einige Ergebnisse anführen, die ich in dieser Richtung gewonnen habe: Es gibt Polynome eines jeden Grades und ganze Funktionen einer jeden Ordnung unter $\frac{1}{2}$, deren sämtliche Null- und Einsstellen auf der positiven reellen Achse liegen. *Ist aber $f(z)$ eine ganze Funktion, deren Ordnung 1 übertrifft, so nimmt sie in einem jeden Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)$ übertrifft, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an. Liegt endlich ϱ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, so nimmt $f(z)$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\frac{\pi}{\varrho}$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an. Die angegebenen Schranken sind wieder genaue Schranken.*

(Eingegangen am 11. März 1918.)

Zur Theorie der komplexen Zahlen.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

---

1. Es handelt sich in dieser Arbeit um die Erweiterung des Systems er reellen Zahlen zu einem System von Zahlenpaaren. Für diese sind sdann die vier Grundrechnungsarten neu zu erklären mit der Maßgabe, aß man nach den bei den reellen Zahlen üblichen Regeln auch mit den omplexen Zahlen zu rechnen wünscht. Man begnügt sich nun gewöhnch mit der Feststellung, daß man dieser Forderung auf bekannte Weise enügen kann. Erhebt man sich zu einem wissenschaftlich höheren Niveau, wird man immer noch nicht dem Standpunkt gerecht, daß es sich um n Rechnen mit Zahlenpaaren handeln soll. Man setzt vielmehr von ornherein voraus, daß ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten voregt, daß man also nach Auswahl zweier geeigneter Zahlenpaare e_1 und e_2 nter Zugrundelegung der noch zu erklärenden Rechnungsarten alle Zahlenaare in der Form $xe_1 + ye_2$ darstellen kann; x und y bedeuten dabei ewöhnliche reelle Zahlen, die man mit den Zahlenpaaren $(x, 0)$ und $(y, 0)$ identifizieren pflegt. Hat man einmal diese Annahme gemacht, so ihren assoziatives, kommutatives und distributives Gesetz mit Notwendigeit zu den auch in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen üblichen Erärungsweisen von Summe und Produkt. Man wird indessen zugeben, aß die Annahme eines Zahlensystems mit zwei Einheiten mehr der Macht er Gewohnheit, als dem Geist der eigentlichen Fragestellung gerecht wird. enn da handelt es sich kurz gesprochen um diese Frage: *Wie muß man umme und Produkt zweier Zahlenpaare als Funktionen ihrer Koordiaten erklären, wenn für diese Funktionen Funktionalgleichungen beehen sollen, welche die Axiome der Arithmetik zum Ausdruck bringen?* [1])

[1]) Mit diesem Problem befaßte sich meines Wissens als erster F. Schur. Vgl. Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten reellen Zahlen, Math. nn. 33 (1889), S. 49–60. Das Problem ist dort unter der Voraussetzung gelöst, daß mme und Produkt *analytische* Funktionen sind. Herr F. Schur bedient sich da-

Es wird sich ergeben, daß *unter der Voraussetzung der Stetigkeit der beiden genannten Funktionen das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen im wesentlichen das einzige* ist, das allen zu stellenden Bedingungen genügt, daß es aber noch weitere solche Zahlensysteme gibt, wenn man die Voraussetzung der Stetigkeit fallen läßt. Mein Beweis wird hauptsächlich darauf abzielen, das zu erhärten, was man gewöhnlich voraussetzt, nämlich daß ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten vorliegt. Denn was dann weiter noch zu geschehen hat, um die aufgestellte Behauptung zu beweisen, ist hinreichend bekannt.

2. Ich will nun zunächst genauer, als das bisher geschehen ist, den zu beweisenden Satz formulieren.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein abstrakter Körper[2]) *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Elemente von $\mathfrak{K}$ stimmen mit der Gesamtheit der Zahlenpaare (ξ, η) überein;* ξ und η sind dabei gewöhnliche reelle Zahlen. Überhaupt sollen stets griechische Buchstaben zur Bezeichnung solcher gewöhnlicher reeller Zahlen verwendet werden, während die Elemente des Körpers, die komplexen Zahlen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Diese Voraussetzung besagt also, daß für die Zahlenpaare (ξ, η) die gewöhnlichen Rechenregeln gelten sollen.

2. *Die Zahlenpaare $(\xi, 0)$ bilden einen Teilkörper $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$.* Sie sollen reelle Zahlenpaare oder *reelle Elemente* heißen. Stets soll x die $(\xi, 0)$, y die Zahl $(\eta, 0)$, z die Zahl $(\zeta, 0)$ bedeuten. Diese Voraussetzung besagt also, daß die gewöhnlichen reellen Zahlen im Körper enthalten sein sollen und daß eine mit ihnen ausgeführte Rechnung als Resultat wieder eine reelle Zahl liefert. Dies wäre noch deutlicher, wenn wir direkt $(\xi, 0)$ mit ξ identifizierten, wie man gewöhnlich tut. Doch ist diese Voraussetzung nicht nötig.

---

bei der Hilfsmittel der Lieschen Gruppentheorie. Schon aus der Aufzählung aller ebenen Gruppen kann, wie auch Herr F. Schur bemerkt, das Ergebnis erschlossen werden. Das Verdienst von Herrn Schur liegt darin, eine solche vollendete Aufzählung nicht erst anzunehmen. Will man dies tun und etwa noch die Brouwerschen Ergebnisse über Liesche Gruppen verwenden, so kann man aus dieser Aufzählung auch das Hauptergebnis meiner Arbeit entnehmen. Indessen wäre das, wie die nachfolgenden Betrachtungen zeigen, ein gewaltiger Umweg. Nach Herrn Schur hat Moritz Pasch auf unsere Frage hingewiesen. Vgl. M. Pasch, Über die Einführung des Imaginären, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 7 (1904), S. 102–108, und „Veränderliche und Funktion", Leipzig 1914, S. 158–178.

[2]) Wegen der Definition dieses Begriffes vgl. man E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. Math. 137 (1910), S. 167–309 (S. 172 u. ff.); ferner A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Bd. I, Grundlagen der Arithmetik, Leipzig 1915, S. 33 u. ff.

3. *Die Summe* $(\xi, \eta) + (\xi_1, \eta_1) = (\sigma, \tau)$ *zweier Zahlenpaare* (ξ, η) *nd* (ξ_1, η_1) *ist eine stetige Funktion der vier „Komponenten"* ξ, η, ξ_1, η_1, . h. σ und τ sollen im gewöhnlichen Sinne stetige Funktionen sein.

4. *In einem Produkt der Form* $(\xi, 0)\cdot(\alpha, \beta) = (\varrho, \sigma)$ *sind* ϱ *und* σ *für des* (α, β) *stetige Funktionen von* ξ. Über die Stetigkeit des Produktes nd also geringere Annahmen erforderlich als über die Stetigkeit der Summe.

Unter diesen vier Voraussetzungen gilt der Satz, daß je drei Elemente von $\mathfrak{K}$ *innerhalb* $\mathfrak{R}$ *linear abhängig sind*[3]).

Zwischen je drei Elementen a, b, c besteht also eine Gleichung $x + by + cz = 0$, deren Koeffizienten x, y, z reelle Elemente sind. nders ausgedrückt besagt dies also, daß man zwei Elemente e_1 und e_2 usfindig machen kann, derart, daß jedes weitere Element sich auf die orm $xe_1 + ye_2$ mit reellen Elementen x, y als Koeffizienten bringen ßt, daß also ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten vorliegt.

In jedem Körper gibt es ein einziges ausgezeichnetes Element O von er Art, daß für jedes weitere Element p des Körpers $p \cdot O = O$ ist. Da also sowohl in $\mathfrak{K}$ als in $\mathfrak{R}$ ein solches Element geben muß, so müssen eide identisch sein, d. h. das Element O des Körpers $\mathfrak{K}$ ist ein reelles lement. Es sei etwa $O = (\varrho, 0)$.

3. Ein derartiges Zahlensystem kann nun nicht mit dem System der ellen Zahlen identisch sein. Denn es gibt stets außer den $(\alpha, 0)$ noch eitere Zahlen. Es sei also e_1 eine beliebige von O verschiedene reelle nd e_2 irgendeine nicht reelle Zahl. Ich betrachte alsdann die Gesamtheit der Zahlen $s = xe_1 + ye_2$ mit reellen Koeffizienten x und y. Ich ill zeigen, daß durch sie die Gesamtheit aller Zahlen erschöpft ist. Es ann nämlich keine Gleichung $me_1 - ne_2 = O$ mit reellen von Null verhiedenen Koeffizienten m und n gelten. Dann wäre nämlich auch e_2 ell, nämlich $e_2 = \frac{m}{n} e_1$. Die Zahl $s = xe_1 + ye_2$ ist aber nach den Anahmen 3. und 4. eine stetige Funktion von ξ und η[4]). Sie vermittelt ne umkehrbar eindeutige Abbildung der ξ-η-Ebene auf ein Stück der Ebene. Denn sonst gäbe es zwei verschiedene Wertepaare (x_1, y_1) und $_2, y_2)$ derart, daß $x_1 e_1 + y_1 e_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$ wäre. Daraus aber würde ch $(x_1 - x_2) e_1 + (y_1 - y_2) e_2 = O$ ergeben. Das geht aber für $y_1 \neq y_2$ cht, weil dann e_2 reell wäre. Ist aber $y_1 = y_2$, so muß auch $x_1 = x_2$ in, weil sonst $e_1 = O$ wäre. Nach dem Brouwerschen Satz von der nvarianz des Gebietes ist daher die Punktmenge der s-Ebene, auf welche e (ξ, η)-Ebene[4]) durch $s = xe_1 + ye_2$ abgebildet wird, ein Gebiet.

[3]) Diese einfache Formulierung meines Satzes verdanke ich einer wertvollen Bemerkung des Herrn J. Schur.

[4]) $x = (\xi, 0)$, $y = (\eta, 0)$, $z = (\zeta, 0)$.

Wäre nun durch die Zahlen $s = xe_1 + ye_2$ der Körper noch nicht erschöpft, so sei etwa e_3 eine weitere Zahl. Ich betrachte alsdann die Zahlen $S = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Der Ausdruck S ist dann wieder eine stetige Funktion von ξ, η, ζ[4]). Für genügend kleine z[5]) ist daher $S = xe_1 + ye_2 + ze_3$ von $s = xe_1 + ye_2$ beliebig wenig verschieden, d. h. der Punkt der Zahlenebene, welcher S repräsentiert, liegt beliebig nahe bei dem Punkt, welcher s entspricht. Die Menge der s ist aber ein Gebiet. Daher muß für genügend kleine z[5]) der Punkt S diesem Gebiet angehören. Daher gibt es für genügend kleine z[5]) eine Gleichung der Form

$$x_1 e_1 + y_1 e_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Daraus folgt aber

$$e_3 = \frac{x_1 - x}{z} e_1 + \frac{y_1 - y}{z} e_2.$$

Also muß e_3 unter den Zahlen $s = xe_1 + ye_2$ vorkommen. Es gibt also keine weiteren. Damit ist der in der vorigen Nummer angegebene Satz bewiesen. Wenn man, wie schon mehrmals geschehen, einen aus Zahlenpaaren bestehenden Körper ein Zahlsystem nennt, so haben wir den Satz: daß nur Zahlensysteme mit zwei Haupteinheiten den in der vorigen Nummer angegebenen Bedingungen genügen können. Wendet man nun noch die in der Theorie solcher Zahlensysteme üblichen Schlußweisen an, so erkennt man weiter, daß *das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen das einzige ist, welches den angegebenen Bedingungen genügt.*

Es wäre nun ein leichtes, das Ergebnis, wonach es sich um ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten handelt, zu verallgemeinern, indem man etwa auf die im Körperbegriff liegenden Voraussetzungen des kommutativen und assoziativen Gesetzes in gewissem Umfang verzichtet. Doch möchte ich darauf nicht näher eingehen.

4. Ich möchte vielmehr das erhaltene Resultat über gewöhnliche komplexe Zahlen noch etwas vertiefen[6]). Mancher Leser wird sich daran stoßen, daß wir das erhaltene Zahlsystem ohne weiteres dem System der gewöhnlichen komplexen Zahlen gleich setzten, wo doch die reellen Koeffizienten $x = (\xi, 0)$ und $y = (\eta, 0)$ gar keine gewöhnlichen reellen Zahlen sind, sondern unsere reellen Elemente, für die ja Summe und Produkt gar nicht in der üblichen Weise definiert sind, sondern wo z. B. $x + y = (s(\xi, \eta), 0)$ das $s(\xi, \eta)$ noch eine von $\xi + \eta$ verschiedene Funktion sein kann. In der Tat erhält man ja sofort durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung der gewöhnlichen Zahlengeraden derartige weite

---

[5]) Da $O = (\varrho, 0)$ und $z = (\zeta, 0)$ ist, so bedeutet dies, daß für alle hinreichend wenig von ϱ verschiedenen Werte von ζ diese Behauptung erfüllt ist.

[6]) Verwandte Untersuchungen bei A. Loewy a. a. O. [2]) S. 184 u. ff.

rauchbare Summenfunktionen. Achtet man hierauf, so wird man das edürfnis nach einer weiteren Klärung des bisher nur im Sinne der all-emeinen Körpertheorie ausgesprochenen Satzes empfinden[7]). Es wird ch ergeben, daß man in der Tat alle weiteren Körper $\mathfrak{R}$ in den der ge-öhnlichen reellen Zahlen durch eine umkehrbar eindeutige auf ξ aus-eübte Abbildung überführen kann. Derartige Abbildungen waren es ja uch schon, die wir in dieser Nummer in der Zahlenebene benutzten. Und das, was wir jetzt noch zeigen wollen, ist gewissermaßen das lineare nalogon zu dem bisher Bewiesenen.

Wir wollen nun also zeigen, daß man die Zahlengerade der $x = (\xi, 0)$ o umkehrbar eindeutig und stetig auf die Gerade der gewöhnlichen reellen ahlen abbilden kann, daß dabei die beiden Zahlensysteme isomorph auf-inander bezogen sind, d. h. daß bei der Abbildung auch die Resultate iner Rechnung einander zugeordnet sind, wenn dies für die Ausgangs-ahlen der Fall ist.

Um das bequem machen zu können, will ich zwei Funktionen $s(\xi, \eta)$ nd $p(\xi, \eta)$ einführen, die so erklärt sein sollen:

$$x + y = (s(\xi, \eta), 0)$$

nd

$$x \cdot y = (p(\xi, \eta), 0).$$

Diese stetigen Funktionen besitzen dann[8]) die folgenden sieben Eigen-chaften:

A) $s(\xi, \eta) = s(\eta, \xi)$,

B) $s(s(\xi, \eta), \zeta) = s(\xi, s(\eta, \zeta))$,

C) $p(\xi, \eta) = p(\eta, \xi)$,

D) $p(p(\xi, \eta), \zeta) = p(\xi, p(\eta, \zeta))$,

E) $p(\xi, s(\eta, \zeta)) = s(p(\xi, \eta), p(\xi, \zeta))$.

F) Die Gleichung $s(\alpha, \xi) = \beta$ besitzt stets eine einzige Lösung.

Die Lösung der Gleichung $s(\alpha, \xi) = \alpha$ ist, wie man nachweisen kann, on α unabhängig. Sie werde mit ϱ bezeichnet. Das ihr entsprechende eelle Element des Körpers ist die Null: $O = (\varrho, 0)$.

G) Wenn $\alpha \neq \varrho$ ist, so besitzt die Gleichung $p(\alpha, \xi) = \beta$ stets eine inzige Lösung.

Die Lösung von $p(\alpha, \xi) = \alpha$ ist von α unabhängig. Sie werde mit σ ezeichnet. Das entsprechende Element des Körpers ist die 1: $1 = (\sigma, 0)$.

---

[7]) Will man aber $\sigma(\xi, \eta) = \xi + \eta$ annehmen, so ist mit dem Voraufgegangenen ie Frage restlos erledigt. Bei der gewöhnlichen Auffassung der komplexen Zahlen ls Erweiterung des Körpers der reellen macht man ja diese Voraussetzung.

[8]) Steinitz, a. a. O. [2])

Ich führe nun zunächst eine zweckmäßige Anordnung der reellen Elemente $x = (\xi, 0)$ ein. Dazu denke ich mir auf der ξ-Achse die Punkte ϱ und σ markiert. Wenn dann eine Zahl $x = (\xi, 0)$ durch einen Punkt ξ repräsentiert wird, welcher auf derselben Seite von ϱ liegt wie die Zahl σ, so soll die Zahl positiv ($x > 0$) heißen, im anderen Falle aber negativ ($x < 0$). Das Element $a = (\alpha, 0)$ heißt größer als $b = (\beta, 0)$ ($a > b$), wenn die Richtung $\beta \to \alpha$ mit der Richtung $\varrho \to \sigma$ übereinstimmt.

Alsdann beweise ich der Reihe nach die folgenden Sätze:

1. Wenn $\alpha \neq \varrho$, so ist $p(\alpha, \xi)$ eine monotone Funktion. Denn $\eta = p(\alpha, \xi)$ vermittelt nach G) eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der ξ-Achse auf die η-Achse. Eine solche ist aber monoton.

2. $\lim_{\xi \to \infty} p(\alpha, \xi) = \infty$. Dabei soll x durch Werte von einerlei Vorzeichen, etwa durch positive Werte nach ∞ streben. Da nämlich $p(\alpha, \xi)$ monoton ist, so existiert sicher ein Grenzwert. Wäre derselbe aber endlich, etwa gleich A, so sei etwa (G) $p(\alpha, \xi_1) = A$. Sei dann A' ein Nachbarwert von A, der bei $\xi \to \infty$ von $p(\alpha, \xi)$ überschritten wird, und $p(\alpha, \xi') = A'$, so ist ξ' ein Nachbarwert von ξ und daher von der sehr großen Lösung der Gleichung $p(\alpha, \xi) = A'$ verschieden. Daher hätte diese gegen G) zwei verschiedene Lösungen.

3. Wenn $a > 0$, so wächst $a \cdot x$ mit x zugleich. Sei x zwischen 1 und ∞ gelegen, dann lasse ich $x \to 1$ streben. Dabei strebt ax gegen a. Lasse ich weiter $x \to \infty$ gehen, so strebt ax auch gegen Unendlich. Die Null wird dabei nicht passiert. Daher muß eben ax mit x zugleich wachsen. Ebenso schließt man in den anderen Fällen auf die bekannten Monotoniegesetze der Multiplikation. Auch die entsprechenden Eigenschaften von $a + x$ werden ganz ebenso eingesehen.

4. Die Lösung von $a \cdot x = 1$ sei $\frac{1}{a}$. Das ist eine stetige monotone Funktion von a. Denn es handelt sich ja dabei um die Auflösung der Gleichung $p(\alpha, \xi) = \sigma$. Ich will sie weiter mit $\xi = P(\alpha)$ bezeichnen.

5. Das arithmetische Mittel von a und b ($b > a$) liegt zwischen a und b. Denn es sei

$$s(\sigma, \sigma) = \sigma_2.$$

Das arithmetische Mittel ist als Lösung der Gleichung

$$p(\xi, \sigma_2) = s(\alpha, \beta)$$

erklärt. Diese ist

$$\xi = p(s(\alpha, \beta), P(\sigma_2)) = s[p(P(\sigma_2), \alpha), p(P(\sigma_2), \beta)].$$

Nun ist

$$a < b \quad \text{und} \quad (P(\sigma_2), 0) > O.$$

aher ist

$$a \cdot (P(\sigma_2), 0) < b \cdot (P(\sigma_2), 0).$$

aher wird

$$(\xi, 0) < (s[p(P(\sigma_2), \beta), p(P(\sigma_2), \beta)], 0) = (p(\beta, s[P(\sigma_2), P(\sigma_2)]), 0)$$
$$= (p[\beta, p(\sigma_2, P(\sigma_2))], 0) = (p(\beta, \sigma), 0) = (\beta, 0) = b.$$

benso beweist man, daß $(\xi, 0) > a$ ist.

6. Nun betrachte man die folgende Zahlenmenge: Man addiere die 1 eliebig oft zu sich selbst und ziehe sie beliebig oft von sich selbst ab. o erhält man also alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Dann ilde man alle möglichen Paare dieser Zahlen und deren arithmetische ittel. Die erhaltenen Zahlen paare man wieder und bilde wieder die ittel. So erhält man die Körperelemente, die den gewöhnlichen reellen ahlen entsprechen, deren Nenner eine Potenz von zwei ist. Ich behaupte un, daß die diesen Zahlen entsprechenden Punkte die ξ-Achse überall icht erfüllen. Das folgt aus dem unter 4. bewiesenen. Denn gäbe es ine von der Menge freie Strecke, so kann ich sie so wählen, daß wenigtens ihre Endpunkte (ins Unendliche kann sie ja nicht reichen) Häufungsunkte der Menge sind. Sei $A < x < B$ die Strecke. Dann gehört ihr as arithmetische Mittel an. Nehme ich aber statt A und B benachbarte engenpunkte, so gehört auch deren arithmetisches Mittel der Strecke an. lso liegt die Menge überall dicht.

7. Betrachtet man weiter noch die übrigen rationalen Elemente des örpers $\mathfrak{R}$, also die Quotienten zweier ganzer Zahlen, so erkennt man, aß diese Brüche dieselben Monotonieeigenschaften haben wie die gewöhnchen Brüche. Bezieht man nun die beiden Mengen: rationale Elemente nd gewöhnliche reelle Zahlen dadurch aufeinander, daß man die aus der ins auf gleiche Weise entstandenen Zahlen einander zuordnet, so erhält an eine monotone stetige Abbildung der entsprechenden Menge auf der -Achse auf die gewöhnlichen rationalen Zahlen, und schließt man noch ie in beiden Fällen bleibenden Lücken etwa durch das Intervallschachteungsverfahren und ordnet die irrationalen Elemente einander zu, deren chachtelungen zugeordnete Enden besitzen, so erhält man eine umkehrbar ndeutige und stetige Abbildung der ξ-Achse auf die gewöhnlichen reellen ahlen, bei der die beiden Körper isomorph aufeinander bezogen sind.

Damit haben wir also gezeigt, *daß im Gebiete der Zahlenpaare* $(\xi, 0)$, *on einer umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildung abgesehen, der Körper er gewöhnlichen rationalen Zahlen der einzige ist, der stetige Multiplition und Addition besitzt.*

Vereinigt man dies mit dem Ergebnis der vorigen Nummer, so haben ir den Satz:

Abgesehen von einer stetigen Koordinatentransformation ist der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen der einzige Körper von Zahlenpaaren, der den in der vorigen Nummer zu Beginn angegebenen Bedingungen genügt.

5. Man kann die eingeführten Annahmen noch ein klein wenig verallgemeinern. Es ist nicht nötig, daß der Körper $\mathfrak{R}$ gerade durch die Zahlenpaare $(\xi, 0)$ gegeben sei. Man kann unter ihm irgendeine Jordankurve von Zahlenpaaren verstehen. Die Voraussetzung 4. ist dann so zu formulieren: Bedeutet (ξ, η) ein reelles Element und sind $\xi = \xi(\tau)$ und $\eta = \eta(\tau)$ stetige Funktionen der gewöhnlichen reellen Zahl τ, welche die genannte Jordankurve ausmachen, so ist für jedes (α, β) das Produkt $(\xi, \eta) \cdot (\alpha, \beta)$ stetig von τ abhängig.

Zieht man endlich noch die Brouwerschen Ergebnisse über Liesche Gruppen heran, so kann man sich überzeugen, daß man das Axiom 2. ganz entbehren kann. Es ist mir bisher kein direkter Beweis dafür gelungen, daß die Existenz eines solchen eine Jordankurve erfüllenden Teilkörpers $\mathfrak{R}$ eine Folge der übrigen Axiome ist.

6. Ich will nun auch noch die übrigen Axiome auf ihre Unabhängigkeit untersuchen.

Ich will also fragen, was passiert, wenn man die vorausgesetzte Stetigkeit der Operationen fallen läßt. Dann gibt es noch weitere Zahlensysteme, die den übrigen Forderungen genügen. Ein solches wird z. B. durch die Gesamtheit aller rationalen oder durch die Gesamtheit aller algebraischen Funktionen einer komplexen Variabeln geliefert. Die Mächtigkeit dieser Gebilde ist ja die des Kontinuums. Man kann sie also auf je eine Ebene abbilden. Die Abbildung soll so gewählt sein, daß die konstanten und zugleich reellen unter diesen Funktionen die reellen Elemente repräsentieren. Da alle vorkommenden Mengen die Mächtigkeit des Kontinuums haben, ist dies stets möglich. Man hat nur die reellen Konstanten auf die reellen Elemente $(\xi, 0)$ zu beziehen, die übrigen auf den Rest der Ebene der komplexen Zahlen (ξ, η). Zu rechnen ist mit diesen Gebilden in der üblichen Weise. Aber Zahlensysteme mit zwei oder weniger Haupteinheiten erhalten wir so nicht. Denn sonst müßte es z. B. zwei rationale Funktionen e_1 und e_2 geben, mit deren Hilfe man alle anderen rationalen Funktionen in der Form $x e_1 + y e_2$ mit reellen Koeffizienten x und y darstellen könnte. Das ist aber ersichtlich nicht der Fall, schon deshalb nicht, weil es ja doch rationale Funktionen von beliebig hohem Grad gibt. Also nicht einmal mit endlich vielen Einheiten kann man auskommen. Nach unseren Darlegungen können daher Summe und Produkt nicht stetige Funktionen sein. Das zweite Zahlensystem hat sogar

ch die Eigenschaft, daß in ihm der Fundamentalsatz der Algebra richtig eibt. Immerhin bleibt die Frage noch offen, ob man statt der Stetigit der Summe als Funktion von vier Variabeln etwa nur die folgende nahme zu machen braucht: Die Summe ist eine stetige Funktion sohl des einen wie des anderen Summanden.

7. Man kann durch ganz ähnliche Betrachtungen die bei hyperkomexen Zahlen üblichen Definitionen vertiefen. Denn der Brouwersche tz gilt auch für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

(Eingegangen am 11. März 1918.)

Flächentreue Abbildungen in der Ebene.

Von

Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Ebenso wie man sich in der Flächentheorie krummliniger Koordinaten u, v bedient, tut man gut, zur Darstellung einer analytischen Abbildung einer Ebene $\mathfrak{E}$ auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}'$ Parameter u, v zu benutzen. Die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad x' = \varphi'(u, v), \quad y' = \psi'(u, v)$$

vermitteln, wenn x, y und x', y' rechtwinklige Koordinaten in den beiden Ebenen sind, die Abbildung; dabei sollen sich $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ innerhalb eines gemeinsamen Wertebereiches u, v regulär verhalten, und innerhalb dieses Bereiches soll keine der beiden Funktionaldeterminanten

$$D = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u, \qquad D' = \varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u$$

identisch verschwinden. Diejenigen Stellen, wo D oder D' gleich Null wird, mag man als singulär von der Betrachtung ausschließen. Wir beschränken uns immer auf solche Teile der beiden Ebenen, die vermöge (1) zu dem Wertebereiche u, v gehören.

Die Doppelintegrale $\iint dx\,dy$ und $\iint dx'\,dy'$, die einander entsprechende Flächenstücke der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ ausmessen, drücken sich mittels der Parameter u, v infolge von (1) als die Doppelintegrale $\iint D\,du\,dv$ und $\iint D'\,du\,dv$ aus, die sich beide über denselben Teil des Wertebereiches u, v zu erstrecken haben. Wird den beiden Koordinatensystemen x, y und x', y' dieselbe Längeneinheit zugrunde gelegt, so ist die Abbildung dann und nur dann *flächentreu*, wenn D identisch gleich D' ist. Legt man alsdann beide Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ so aufeinander, daß sich auch ihre Achsensysteme decken, so handelt es sich um eine *gleichsinnige flächentreue Abbildung innerhalb der Doppelebene.*

In diesem Falle wollen wir uns insbesondere solcher Parameter bedienen, die man als *Mittelpunktparameter* bezeichnen kann, nämlich de

chtwinkligen Koordinaten u, v der Mittelpunkte M zwischen einander i der Abbildung entsprechenden Punkten (x, y) und (x', y'). Es sei also

$$u = \tfrac{1}{2}(x + x'), \qquad v = \tfrac{1}{2}(y + y').$$

lerdings sind derartige Parameter nicht anwendbar, wenn der Ort der ttelpunkte nur eine Kurve oder gar nur ein Punkt ist. Auf diese snahmefälle kommen wir nachher zurück. Werden die Differenzen $x - x'$ d $y - y'$ mit $2P$ und $2Q$ bezeichnet, so ergibt sich die folgende Dar-llung einer Abbildung in Mittelpunktparametern:

$$x = u + P, \qquad y = v + Q, \qquad x' = u - P, \qquad y' = v - Q,$$

P, Q analytische Funktionen von u, v sind. Die Bedingung $D = D'$ r Flächentreue lautet hier einfach so:

$$P_u + Q_v = 0.$$

ter dieser Bedingung gibt es eine Funktion ω von u, v derart, daß $= \omega_v$, $Q = -\omega_u$ ist. *Mithin stellt sich die flächentreue Abbildung so dar*:

$$x = u + \omega_v, \qquad y = v - \omega_u, \qquad x' = u - \omega_v, \qquad y' = v + \omega_u.$$

bei haben die Funktionaldeterminanten D, D' den Wert:

$$D = D' = \omega_{uu}\omega_{vv} - \omega_{uv}^2 + 1.$$

emnach ist die Funktion ω bloß der Bedingung

$$\omega_{uu}\omega_{vv} - \omega_{uv}^2 \neq -1$$

terworfen, sonst beliebig wählbar.

In einem Handbuch von Gauß findet sich eine vermutlich aus der it von 1820 bis 1822 stammende Bemerkung (siehe „*Gauß' Werke*", Bd., 1900, S. 373), wonach die gleichsinnig flächentreuen Abbildungen enfalls mit Hilfe einer einzigen Funktion φ in der Form

$$y = \varphi_x, \qquad y' = -\varphi_{x'}$$

rgestellt werden können. Dabei ist φ eine Funktion von x und x' auß bezeichnet sie mit u). Man kann hierfür schreiben:

$$x = u, \qquad y = \varphi_u, \qquad x' = v, \qquad y' = -\varphi_v,$$

dem man dann unter φ eine Funktion von u, v versteht. Es ist leicht, die rstellung (2) auf die Form (4) zu bringen. Man führe nämlich in (2) neue Parameter

$$u' = u + \omega_v, \qquad v' = u - \omega_v$$

und verstehe unter φ die Funktion $2(v\omega_v - \omega)$ der alten Parameter v. Alsdann geht (2) in (4) über, vorausgesetzt, daß in (4) statt u, v Zeichen u', v' stehen. Ohne Kenntnis der Gaußischen Bemerkung

hat der Russe D. A. Grave in der Abhandlung „*Sur la construction des cartes géographiques*", Journal des Mathématiques, 5. Serie, 1. Bd. 1896, S. 317 bis 361, insbes. S. 319, dieselbe Darstellung wie Gauß gefunden.

Gegenüber der Gaußischen Darstellung (4) hat wohl die Darstellung (2) den Vorzug, daß alle vier Koordinaten x, y, x', y' bei ihr gleichmäßig berücksichtigt werden und überdies die Parameter u, v als Mittelpunktparameter eine einfache geometrische Bedeutung haben.

Die Darstellung (2) *versagt*, wenn die Mittelpunkte zwischen einander bei der Abbildung entsprechenden Punkten (x, y) und (x', y') nur eine Kurve erfüllen oder in einem Punkt zusammenfallen, d. h. wenn $x + x'$ und $y + y'$ voneinander abhängig sind. Man sieht aber leicht ein: Liegt irgendeine Abbildung (1) vor, bei der $x + x'$ und $y + y'$ oder also $\varphi + \varphi'$ und $\psi + \psi'$ voneinander abhängig sind, so kann man dadurch, daß man die Ebene $\mathfrak{E}$ oder die Ebene $\mathfrak{E}'$ in der Doppelebene einer Bewegung unterwirft, zu dem Fall gelangen, wo $x + x'$ und $y + y'$ voneinander unabhängig werden, abgesehen von dem einzigen Ausnahmefalle, wo die Abbildung eine Symmetrie ist. Dieser Ausnahmefall, in dem $D = -D'$ ist, kommt aber bei den gleichsinnig flächentreuen Abbildungen nicht vor. *Man kann demnach sagen, daß sich jede gleichsinnig flächentreue Abbildung in der Doppelebene entweder geradezu oder doch, nachdem man die eine Ebene durch eine Bewegung in eine andere Lage zur anderen Ebene gebracht hat, in der Form* (2) *darstellen läßt.*

Immerhin ist es mißlich, daß man doch bei dem analytischen Ausdruck einer gleichsinnig flächentreuen Abbildung von der zufällig ungünstigen Lage der beiden einander entsprechenden Figuren gegeneinander abhängig ist. Wir wollen zeigen, wie man unabhängig davon *alle* gleichsinnig flächentreuen Abbildungen auf eine einheitliche Art erzeugen kann. Zu diesem Zweck gehen wir zu Betrachtungen im Raum über, indem wir auf die Doppelebene $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ in ihrem Anfangspunkt das Lot als z-Achse errichten.

Wir nehmen irgendein *Flächenelement im Raum* an, d. h. den Inbegriff eines Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und einer durch ihn gehenden Ebene. Die Bestimmungsstücke der Stellung dieser Ebene seien mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bezeichnet, indem

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{X} - \mathfrak{x}) + \mathfrak{q}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) - (\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Gleichung der Ebene sei. Unter der *Steigung* des Flächenelementes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ verstehen wir den Tangens des Winkels, den seine Ebene mit der Ebene $\mathfrak{z} = 0$, der Doppelebene der Abbildung, macht, d. h. den Wert von $\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2}$. Daß die Steigung zweiwertig ist, hat für das Folgende gerade eine besondere Bedeutung. Unter der *Höhenlinie* des Flächenelementes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ verstehen wir diejenige Gerade, die durch seinen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ geht, in seiner Ebene liegt und

r Doppelebene $\mathfrak{z} = 0$ parallel läuft. Auf dieser Höhenlinie tragen wir n vom Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des Elementes an, den wir $\mathfrak{M}$ nennen wollen, ch beiden Seiten hin bis $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ eine Strecke gleich der Steigung $\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2}$ auf. Nachdem dies geschehen ist, projizieren wir $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ nkrecht auf die Doppelebene $\mathfrak{z} = 0$, wodurch sich Punkte M, P, P' geben, so daß M der Mittelpunkt von PP' ist. *Auf diese Art wird dem Flächenelement* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *des Raumes ein Punktepaar* P, P' *der Doppelebene* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ *zugeordnet, nämlich das Punktepaar:*

$$x = \mathfrak{x} + \mathfrak{q}, \qquad y = \mathfrak{y} - \mathfrak{p}, \qquad x' = \mathfrak{x} - \mathfrak{q}, \qquad y' = \mathfrak{y} + \mathfrak{p}.$$

Nun gilt der Satz:

Um alle gleichsinnig flächentreuen Abbildungen in der Doppelebene $\mathfrak{E}'$ *zu erhalten, kann man so verfahren: Man wählt im Raum einen erein* $\mathfrak{V}$ *von Flächenelementen beliebig und ordnet jedem Element* $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *des Vereins in der angegebenen Art ein Punktepaar* P, P' *der Doppelebene zu. Die Beziehung zwischen den Punkten* P *und* P' *t alsdann stets eine gleichsinnig flächentreue Abbildung, sobald sie ine ausgeartete Abbildung ist, d. h. sobald jedem Punkt* P *allgemeiner age ein Punkt* P' *allgemeiner Lage und umgekehrt entspricht. Auf ese Art ergeben sich überhaupt alle gleichsinnig flächentreuen Abbil- ungen in der Doppelebene* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$.

Beim Beweis sind drei Fälle zu unterscheiden: Der Punktort des ereins $\mathfrak{V}$ kann eine Fläche oder eine Kurve oder ein Punkt sein. Ist er Punktort des Vereins $\mathfrak{V}$ eine *Fläche*

$$\mathfrak{z} = \omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

ist $\mathfrak{p} = \omega_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{q} = \omega_{\mathfrak{y}}$, so daß aus (5) in der Tat die Gleichungen (2) ntstehen, mit dem einzigen Unterschiede, daß $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ statt u, v geschrieben t. Ist der Punktort des Vereins $\mathfrak{V}$ eine *Kurve*, etwa die Kurve

$$\mathfrak{x} = \varphi(u), \qquad \mathfrak{y} = \psi(u), \qquad \mathfrak{z} = f(u),$$

usgedrückt mittels eines Parameters u, so gehören zu dem Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ er Kurve alle Flächenelemente, deren Ebenen die Tangente dieses Punktes nthalten. Wenn die Höhenlinie einer dieser Ebenen mit der x-Achse en Winkel v bildet, sind

$$\mathfrak{p} = \frac{f' \sin v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}, \qquad \mathfrak{q} = \frac{-f' \cos v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}$$

ie Bestimmungsstücke der Stellung des zugehörigen Flächenelementes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. Dabei bedeuten f', φ', ψ' die Ableitungen von f, φ, ψ. Nach (5) ergibt sich demnach:

$$(6)\quad \begin{cases} x = \varphi - \dfrac{f' \cos v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}, & y = \psi - \dfrac{f' \sin v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}, \\ x' = \varphi + \dfrac{f' \cos v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}, & y' = \psi + \dfrac{f' \sin v}{\varphi' \sin v - \psi' \cos v}. \end{cases}$$

Da φ, ψ, f Funktionen von u sind, stellen diese Gleichungen eine Abbildun der Punkte (x, y) in die Punkte (x', y') dar, falls die Funktionaldeterminante von x, y und x', y' hinsichtlich u, v von Null verschieden sind. Man stell leicht fest, daß diese beiden Determinanten denselben Wert haben, so daß sich in der Tat eine gleichsinnig flächentreue Abbildung ergeben hat Bei ihr haben die Mittelpunkte M zwischen einander entsprechende Punkten (x, y) und (x', y') die Koordinaten $\varphi(u)$, $\psi(u)$, d. h. der Or der Mittelpunkte ist die Projektion der vorhin im Raum angenommene Kurve. Nebenbei bemerkt, erkennt man leicht, daß der Ort der Mittel punkte nicht nur ein Punkt sein kann, denn sonst wäre die im Raum angenommene Kurve eine zur Doppelebene senkrechte Gerade, und i diesem Falle werden die Funktionaldeterminanten der Abbildung (6) beid unendlich. Ferner beweist man leicht: Wenn bei einer gleichsinni flächentreuen Abbildung in der Doppelebene $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ der Ort der Mittel punkte M zwischen einander zugeordneten Punkten (x, y) und $(x', y'$ nur eine Kurve $\xi = \varphi(u)$, $\mathfrak{y} = \psi(u)$ ist, stellt sich die Abbildung stet in der Form (6) dar. Schließlich kommen wir zu dem letzten Fall, w der Punktort des Vereins $\mathfrak{V}$ bloß ein *Punkt* (a, b, c) ist. Irgendein Elemen des Vereins hat dann als Ebene irgendeine Ebene durch diesen Punkt Dieser Ebene kommt eine beliebig wählbare Steigung u zu. Bildet di Höhenlinie der Ebene mit der x-Achse den Winkel v, so sind die den Flächenelement zugeordneten Punkte die mit den Koordinaten:

$$(7)\quad x = a + u \cos v,\ y = b + u \sin v,\ x' = a - u \cos v,\ y' = b - u \sin v$$

Dies aber sind die Gleichungen derjenigen gleichsinnig flächentreuen Ab bildung, die hervorgeht, wenn man jeden Punkt P oder (x, y) der Eben an dem festen Punkte (a, b) in einen Punkt P' oder (x', y') spiegelt mit anderen Worten: die Gleichungen einer Drehung in der Ebene um den festen Punkt (a, b) durch einen gestreckten Winkel. Es leuchtet ein daß jede Abbildung, bei der die Mitten zwischen einander zugeordnete Punkten sämtlich zusammenfallen, von dieser Art ist.

Nachdem hiermit der aufgestellte Satz bewiesen ist, sei noch bemerkt

Angenommen, es sei aus einem beliebig gewählten Verein $\mathfrak{V}$ vo Flächenelementen im Raume auf Grund des Satzes eine gleichsinnig flächen treue Abbildung $\mathfrak{A}$ in der Doppelebene $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ abgeleitet worden. Dann ist es klar, daß immer noch eine gleichsinnig flächentreue Abbildung $\mathfrak{A}$ besteht, wenn man von den beiden einander durch Flächentreue ent

rechenden Figuren die eine oder die andere irgendeiner Bewegung nerhalb der Doppelebene unterwirft. Nun gehört zu $\mathfrak{A}'$ ebenfalls ein erein $\mathfrak{B}'$ von Flächenelementen im Raume. Demnach erhebt sich die age, *wie man alle diese Vereine* $\mathfrak{B}'$ *aus dem zuerst angenommenen erein* $\mathfrak{B}$ *ableiten kann.*

Wir unterwerfen sowohl die Punkte (x, y) als auch die Punkte (x', y') ner Bewegung, wodurch sie in neue Punkte (X, Y) und (X', Y') über-hen, setzen also an:

$$\left\{\begin{aligned} X &= x\cos\gamma - y\sin\gamma + a, & Y &= x\sin\gamma + y\cos\gamma + b,\\ X' &= x'\cos\gamma' - y'\sin\gamma' + a', & Y' &= x'\sin\gamma' + y'\cos\gamma' + b', \end{aligned}\right.$$

$\gamma, \gamma', a, b, a', b'$ beliebige Konstanten seien. Dann tritt an die Stelle s dem Punktepaar (x, y), (x', y') der Doppelebene zugeordneten Flächen-ements $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ ein neues Flächenelement $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$. Ebenso e die Formeln (5) gelten, die wir noch einmal wiederholen:

$$x = \mathfrak{x} + \mathfrak{q}, \quad y = \mathfrak{y} - \mathfrak{p}, \quad x' = \mathfrak{x} - \mathfrak{q}, \quad y' = \mathfrak{y} + \mathfrak{p},$$

t man also:

$$X = \mathfrak{X} + \mathfrak{Q}, \quad Y = \mathfrak{Y} - \mathfrak{P}, \quad X' = \mathfrak{X} - \mathfrak{Q}, \quad Y' = \mathfrak{y} + \mathfrak{P}.$$

ieraus und aus (8) und (9) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \tfrac{1}{2}[(\cos\gamma + \cos\gamma')\mathfrak{x} - (\sin\gamma + \sin\gamma')\mathfrak{y} + (\sin\gamma - \sin\gamma')\mathfrak{p}\\ &\qquad + (\cos\gamma - \cos\gamma')\mathfrak{q} + a + a'],\\ \mathfrak{Y} &= \tfrac{1}{2}[(\sin\gamma + \sin\gamma')\mathfrak{x} + (\cos\gamma + \cos\gamma')\mathfrak{y} - (\cos\gamma - \cos\gamma')\mathfrak{p}\\ &\qquad + (\sin\gamma - \sin\gamma')\mathfrak{q} + b + b'],\\ \mathfrak{P} &= \tfrac{1}{2}[-(\sin\gamma - \sin\gamma')\mathfrak{x} - (\cos\gamma - \cos\gamma')\mathfrak{y} + (\cos\gamma + \cos\gamma')\mathfrak{p}\\ &\qquad - (\sin\gamma + \sin\gamma')\mathfrak{q} - b + b'],\\ \mathfrak{Q} &= \tfrac{1}{2}[(\cos\gamma - \cos\gamma')\mathfrak{x} - (\sin\gamma - \sin\gamma')\mathfrak{y} + (\sin\gamma + \sin\gamma')\mathfrak{p}\\ &\qquad + (\cos\gamma + \cos\gamma')\mathfrak{q} + a - a'). \end{aligned}\right.$$

a nun der Elementverein $\mathfrak{B}$ in einen Elementverein $\mathfrak{B}'$ übergehen soll, ndelt es sich um eine Berührungstransformation im Raume, und bei r besteht eine Beziehung von der Form:

$$d\mathfrak{Z} - \mathfrak{P}d\mathfrak{X} - \mathfrak{Q}d\mathfrak{Y} = \varrho(d\mathfrak{z} - \mathfrak{p}d\mathfrak{x} - \mathfrak{q}d\mathfrak{y}),$$

ϱ eine Funktion von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ist (vgl. Lie, *„Theorie der Trans-rmationsgruppen"*, 2. Abschnitt, Leipzig 1890, S. 45). Demnach handelt sich nur noch darum, eine Funktion $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ so zu ermitteln, ß sie zusammen mit den Funktionen (11) die Gleichung (12) für alle erte von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ befriedigt. Man findet leicht, daß dies nur dann öglich ist, wenn ϱ den Wert Eins hat, und es kommt:

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z} = \frac{1}{4}[\sin(\gamma'-\gamma)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2) - 2\{1-\cos(\gamma'-\gamma)\}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}) + \\ \quad + \{(\sin\gamma+\sin\gamma')(a-a') - (\cos\gamma+\cos\gamma')(b-b')\}\mathfrak{x} + \\ \quad + \{(\cos\gamma+\cos\gamma')(a-a') + (\sin\gamma+\sin\gamma')(b-b')\}\mathfrak{y} - \\ \quad - \{(\cos\gamma-\cos\gamma')(a-a') + (\sin\gamma-\sin\gamma')(b-b')\}\mathfrak{p} + \\ \quad + \{(\sin\gamma-\sin\gamma')(a-a') - (\cos\gamma-\cos\gamma')(b-b')\}\mathfrak{q} + \mathfrak{z} + c \end{cases}$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet.

Die Gleichungen (11) und (13) zusammen beantworten die aufgeworfene Frage. In ihnen sind $\gamma, \gamma', a, b, a', b', c$ willkürliche Konstanten. Die Gleichungen stellen also eine Schar von Berührungstransformationen des Raumes dar, und zwar ist es *die Schar aller derjenigen Berührungstransformationen, denen folgende Eigenschaft zukommt: Übt man eine Transformation der Schar auf einen Verein $\mathfrak{V}$ von Flächenelementen* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *aus, so geht ein neuer Verein $\mathfrak{V}'$ von Flächenelementen* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *hervor, und die den beiden Vereinen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ nach dem Früheren zugeordneten gleichsinnig flächentreuen Abbildungen in der Doppelebene unterscheiden sich nur durch die gegenseitige Lage der Ebene $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ der einander entsprechenden flächentreuen Figuren in der Doppelebene, stimmen also im wesentlichen überein.*

Selbstverständlich ist die Schar von Berührungstransformationen eine Gruppe. Sie ist diejenige *siebengliedrige Gruppe*, die von den infinitesimalen Berührungstransformationen mit den folgenden Symbolen erzeugt wird:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$\mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{q}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{p}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} + \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} + \mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$\mathfrak{p}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{q}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} - \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2-\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Von diesen sieben infinitesimalen Transformationen sind die sechs ersten bloß erweiterte Punkttransformationen. Die Gruppe hat *eine einzige Differentialinvariante zweiter Ordnung*, nämlich diese:

$$\frac{(\mathfrak{r}-\mathfrak{t})^2+4\mathfrak{s}^2}{(\mathfrak{r}\mathfrak{t}-\mathfrak{s}^2+1)^2},$$

wo $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ die Ableitungen zweiter Ordnung von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bedeuten.

Berlin-Dahlem, den 29. April 1918.

(Eingegangen am 30. April 1918.)

Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér.

Von

Otto Toeplitz in Kiel.

Herr Fejér hat[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Ist $f(t), g(t)$ ein Paar reeller, stetiger Funktionen der reellen Variabeln t mit der Periode 2π, sind $f_n(t), g_n(t)$ die n-ten arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Entwicklungen, und ist ferner $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Bereich, der die durch die Parameterdarstellung $x = f(t)$, $y = g(t)$ gegebene Kurve ganz in sich enthält, $\mathfrak{K}_n$ der entsprechende Bereich für die Kurve $x = f_n(t)$, $y = g_n(t)$, so ist $\mathfrak{K}_n$ in $\mathfrak{K}$ enthalten.

Zu diesem Satze soll im folgenden ein Analogon aus der Algebra ewonnen werden. Zur Aufstellung eines solchen Analogons wurde ich urch dasselbe Übertragungsprinzip geführt, durch das ich in meiner Habiliationsschrift[2]) eine Verbindung zwischen der Theorie der Fourierschen Reihen und einer gewissen Klasse bilinearer Formen hergestellt habe. Aber während dieses Übertragungsprinzip wie überhaupt die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen bisher meist dazu gedient hat, um gewisse Hilfsmittel der Algebra den Problemen der Analysis nutzbar zu machen, will ich hier an einem einfachen Beispiel zeigen, wie man auch umgekehrt dieses Prinzip verwenden kann, um, von Sätzen der Analysis ausgehend, zu algebraischen Tatsachen zu gelangen.

Die Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen nicht voraus, mit Ausnahme des letzten Paragraphen; sie handelt im übrigen nur von Bilinearformen mit n Variabelnpaaren.

---

[1]) Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 79–97.

[2]) Math. Annalen 70 (1911), S. 351–376; Gött. Nachr. 1910, math.-phys. Kl. S. 489–506; Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 191–192.

§ 1.

Der Satz von Bendixson und Hirsch.

Es ist bekannt, daß die Eigenwerte einer reellen quadratischen Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha})$$

alle reell sind, und daß die einer alternierenden (schiefsymmetrischen, $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0$) Bilinearform alle rein imaginär sind. Man kann diese beiden Tatsachen einer einzigen subsumieren, wenn man den Begriff der „Hermiteschen Form" heranzieht. Man nennt eine Bilinearform

$$C = C(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

eine Hermitesche Form, wenn sie mit ihrer „begleitenden" Form

$$\bar{C}' = \bar{C}'(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \bar{c}_{\beta\alpha} x_\alpha y_\beta$$ [3])

identisch ist, also $c_{\alpha\beta} = \bar{c}_{\beta\alpha}$. Ist $c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + i b_{\beta\alpha}$, so ist

$$C = \Sigma (a_{\alpha\beta} + i b_{\alpha\beta}) x_\alpha y_\beta = S + iT$$
$$\bar{C}' = \Sigma (a_{\beta\alpha} - i b_{\beta\alpha}) x_\alpha y_\beta = S' - iT',$$

und aus $C = \bar{C}'$ folgt durch Vergleichung von reellem und imaginärem $S = S'$, $T = -T'$, d. h. jede Hermitesche Form ist von der Gestalt $S + iT$, wo S eine reelle symmetrische, T eine reelle alternierende Form ist. Mithin enthält der

Satz 1: *Die Eigenwerte einer Hermiteschen Form sind alle reell*

die beiden eingangs erwähnten Tatsachen als Spezialfälle, je nachdem man $T = 0$ oder $S = 0$ wählt.

Herr Bendixson[4]) hat eine Verallgemeinerung hiervon für beliebige Bilinearformen mit reellen Koeffizienten aufgestellt, und Herr Hirsch[5]) hat bemerkt, daß sie sich unmittelbar auf Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten überträgt. Es sei die Bemerkung vorangeschickt:

---

[3]) Überstreichen soll durchweg den Übergang in konjugiert-imaginären Werten andeuten, der Akzent die Vertauschung der beiden Variabelnreihen in einer Bilinearform.

[4]) Acta mathematica 25 (1902), S. 359–366.

[5]) Acta mathematica 25 (1902), S. 367–370.

Satz 2. *Jede Bilinearform C läßt sich auf eine und nur eine Weise der Form $C = H + iK$ darstellen, wo H, K Hermitesche Formen sind.*

In der Tat braucht man nur

$$H = \frac{C + \bar{C}'}{2}, \quad K = \frac{C - \bar{C}'}{2i}$$

setzen, um auszurechnen, daß $C = H + iK$ ist, und daß H und K ermitesche Formen sind. Ließe sich aber C noch auf eine zweite Art die Gestalt $C = H_1 + iK_1$ setzen, so wäre

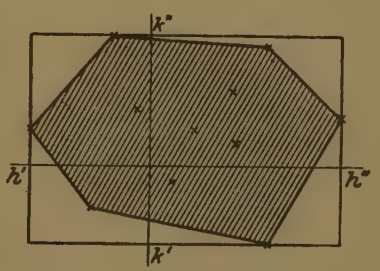
$$(H - H_1) + i(K - K_1) = 0,$$

nd durch Übergang zum konjugiert Imaginären und Vertauschung der iden Variabelnreihen würde daraus das gleichzeitige Bestehen der anren Relation

$$(H - H_1) - i(K - K_1) = 0$$

lgen; die Addition und Subtraktion beider Relationen also würde $H_1 = H$, $_1 = K$ ergeben, d. h. die Eindeutigkeit jener Darstellung.

Satz 3 (Satz von Bendixson nd Hirsch). *Ist C irgendeine Bilinearform, sind H, K ihre beiden durch tz 2 eindeutig bestimmten Hermiteschen Komponenten und sind alle Eigenrte von H, die nach Satz 1 reell sind, ischen h' und h'', alle von K zwihen k' und k'' gelegen, so konstruiere n das parallel den Koordinatenachsen ientierte Rechteck, dessen vertikale iten die Abszissen h' und h'', dessen horizontale Seiten die Ordinaten k'' haben. Alsdann liegen alle Eigenwerte von C innerhalb dieses chtecks.*



Es ist klar, daß Satz 3 sich auf Satz 1 reduziert, wenn C eine ermitesche Form, also $K = 0$ ist und das Rechteck sich auf ein Stück r reellen Achse zusammenzieht.

Der Beweis ergibt sich sehr einfach aus der bekannten Bemerkung, ß die Werte, die eine Hermitesche Form $H(x, y)$ für konjugiertaginäre Werte der beiden Variabelnreihen $(y_\alpha = \bar{x}_\alpha)$ und unter der benbedingung $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = 1$ annimmt, und die alle reell sind, nau die Strecke zwischen ihrem untersten und ihrem obersten Eigenwert füllen. Ist nun λ irgendein Eigenwert von C, so kann man — das die Definition des Eigenwertes — n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen, daß

$$\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\beta = \lambda x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

ist, und da hierbei nur die Verhältnisse der Größen $x_1, \ldots, x_n$ festgelegt sind, kann man über ihren Proportionalitätsfaktor noch derart verfügen, daß zugleich $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ ist. Multipliziert man die α-te Gleichung mit $\bar{x}_\alpha$ und summiert über α, so hat man

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \bar{x}_\alpha x_\beta = \lambda \sum_{\alpha} x_\alpha \bar{x}_\alpha = \lambda,$$

und daher $\lambda = C(\bar{x}, x) = H(\bar{x}, x) + i K(\bar{x}, x)$, während $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ ist. Der reelle Teil von λ liegt also zwischen den äußersten Eigenwerten h', h'' von H, der imaginäre Teil zwischen denen k', k'' von K, d. h. λ liegt in dem in der Figur gezeichneten Rechteck.

Ich habe den Beweis hier reproduziert, weil er in dieser kurzen Form unmittelbar erkennen läßt, daß man Satz 3 eine für das Folgende wesentliche Erweiterung erteilen kann. Man bedarf hierzu der folgenden Begriffsbildung:

Definition. *Unter dem Wertvorrat $\mathfrak{W}$ einer Bilinearform $C(x, y)$ soll die Gesamtheit der reellen und komplexen Werte verstanden werden, die der Ausdruck*

$$C(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$$

unter der Nebenbedingung $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ annimmt.

Der Wertvorrat einer Hermiteschen Form ist danach ein Stück der reellen Achse, und den Satz 3 kann man auf Grund des eben gegebenen Beweises unmittelbar so erweitern:

Satz 4. *Die Eigenwerte einer beliebigen Bilinearform C gehören alle zu ihrem Wertvorrat $\mathfrak{W}$.*

§ 2.

Das Analogon des Fejérschen Satzes.

Definition. *Eine Bilinearform $C(x, y)$ heiße normal, wenn sie mit ihrer begleitenden Form $\bar{C}'$ vertauschbar ist, d. h. wenn*

$$\sum_{p=1}^{n} c_{\alpha p} \bar{c}_{\beta p} = \sum_{p=1}^{n} \bar{c}_{p\alpha} \bar{c}_{p\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

gilt.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Bereich, der alle Eigenwerte der Bilinearform C umschließt, ist $\mathfrak{W}$ der Wertvorrat von C und ist C normal, so ist $\mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{K}$ identisch.*

Der Beweis ergibt sich in sehr einfacher Weise aus dem folgenden
ıtze von Herrn I. Schur[6]):

Eine beliebige Bilinearform $C(x, y)$ kann durch eine „unitäre" Transformation der Veränderlichen, d. h. durch eine Transformation

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} w_{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} w_{\beta\alpha}\eta_\beta,$$

für die

$$\sum_p w_{\alpha p}\overline{w}_{\beta p} = e_{\alpha\beta}, \qquad \sum_p w_{p\alpha}\overline{w}_{p\beta} = e_{\alpha\beta},$$

d. h. $= 0$ für $\alpha \neq \beta$, $= 1$ für $\alpha = \beta$ gilt, in eine andere Bilinearform $\Gamma(\xi, \eta)$ transformiert werden, deren Koeffizientenmatrix folgendermaßen beschaffen ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Die Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind dann von selbst die Eigenwerte von C (und zugleich von Γ).

Ist C normal, so ist — am bequemsten mit Hilfe des Matrizenılküls — sofort einzusehen, daß auch die transformierte Form Γ normal t. Denn aus

$$\Gamma = \overline{W}'CW, \qquad W\overline{W}' = \overline{W}'W = E$$

lgt

$$\Gamma\overline{\Gamma}' = (\overline{W}'CW)(\overline{W}'\overline{C}'W) = \overline{W}'C\overline{C}'W,$$
$$\overline{\Gamma}'\Gamma = (\overline{W}'\overline{C}'W)(\overline{W}'CW) = \overline{W}'\overline{C}'CW;$$

t also $C\overline{C}' = \overline{C}'C$ (d. h. C normal), so auch $\Gamma\overline{\Gamma}' = \overline{\Gamma}'\Gamma$.

Aus der besonderen Beschaffenheit der Koeffizientenmatrix von Γ gibt sich nun, daß Γ nur dann normal sein kann, wenn alle unterhalb r Diagonale stehenden $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ sind. Denn ist Γ normal, so ist zuächst die Quadratsumme der Beträge der Elemente der 1. Zeile gleich r Quadratsumme der Beträge der Elemente der 1. Kolonne, also:

$$\lambda_1\overline{\lambda}_1 = \lambda_1\overline{\lambda}_1 + \gamma_{21}\overline{\gamma}_{21} + \cdots + \gamma_{n1}\overline{\gamma}_{n1},$$

nd da dies lauter reelle, positive Summanden sind, ist $\gamma_{21} = 0, \ldots, \gamma_{n1} = 0$. us der entsprechenden Betrachtung für die 2. Zeile und 2. Kolonne folrt man sodann $\gamma_{32} = 0, \ldots, \gamma_{n2} = 0$ usf. Man erhält so die

[6]) Math. Annalen 66 (1909), S. 488–510, insbes. § 1.

Folgerung aus dem Satz von I. Schur[7]. *Eine Bilinearform ist dann und nur dann unitär auf eine Diagonalform, d. h. auf eine Bilinearform der Gestalt*

$$\Gamma(x,y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \ldots + \lambda_n x_n y_n$$

transformierbar, wenn sie normal ist.

Aus dieser Folgerung ergibt sich der Beweis von Satz 5 in der Tat nun in sehr einfacher Weise. Denn die Form $\Gamma(x,y)$, die aus $C(x,y)$ durch unitäre Transformation hervorgegangen ist, hat offenbar denselben Wertvorrat $\mathfrak{W}$ und auch dieselben Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wie C. Ist nun C normal, so ist, nach der Folgerung aus dem Satz von Schur,

$$\Gamma(x,\bar{x}) = \lambda_1 x_1 \bar{x}_1 + \ldots + \lambda_n x_n \bar{x}_n;$$

es ist aus diesem einfachen Ausdruck unmittelbar zu ersehen, daß er unter der Einschränkung $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = 1$ alle diejenigen komplexen Werte annimmt, die das kleinste konvexe, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ enthaltende Polygon ausfüllen (vgl. die obige Figur, in der dieses Gebiet schraffiert ist).

§ 3.

Das Verhältnis von Wertvorrat und Maximum einer Bilinearform.

Weit geläufiger als der bisher betrachtete Wertvorrat $\mathfrak{W}$[8]) einer Bilinearform $C = \Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ist ein anderer Begriff: der Wertvorrat $\mathfrak{M}$ der Bilinearform, in der nicht $y_\alpha = \bar{x}_\alpha$ gesetzt sind, sondern unabhängig voneinander variieren und nur an die beiden Nebenbedingungen $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, $\Sigma y_\alpha \bar{y}_\alpha = 1$ gebunden sind. Offenbar ist $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten. $\mathfrak{M}$ ist, wie man leicht sieht, ein Kreis um O; sein Radius M ist die gewöhnlich als „*Maximum der Bilinearform*" bezeichnete Größe. Ist andererseits W der Radius des kleinsten Kreises um O, der $\mathfrak{W}$ ganz enthält, so ist offenbar $W \leqq M$. Das Verhältnis von W und M wird durch die beiden folgenden Sätze aufgeklärt.

Satz 6. *Es ist stets* $W \geqq \frac{1}{2} M$.

Beweis[9]). Es ist

$$C(x+y,\ \bar{x}+\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) + C(x,\bar{y}) + C(y,\bar{x}),$$
$$C(x+iy,\ \bar{x}-i\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) - iC(x,\bar{y}) + iC(y,\bar{x}),$$

---

[7]) Diese unmittelbare Folgerung, die Herr I. Schur a. a. O. nicht ausdrücklich formuliert hat, war ihm so gut wie mir seit langem bekannt. Ich benutze diese Gelegenheit, um in dieser Weise eine Bemerkung des Herrn A. Ostrowski zu ergänzen [Math. Annalen 78 (1917), S. 118, Anm.], der die „Folgerung" benutzt und sich dabei allein auf mich bezieht.

[8]) Die Definition dieses Begriffs findet sich am Ende von § 1 dieser Arbeit.

[9]) Der Beweis ist einer Schlußweise von E. Hellinger, Math. Annalen 69 (1909), S. 303, nachgebildet.

$$C(x-y,\ \bar{x}-\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) - C(x,\bar{y}) - C(y,\bar{x}),$$
$$C(x-iy,\bar{x}+i\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) + iC(x,\bar{y}) - iC(y,\bar{x});$$

man multipliziere bzw. mit $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}i$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}i$ und addiere:

$$\tfrac{1}{4}C(x+y,\overline{x+y}) + \tfrac{1}{4}iC(x+iy,\overline{x+iy}) - \tfrac{1}{4}C(x-y,\overline{x-y}) - \tfrac{1}{4}iC(x-iy,\overline{x-iy}) = C(x,\bar{y}).$$

Nun kann man aus der Tatsache, daß W das Maximum von $|C(x,\bar{x})|$ ist unter der Nebenbedingung $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, unmittelbar entnehmen, daß $|C(x,\bar{x}) \leqq W \Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha$ für beliebige x_α gilt. Also ist für beliebige x_α, y_α:

$$\begin{aligned}|C(x,\bar{y})| &\leqq \tfrac{1}{4}W\{\Sigma(x_\alpha+y_\alpha)(\bar{x}_\alpha+\bar{y}_\alpha) + \Sigma(x_\alpha+iy_\alpha)(\bar{x}_\alpha-i\bar{y}_\alpha) \\ &\quad + \Sigma(x_\alpha-y_\alpha,\bar{x}_\alpha-\bar{y}_\alpha) + \Sigma(x_\alpha-iy_\alpha,\bar{x}_\alpha+i\bar{y}_\alpha)\} \\ &\leqq \tfrac{1}{4}W\{4\Sigma x_\alpha\bar{x}_\alpha + 4\Sigma y_\alpha\bar{y}_\alpha\} = W(\Sigma x_\alpha\bar{x}_\alpha + \Sigma y_\alpha\bar{y}_\alpha).\end{aligned}$$

Wählt man nun x_α, y_α so, daß $C(x,\bar{y})$ gerade das Maximum M seines Betrages erreicht, während $\Sigma x_\alpha\bar{x}_\alpha = 1$, $\Sigma y_\alpha\bar{y}_\alpha = 1$ sind, so erhält man in der Tat $M \leqq 2W$, also $W \geqq \frac{1}{2}M$.

Ich betrachte nun das Beispiel der speziellen Bilinearform x_1y_2 von 2 Paaren von Veränderlichen. Ihre Eigenwerte sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda, & 1 \\ 0 & , \ 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 0;$$

ihren Wertvorrat $\mathfrak{W}$, d. h. die Werte von $x_1\bar{x}_2$ unter $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1$ bestimme ich, indem ich

$$x_1 = \cos t\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad x_2 = \sin t\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

setze; dann wird

$$x_1\bar{x}_2 = \cos t\sin t\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \tfrac{1}{2}\sin 2t\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

und nimmt also, wenn t, φ_1, φ_2 in jeder Weise als reelle Zahlen variieren, alle Werte der Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt an. Endlich ist $M = 1$, da $|x_1y_2| = |x_1|\,|y_2| \leqq \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}\sqrt{|y_1|^2+|y_2|^2} \leqq 1$ ist und für $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ den Wert 1 erreicht.

Satz 7. *Das Beispiel der Bilinearform x_1y_2 zeigt zugleich:*

1. *daß der Wertvorrat $\mathfrak{W}$ bei einer nicht-normalen Bilinearform nicht der kleinste konvexe Bereich zu sein braucht, der die Eigenwerte umschließt* (denn diese reduzieren sich auf den Nullpunkt, während $\mathfrak{W}$ der Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ um 0 ist);
2. *daß tatsächlich $W = \frac{1}{2}M$ sein kann, daß also die Konstante $\frac{1}{2}$ in Satz 6 durch keine größere ersetzt werden kann* (denn es ist $W = \frac{1}{2}$, $M = 1$)[10].

[10]) (Anm. bei der Korrektur.) Herr I. Schur, dem das Manuskript der Arbeit vorgelegen hat, vermag die Bemerkungen dieses Satzes wesentlich zu vertiefen, indem er sämtliche Bilinearformen charakterisiert, bei denen $W = M$ ist, und andererseits sämtliche, bei denen $W = \frac{1}{2}M$ ist.

§ 4.

Der Rand des Bereiches $\mathfrak{W}$.

Auf Grund des widerlegenden Beispiels aus Satz 7 ist es keine selbst-verständliche Folgerung aus Satz 5, wenn ich jetzt für jede, auch nicht-normale Bilinearform beweise:

Satz 8. *Der äußere Rand des Bereiches $\mathfrak{W}$ ist eine konvexe Kurve.*

Zum Beweise stelle ich C gemäß Satz 2 in der Form $H + iK$ dar, wo H und K Hermitesche Formen sind, und transformiere in bekannter Weise H durch eine unitäre Transformation auf die Gestalt $\mathsf{H} = \mu_1 \xi \bar{\xi}_1 + \ldots + \mu_n \xi_n \bar{\xi}_n$; $\mu_1, \ldots, \mu_n$ werden dann reell sein, die Eigenwerte von H und H zugleich; sie mögen der Größe nach geordnet sein $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n$. Dieselbe unitäre Transformation verwandelt K in irgendeine andere Hermitesche Form $\mathsf{K}(\xi, \eta)$ und C in eine Bilinearform $\Gamma(\xi, \eta)$, die denselben Wertvorrat wie $C(x, y)$ hat:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \mathsf{H}(\xi, \eta) + i\,\mathsf{K}(\xi, \eta) = \mu_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \mu_n \xi_n \eta_n + i\,\mathsf{K}(\xi, \eta).$$

μ_1 ist der rechtseste von allen Werten, die $\mathsf{H}(\xi, \bar{\xi})$ für $\Sigma \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ annehmen kann; und da $\mathsf{H}(\xi, \bar{\xi})$ der reelle Teil von $\Gamma(\xi, \bar{\xi})$ ist, liegt $\mathfrak{W}$ ganz links von der Vertikalen mit der Abszisse μ_1 und erreicht diese eben.

Ist nun μ_1 ein einfacher Eigenwert von H, also $\mu_1 > \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n$, so nimmt H den Wert μ_1 nur an, wenn $\xi_1 \bar{\xi}_1 = 1$, $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ ist; nur für dieses Wertsystem erreicht also $\Gamma(\xi, \eta)$ die genannte Vertikale. Nun hat der imaginäre Teil von Γ, d. i. $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$, für jenes Wertsystem einen ganz bestimmten Wert. Also enthält die Vertikale, wenn μ_1 einfacher Eigenwert von H ist, nur einen einzigen Punkt von $\mathfrak{W}$. Ist jedoch μ_1 mehrfacher Eigenwert, etwa $\mu_1 = \ldots = \mu_\alpha > \mu_{\alpha+1} \geqq \ldots \geqq \mu_n$, so erreicht $\Gamma(\xi, \bar{\xi})$ die Vertikale, wenn $\xi_{\alpha+1} = 0, \ldots, \xi_n = 0$ und $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \ldots + \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ ist. $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$ wird für diese Wertsysteme im allgemeinen nicht nur einen einzigen Wert annehmen; aber es reduziert sich auf eine Hermitesche Form von $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha$ allein, die lediglich an die Bedingung $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \ldots + \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ gebunden sind, und die Werte, die $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$ dabei annimmt, werden also, wegen der beim Beginne des Beweises von Satz 3 erwähnten bekannten Tatsache, eine zusammenhängende Strecke erfüllen.

Das bisherige Ergebnis ist, daß die Vertikale, die den Bereich $\mathfrak{W}$ eben von rechts her berührt, von ihm entweder nur einen einzigen Punkt oder eine einzige zusammenhängende Strecke enthält. Versteht man aber nun unter η irgendeine komplexe Zahl vom absoluten Betrage 1 und wendet man auf $\eta C(x, y)$ dieselbe Betrachtung an, wie eben auf $C(x, y)$, so ist der Wertvorrat dieser Form gegen den von C um den zu η ge-

rigen Arcus um O gedreht, und es folgt, daß für jede andere Richtung i $\mathfrak{W}$ dasselbe gilt, was bisher für die vertikale Richtung gezeigt wurde. araus geht aber hervor, daß die äußere Begrenzung des Bereichs $\mathfrak{W}$ eine nvexe Kurve ist, die natürlich stückweise auch aus geradlinigen Strecken stehen kann.

§ 5.

Der binäre Fall.

Erweiterung der Aufgabe: der Bereich $\mathfrak{Z}_n$.

Die Frage, ob $\mathfrak{W}$ das ganze Innere seines äußeren, konvexen Randes sfüllt, oder Löcher hat, ist in § 4 offen geblieben. Ich nehme jetzt ne Erweiterung der ganzen Fragestellung vor, welche für den binären ll gestattet, das Fehlen solcher Löcher einzusehen, aber auch zugleich e Schwierigkeiten aufdeckt, die im allgemeinen Falle aus der Möglichit der Löcher erwachsen.

Anstatt zweier Hermitescher Formen H, K betrachte ich ν Hermitesche Formen[11]) $H_1, \ldots, H_\nu$, setze $u_1 = H_1(x, \bar{x}), \ldots, u_\nu = H_\nu(x, \bar{x})$ d deute $u_1, \ldots, u_\nu$ als reelle Koordinaten im Raume von ν Dimensionen; riieren die x_α nun gemäß der Einschränkung $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, so erfüllen e $u_1, \ldots, u_\nu$ einen Bereich, dessen äußere Begrenzung, genau wie in § 4, nvex ist. Für $\nu = 2$ ist dies genau die bisherige Aufgabe. Es wird er andererseits genügen, ν gleich der Höchstzahl linear unabhängiger ermitescher Formen zu wählen, die bei n Variabeln auftreten können, mlich $\nu = n^2$. Denn alle niedrigeren Fälle kann man aus diesem höchen durch Projektion ableiten. In diesem höchsten Falle aber erhält an einen bis auf lineare homogene Transformationen völlig bestimmten reich im Raume von n^2 Dimensionen, der $\mathfrak{Z}_n$ heißen möge. Bisher ht von ihm fest, daß er ganz im Endlichen liegt und von außen konvex grenzt ist. Für das binäre Gebiet gilt nun:

Satz 9. *Der Bereich $\mathfrak{Z}_2$ ist die Oberfläche eines gewöhnlichen Ellipsoids, o in einem dreidimensionalen linearen Teilraum des Raumes von Dimensionen gelegen.*

Seien nämlich

$$u_1 = x_1\bar{x}_1, \quad u_2 = x_2\bar{x}_2, \quad u_3 = \tfrac{1}{2}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1), \quad u_4 = \frac{1}{2i}(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)$$

die 4 linear unabhängigen binären Hermiteschen Formen ausgewählt, wird $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1$ genau dann erfüllt sein, wenn man

[11]) In der analogen Richtung liegt eine Verallgemeinerung, die Herr Fejér in ner Arbeit von $\nu = 2$ auf $\nu = 3$ vornimmt.

$$x_1 = \cos t\, e^{i\varphi_1}, \qquad x_2 = \sin t\, e^{i\varphi_2}$$

setzt und t, φ_1, φ_2 in jeder Weise zwischen 0 und 2π reell variiert. Es wird dabei

$$u_1 = \cos^2 t,\ u_2 = \sin^2 t,\ u_3 = \tfrac{1}{2}\sin 2t \cos(\varphi_1 - \varphi_2),\ u_4 = \tfrac{1}{2}\sin 2t \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

Statt φ_1, φ_2 einzeln ist also nur die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ wesentlich, $\mathfrak{Z}_2$ wird nicht drei-, sondern zweidimensional. Nun ist andererseits

$$u_3^2 + u_4^2 = u_1 u_2, \qquad u_1 + u_2 = 1,$$

und man übersieht leicht, daß die ganze Oberfläche dieses Ellipsoids durch die voranstehende Parameterdarstellung ausgefüllt wird.

Den Fall $\nu = 2$ erhält man durch Parallelprojektion dieses Ellipsoids; als Projektionszentrum dient eine unendlichferne Gerade, als Projektionsstrahlen die ∞^2 zweidimensionalen Ebenen durch jene unendlichferne Gerade, und es wird auf eine zweidimensionale Ebene projiziert. Die Projektion ist daher entweder die Fläche einer Ellipse oder eine Strecke oder ein Punkt. Kombiniert man dieses Resultat mit einer einfachen Rechnung, die man im binären Falle an die durch den Schurschen Satz gegebene Normalform anknüpfen kann, so hat man:

Satz 10. *Für eine binäre Bilinearform ist $\mathfrak{W}$ die Fläche einer Ellipse mit den beiden Eigenwerten der Form als Brennpunkten, die sich dann und nur dann auf die Strecke zwischen diesen beiden Eigenwerten reduziert, wenn die Form normal ist.*

Für den allgemeinen Fall $\nu > 2$ oder $n > 2$ ist aber klar geworden, daß der Bereich hohl sein kann. Ob dies schon für $\nu = 2$, $n > 2$ eintreten kann, bleibt dahingestellt, wenn auch unwahrscheinlich.

§ 6.

Der Zusammenhang mit dem Satze von Fejér.

Der Weg, auf dem ich von dem Fejérschen Satze aus zur Aufstellung von Satz 5 gelangte, ist der folgende. Unter Einführung der komplexen Variabeln $z = \cos t + i \sin t$ füge ich das Paar von Fourierschen Reihen zu einer Laurentschen Entwicklung $\Sigma c_n z^n = f(t) + i g(t)$ zusammen; dieser ordne ich die Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen $\Sigma c_{\beta-\alpha} x_\alpha y_\beta$ zu (α, β laufen von $-\infty$ bis $+\infty$), eine sog. L-Form [12] und beweise:

1. Das Spektrum dieser L-Form, d. h. die Gesamtheit ihrer Eigenwerte, ist der Wertvorrat der Funktion $\Sigma c_n z^n$ für $|z| = 1$ [13]).

[12]) Math. Annalen 70, S. 354.

[13]) A. a. O. Satz 5, S. 360.

2. Das n-te arithmetische Mittel der Reihe $\Sigma c_n z^n$, d. h. der Ausdruck

$$c_0 + \frac{n-1}{n}\left(c_1 z + c_{-1}\frac{1}{z}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(c_{n-1}z^{n-1} + c_{-(n-1)}\frac{1}{z^{n-1}}\right),$$

für $|z| = 1$ ein Wert des Wertvorrats der L-Form. Denn setzt man dieser

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}},\ x_2 = \frac{\bar{z}}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ x_n = \frac{\bar{z}^{n-1}}{\sqrt{n}},\ x_{n+1} = 0,\ \ldots,$$

wird in der Tat $C(x, \bar{x})$ gleich dem eben aufgeführten Mittel, während $\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots = 1$ ist[14]).

3. Jede L-Form ist normal[15]). Denn je zwei L-Formen sind miteinander vertauschbar, und die begleitende Form einer L-Form ist selbst wieder eine L-Form; also ist jede L-Form mit ihrer begleitenden vertauschbar.

Der Fejérsche Satz ist demnach in dem folgenden enthalten: *Der Wertvorrat $\mathfrak{W}$ einer L-Form liegt ganz in dem kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{K}$, der den Wertvorrat der zugehörigen Funktion $\Sigma c_n z^n$ längs des Einheitskreises $|z| = 1$ umschließt, und ist mit ihm identisch.*

Umgekehrt genügen die Methoden der Fejérschen Arbeit, um den Satz in dieser erweiterten Fassung zu beweisen, worauf ich nicht näher eingehe.

Es sei noch erwähnt, daß man durch vorsichtige Grenzübergänge und andere Methoden Satz 4 und Satz 8 auf beliebige beschränkte Bilinearformen von unendlichvielen Veränderlichen ausdehnen und hinzufügen kann, daß bei einer solchen, die zugleich normal ist, der kleinste konvexe Bereich, der das Spektrum enthält, sicher $\mathfrak{W}$ angehört, nicht nur innerhalb einer äußeren Randlinie gelegen ist.

Kiel, den 10. Mai 1918.

---

[14]) A. a. O. S. 358 unten, Gött. Nachrichten 1910, § 4.

[15]) A. a. O. S. 357.

(Eingegangen am 22. Mai 1918.)

Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung.

(H. A. Schwarz zu seinem 50jährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 zugeeignet.)

V. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung).

Von

Paul Koebe in Jena.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Teil: Abbildung (I_a) auf die längs endlichen geraden Strecken aufgeschlitzte Vollebene E_a.

§ 1. Formulierung und Unitätsbeweis der Abbildung I_a. Ansatz des Kontinuitätsbeweises.

§ 2. Stetigkeitsbeweis. Allgemeiner Gang des Kontinuitätsbeweises.

§ 3. Beweis des Limessatzes.

Zweiter Teil: Abbildungen (I_b', I_b'', I_b''') auf spiralförmig geschlitzte Bereiche der Ebene E_b.

§ 4. Abbildung (I_b') auf die spiralförmig aufgeschlitzte Vollebene (Verzerrungssätze I—III).

§ 5. Abbildungen (I_b'' und I_b''') auf eine spiralförmig aufgeschlitzte Kreisfläche bzw. Kreisringfläche.

Dritter Teil: Häufungsmethoden zum Beweise des Stetigkeits- und Limessatzes.

§ 6. Darlegung zweier bekannter Konvergenzsätze.

§ 7. Beweis des Stetigkeits- und Limessatzes für die Abbildung I_a auf Grund der Konvergenzsätze des § 6.

§ 8. Darlegung einer zweiten Häufungsmethode (Vermeidung der Konvergenzsätze des § 6. Verzerrungssatz IV).

§ 9. Anwendung der beiden Häufungsmethoden auf die Abbildungen I_b, I_b'', I_b'''. (Verzerrungssätze V—VII).

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung schließt sich an eine in den Acta math. d. 41 erscheinende Abhandlung IV der Serie an, die ihrerseits an die bhandlung II (Acta math., Bd. 40) der Serie anknüpft [1]). In letzterer bhandlung ist u. a. der Satz bewiesen worden, daß jeder schlichte mehrch zusammenhängende Bereich B der z-Ebene (ausgenommen der Fall es von zwei isolierten Punkten begrenzten zweifach zusammenhängenden ereichs) einunendlichdeutig auf das Innere eines ζ-Einheitskreises abbildet werden kann (*Fundamental-Abbildung*). Auf dieser Grundlage urden in der Abhandlung IV vermittels automorpher Reihenbildungen it ζ als unabhängiger Variablen eineindeutige Abbildungen des Bereichs B f andere schlichte z'-Bereiche mit charakteristischer Begrenzungsform ewonnen (*charakteristische Bereiche*). Diese charakteristischen Bereiche aren *Schlitzbereiche*, worunter wir ganz allgemein solche Bereiche verehen wollen, deren Begrenzung mindestens ein schlitzförmiges Stück aufeist, d. i. ein solches Begrenzungsstück, an welches das Innere des beffenden schlichten Bereichs von beiden Seiten her herantritt.

Zur näheren Charakterisierung der in IV und vorliegender Abhandng in Betracht gezogenen Schlitzbereiche wollen wir die mit dem System *aller Geraden* ausgestattete z'-Ebene mit E_a bezeichnen, ihren unendch fernen Punkt als *Hauptpunkt*. Mit E_b andererseits bezeichnen wir e z'-Ebene, ausgestattet mit dem Liniensystem Σ_b *aller logarithmischen piralen*, die den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt (*Hauptnkte der Ebene* E_b) als asymptotische Punkte besitzen. Zu dem Linienstem Σ_b rechnen wir auch die den Nullpunkt mit dem unendlich fernen nkte verbindenden *Halbgeraden* als Spiralen der Neigung Null und die n den Nullpunkt als Mittelpunkt konstruierten *Kreise* als Spiralen der eigung $\pm \frac{\pi}{2}$.

---

[1]) Die Abhandlungen I–IV sind wie folgt betitelt:

I. „Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung", Journ. f. Math., Bd. 145 (1915), S. 177–223.

II. „Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche", Acta math., Bd. 40 (1916), S. 251–290.

III. „Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke", Journ. f. Math., Bd. 147 (1917), S. 67–104.

IV. „Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche", Acta math., Bd. 41, S. 305–344.

Die vollständige Serie ist auf ca. acht Abhandlungen berechnet.

In der Abhandlung IV hatten wir nun teils Abbildungen auf Schlitzbereiche der Ebene E_a, teils Abbildungen auf Schlitzbereiche der Ebene E_b ausgeführt. Sehen wir von den am Ende der Abhandlung IV vorgebrachten Abbildungen ab, bei denen der Schlitzbereich auf der Begrenzung einen Hauptpunkt enthält, so sind als in IV betrachtete Schlitzbereiche die folgenden zu nennen:

1. die *Ebene* E_a, aufgeschlitzt längs endlich vielen getrennten endlichen Strecken;
2. die *Ebene* E_b, aufgeschlitzt längs endlich vielen dem Liniensystem Σ_b entnommenen Spiralbögen;

Fig. 1. (Abbildung I_a).

Fig. 2. (Abbildung I_b').

Fig. 3. (Abbildung I_b'').

Fig. 4. (Abbildung I_b''').

3. die Fläche des *Einheitskreises in der Ebene* E_b, aufgeschlitzt längs endlich vielen dem Liniensystem Σ_b entnommenen Spiralbögen;
4. die Fläche eines nach außen durch den Einheitskreis nach innen durch einen konzentrischen Kreis begrenzten *Ringgebietes in der Ebene* E_b, aufgeschlitzt längs endlich vielen dem Liniensystem Σ_b entnommenen Spiralbögen.

Während wir nun in der Abhandlung IV diese Bereichformen hinsichtlich der Richtung bzw. Neigung der Begrenzungsschlitze noch gewissen Beschränkungen unterworfen haben, indem entweder nur Linien gleicher Richtung bzw. Neigung an der Begrenzung oder doch nur Linien zweier zueinander senkrechten Richtungen bzw. Neigungen teilnehmen sollten, machen wir jetzt keine Beschränkungen mehr, sondern *schreiben für jeden Begrenzungsschlitz besonders eine Richtung bzw. Neigung vor*[2]).

Die hier eingeschlagene Methode der Behandlung der so entspringenden Abbildungsaufgaben ist die *Kontinuitätsmethode*. Der Bereich B wird zunächst unter Bezugnahme auf die Ergebnisse der Abhandlung IV in eine zweckmäßig gewählte charakteristische Form übergeführt. In dieser Form wird der Bereich wieder mit B bezeichnet. Der unbekannte Bildbereich B besitzt nun jedesmal die gleiche Konstantenzahl wie der Bereich B. Bekannt ist, daß jeder vorgegebene Bereich B' auf einen Bereich B ab-

[2]) Siehe den letzten Abschnitt der Voranzeige, „Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung", Gött. Nachr. 1912.

ildet werden kann. Durch den Unitätssatz und die Übereinstimmung Konstantenzahlen wird die Anwendung der Kontinuitätsmethode nahe egt. Der exakte Beweis zerfällt, abgesehen von dem hier herangezogenen, ch Brouwer allgemein bewiesenen Satze von der *Invarianz des Ge-tes* bei stetiger eineindeutiger Abbildung mehrdimensionaler Räume, ptsächlich in zwei Stücke: nämlich den *Beweis des Stetigkeitssatzes*, nach die bekannte Abbildungsfunktion $\varphi(z')$, die den Bereich B' auf B ildet, von den Konstanten des Bereichs B' stetig abhängt und den *weis des Limessatzes*, wonach für einen Bereich B_* die Existenz einer ehörenden Abbildungsfunktion $f_*(z)$ der verlangten Art behauptet wer-kann, wenn es in beliebiger Nähe von B_* Bereiche B gibt, für welche Existenz zugehörender Abbildungsfunktionen $f(z)$ der verlangten Art eits feststeht. Im ersten Teile unserer Abhandlung erbringen wir den weis des Stetigkeitssatzes und Limessatzes in Form eines auf Ab-ätzungen des Annäherungsgrades beruhenden Konvergenzbeweises (*erste thode*). Im zweiten Teile dagegen stützen wir uns zum gleichen Zwecke zwei *allgemeine Konvergenzsätze* über analytische Funktionen, von lchen der erste besagt, daß aus jeder unendlichen Gesamtheit in einem reiche erklärter regulärer beschränkter analytischer Funktionen eine ichmäßig konvergente Folge ausgewählt werden kann (*zweite Methode, te Häufungsmethode*). Wir bringen schließlich noch eine von den ge-nnten Konvergenzsätzen unabhängige *zweite Häufungsmethode* (*dritte thode*), bei welcher der Beweis des Limessatzes auf den Beweis des tigkeitssatzes zurückgeführt wird. Der Bereich B'_* wird dabei als ufungsbereich unter Anwendung des Satzes vom Häufungspunkte ge-den, nachdem festgestellt ist, daß die Bereiche B', die den Nachbar-reichen B des Bereichs B_* entsprechen, nur eine *beschränkte Verzerrung* eiden können.

Bei unseren Untersuchungen werden wir wiederholt Veranlassung haben, unserem Verzerrungssatze (*Verzerrungssatz* I) Gebrauch zu machen, welchem wir hier einige in besonderen Sätzen (*Verzerrungssätze* II—VII) gesprochene, auch für sich bemerkenswerte Folgerungen ziehen, von nen die Sätze II und III in dieser Form schon bei früheren Gelegen-ten von uns zur Geltung gebracht worden sind.

Die hier behandelten Abbildungen werden wir in einer weiteren Ab-ndlung (VI) Verallgemeinerungen unterwerfen[3]), wobei sich erst die le Tragweite der hier eingeschlagenen Methode zeigen wird.

---

[3]) Siehe die Voranzeigen, „Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der formen Abbildung und Uniformisierung", zweite Mitteilung, Gött. Nachr. 1916; te Mitteilung, Gött. Nachr. 1918.

Erster Teil.

Abbildung (I_a) auf die längs endlichen geraden Strecken aufgeschlitzte Vollebene E_a.

§ 1.

Formulierung und Unitätsbeweis der Abbildung I_a. Ansatz des Kontinuitätsbeweises.

1. Es sei B ein beliebig vorgegebener schlichter Bereich mit m getrennten Begrenzungslinien. Wir nehmen an, daß der unendlich ferne Punkt der Bereichebene (z-Ebene) im Innern des Bereichs B liege. Wir stellen die Aufgabe (I_a)[4]), den Bereich B eineindeutig konform auf einen andern schlichten Bereich abzubilden, dessen Begrenzung von m einfachen endlichen getrennten geradlinigen Schlitzen gebildet wird; und zwar wird *für jede der m Begrenzungslinien $L_1, L_2, \ldots, L_m$ des gegebenen Bereichs B die Richtung des ihm entsprechenden Schlitzes des unbekannten Bildbereichs B' vorgeschrieben.* Es wird ferner verlangt, daß der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung sich selbst entsprechen soll, und zwar in der Weise, daß die Abbildungsfunktion $f(z)$ im Unendlichen eine Entwicklungsform der Gestalt

$$f(z) = z + ((0))$$

hat, unter $((0))$ eine im Unendlichen reguläre, im Punkte ∞ selbst den Wert Null annehmende analytische Funktion verstanden.

Wir zeigen zunächst, daß es nicht mehr als eine analytische Funktion $f(z)$ der oben geforderten Art geben kann (*Unitätssatz*). Nehmen wir dazu an, es gäbe außer der B auf B' abbildenden Funktion $f_1(z)$ noch eine weitere, B auf B'' abbildende Funktion $f_2(z)$ mit den geforderten Eigenschaften, so würden wir in $f_2(z) - f_1(z)$ eine analytische Funktion haben, welche sich innerhalb des ganzen Bereichs B regulär verhält, insbesondere also auch dem absoluten Betrage ihrer Werte nach beschränkt ist. Diese Funktion würde bei Annäherung an irgendeine Begrenzungslinie des Bereichs B nur solche Werte annehmen, welche sich, geometrisch gesprochen, gleichmäßig unbegrenzt einer gewissen endlichen Strecke nähern. Verbindet man nämlich die Punkte zweier untereinander paralleler Schlitze paarweise durch Vektoren, deren Anfangspunkt dem ersten, deren Endpunkt dem zweiten Schlitze angehört, so beschreibt der Endpunkt dieses Vektors, wenn man ihn sich parallel verschoben denkt, bis sein Anfang

---

[4]) Die Benennungen I_a, I_b', I_b'', I_b''' sind im Hinblick auf die in der Abhandlung VI vorzunehmenden Verallgemeinerungen gewählt.

nkt mit dem Nullpunkt zusammenfällt, eine mit den gegebenen beiden hlitzen parallele Strecke, dessen Abstand vom Nullpunkte gleich ist m Abstande der beiden gegebenen Schlitze voneinander. Bezeichnen r die Größe $f_1(z)$ mit z_1', die Größe $f_2(z)$ mit z_2', so können wir nunehr weiter sagen, daß $z_2' - z_1'$ eine innerhalb B' reguläre Funktion von z', welche auf der Begrenzung des Bereichs B' auch regulär sein muß ch den allgemeinen Entwicklungen unserer Abhandlung I über Ränderordnung. Es ist nämlich die Funktion $z_2'(z_1')$ eine solche Funktion n z_1', welche die Umgebung eines Schlitzes wieder auf die Umgebung es Schlitzes schlicht abbildet, so daß die Entwicklungen der §§ 8, 9 r Abhandlung I Anwendung finden können. Demnach ist in der Tat ch $z_2' - z_1' = z_2'(z_1') - z_1'$ auf jedem Begrenzungsschlitz des Bereichs B' ne reguläre Funktion von z_1'. Diese Funktion nimmt nach allgemeinen nktionentheoretischen Prinzipien das Maximum ihres absoluten Betrages f der Begrenzung von B', also auf einem der Begrenzungsschlitze von B'. Hier aber ergibt sich nun ein Widerspruch, wenn man nicht annimmt, Funktion $z_2' - z_1'$ sei eine Konstante. Denn es ist klar, daß, sofern $- z_1'$ keine Konstante ist, diese Funktion von z' bei der Abbildung eine llständige Einbettung aller derjenigen Strecken liefern muß, welche den ertevorrat der von dieser Funktion auf der Begrenzung von B' angemmenen Werte geometrisch darstellen. Unter diesen Umständen kann er unmöglich auf jenen Strecken das Maximum des absoluten Betrages n der Funktion $z_2' - z_1'$ angenommen werden. Demnach muß $z_2' - z_1'$ h auf eine Konstante reduzieren; und diese Konstante kann nur die ll sein, weil $z_2' - z_1'$ sich für $z_1' = \infty$ jedenfalls auf Null reduziert, da vohl z_1' als auch z_2' als Funktionen von z nach Voraussetzung die Entcklungsform

$$z + ((0))$$

ben sollten.

2. Nachdem durch das Vorhergehende der Unitätsbeweis erbracht ist, nen wir nunmehr an den *Existenzbeweis* heran.

Für unsere spätere Lösung der Aufgabe nach der Kontinuitätsmethode zunächst eine *vorbereitende Abbildung* des noch allgemein begrenzten Bechs B auf einen charakteristischen Bereich wichtig. Als charakteristische rm empfiehlt sich uns hier die Form als *Parallelschlitzbereich*. Wir nnen den Bereich B, wie wir bereits wissen (Abhandlung IV), auf einen rallelschlitzbereich in der Weise konform abbilden, daß im Unendlichen Entwicklungsform $z + ((0))$ besteht und außerdem alle Schlitze des rallelschlitzbereichs *parallel der Achse des Reellen* sind. Dadurch redut sich unsere Aufgabe nunmehr auf die folgende:

Gegeben ist in der z-Ebene ein schlichter, m-fach zusammenhängende Parallelschlitzbereich, dessen sämtliche m Schlitze durch endliche, der Achse des Reellen parallele Strecken dargestellt werden. Dieser Bereich B soll durch Vermittelung einer zu bestimmenden Funktion $f(z)$ eindeutig konform auf einen Bereich B' mit für jede einzelne Begrenzungslinie vorgeschriebener Schlitzrichtung abgebildet werden, wobei ferner der unendlich ferne Punkt wieder in den unendlich fernen Punkt übergehen soll, und zwar in der Weise, daß $f(z)$ die Entwicklungsform $z + ((0)$ im unendlich fernen Punkte erhält.

Wir bezeichnen die Größe $f(z)$ mit z' und die Umkehrungsfunktion der Funktion $f(z)$ mit $z = \varphi(z')$. Dem Sinne der *Kontinuitätsmethode* entsprechend konstatieren wir zunächst die den Kontinuitätsbeweisgedanken nahelegenden *Grundtatsachen*, nämlich:

1. Die Tatsache der Existenz einer bestimmten Abbildungsfunktion $\varphi(z')$ und damit eines Bereiches B zu jedem vorgelegten Schlitzbereiche B;

2. Die vorhin bewiesene Tatsache der Unität (eindeutigen Bestimmtheit) des Bereiches B' durch den Bereich B — ein Satz, dessen Inhalt auch so ausgedrückt werden kann: zu je zwei voneinander verschiedenen Bereichen B' gehören auch voneinander verschiedene Bereiche B.

3. Die Bereiche der Gattung B' bilden eine $3m$-parametrige Mannigfaltigkeit M'; ebenso bilden die Bereiche der Gattung B eine $3m$-parametrige Mannigfaltigkeit M.

Insofern nun jedem Individuum der Mannigfaltigkeit M' ein und nur ein Individuum der Mannigfaltigkeit M entspricht, wird die Vermutung nahegelegt, daß der vollständigen Durchlaufung der Mannigfaltigkeit M' auch eine volle Durchlaufung der Mannigfaltigkeit M entsprechen wird. Die Erweisung der Richtigkeit dieser Vermutung ist eben die an uns jetzt gestellte Forderung.

§ 2.

Stetigkeitsbeweis.

Die erste sich hier einstellende Frage ist die nach der Stetigkeit der zwischen den Mannigfaltigkeiten M' und M durch die Abbildungsfunktion $\varphi(z')$ hergestellten Abhängigkeit (*Stetigkeitsbeweis*). Wir haben insbesondere zu beweisen, daß die Parameter des Bereiches B sich stetig mit den Parametern des Bereiches B' ändern; d. h. es ist zu zeigen, daß die Endpunkte der Begrenzungsschlitze des Bereiches B sich stetig ändern bei stetiger Änderung der Endpunkte der Begrenzungsschlitze des Bereiches B'.

Wir fassen zu dem Zwecke zwei Bereiche B'_0 und B'_1 der Mannigfaltigkeit M' ins Auge, von welchen B'_1 sich unbegrenzt dem Bereiche B

ihernd vorgestellt werde. Die Abbildungsfunktionen, welche dieselben auf arallelschlitzbereiche B_0 und B_1 der Mannigfaltigkeit M abbilden, mögen it $\varphi_0(z')$ und $\varphi_1(z')$ bezeichnet werden.

Jede Begrenzungslinie von B_0' umgeben wir jetzt mit zwei Hilfsnien H und h, von welchen H die Linie h umschließt. Beide Linien h nd H sollen auch die gleich numerierten Begrenzungslinien von B_1' umchließen. Indem wir den Grenzübergang $B_1' \to B_0'$ ausführen, stellen wir ns vor, daß gleichzeitig die Linie h sich unbegrenzt gleichmäßig dem ugeordneten Begrenzungsschlitze von B_0' nähere. Wir umgeben schließlich lle Begrenzungsschlitze von B_0' und B_1' mit einer Kreislinie K, deren Iittelpunkt mit dem Nullpunkt zusammenfallend angenommen werden nöge. Das Äußere des Kreises K werde mit β, das Äußere der Linien H mit $\beta_{(H)}$, das Äußere der Linien h mit $\beta_{(h)}$ bezeichnet.

Zunächst stellen wir die Beschränktheit der Funktion $\varphi_1(z')$ im ganzen Bereiche $\beta_{(h)}$ fest. Die aufzustellende Schranke muß unabhängig von der Wahl des Bereiches B_1' sein, welcher nur in einer gewissen Nachbarschaft von B_0' liegend vorzustellen ist. Wegen der Schlichtheit der durch die Funktion $\varphi_1(z')$ geleisteten konformen Abbildung ist der Beschränktheitsnachweis dann erbracht, wenn die Beschränktheit auf der Linie K dargetan ist. Diese aber ergibt sich aus dem folgenden auf der Kreisfläche β zur Anwendung zu bringenden Hilfssatze.

Hilfssatz 1: Es sei $F(z)$ eine für $|z| \geqq R$ reguläre und eindeutige Funktion, die nur im Unendlichen unstetig wird wie $z + (\!(0)\!)$, ferner die Eigenschaft hat, daß das Maximum $M(\varrho)$ des absoluten Betrages ihrer Werte auf dem Kreise $|z| = \varrho \geqq R$ eine zugleich mit ϱ wachsende Funktion ist für alle der Bedingung $\varrho \geqq R$ genügenden Radien ϱ. Alsdann läßt sich eine nur von R, nicht von der Wahl der Funktion $F(z)$ abhängende obere Schranke für die Größe $M(R)$ angeben.

Beweis: Nach der Voraussetzung kann gesetzt werden:

$$F(z) = z + \frac{\psi(z)}{z}, \tag{*}$$

unter $\psi(z)$ eine für $|z| \geqq R$ mit Einschluß des Punktes ∞ reguläre Funktion verstanden. Das Maximum μ von $|\psi(z)|$ im Bereiche $|z| \geqq R$ wird auf dem Kreise $|z| = R$ angenommen. Da

$$\psi(z) = zF(z) - z^2$$

ist, ergibt sich

$$\mu \leqq RM(R) + R^2$$

und hieraus wegen Gleichung (*)

$$M(\varrho) \leqq \varrho + \frac{RM(R) + R^2}{\varrho},$$

insbesondere

$$M(2R) \leqq 2R + \frac{M(R)+R}{2} = \tfrac{5}{2}R + \tfrac{1}{2}M(R).$$

Da nun nach Voraussetzung $M(2R) > M(R)$ sein soll, so muß

$$\tfrac{5}{2}R + \frac{M(R)}{2} > M(R)$$

sein, d. h.

$$\underline{M(R) < 5R.}$$

Nachdem der Beschränktheitsnachweis erbracht ist, wenden wir nunmehr unsere Aufmerksamkeit den imaginären Teilen der Funktionen $\varphi_0(z')$ und $\varphi_1(z')$ zu. Die Wertschwankung (Differenz des algebraisch größten und kleinsten Wertes) des imaginären Teiles der Funktion $\varphi_0(z')$ auf den Linien h ist für den zu betrachtenden Grenzübergang aus allgemeinen Stetigkeitsgründen offenbar eine infinitesimale Größe, da B_0' ein dabei festbleibender Bereich ist, während die Linien h sich gleichmäßig den Begrenzungsschlitzen von B_0' nähern. Eine besondere Untersuchung erfordert jedoch der entsprechende Nachweis für den variabel vorgestellten Bereich B_1'. Als Voraussetzung dieses Nachweises dient der vorausgeschickte Beschränktheitsnachweis. Es wird nunmehr der folgende Hilfssatz zur Anwendung gebracht:

Hilfssatz 2: Es sei $F(z)$ eine für $|z| \leqq R$ eindeutig und regulär erklärte beschränkte Funktion. Alsdann bleibt die Differenz $F(z) - F(0)$ dem absoluten Betrage nach für $|z| \leqq \varrho < R$ unterhalb einer nur von M und $\frac{\varrho}{R}$ abhängenden Schranke, die zugleich mit $\frac{\varrho}{R}$ unendlich klein wird. Mit M ist hierbei die der vorausgesetzten Beschränktheit gemäß vorhandene obere Schranke des absoluten Betrages der Werte $F(z)$ bezeichnet.

Beweis: Es ist $\frac{F(z)-F(0)}{z}$ für $|z| \leqq R$ regulär; daher wird das Maximum des absoluten Betrages der Werte dieser Funktion am Rande angenommen. Daraus ergibt sich:

$$\left|\frac{F(z)-F(0)}{z}\right| < \frac{2M}{R},$$

mithin

$$|F(z)-F(0)| < \frac{2M}{R}|z|.$$

Den so bewiesenen Hilfssatz 2 hat man nunmehr auf die einzelnen Begrenzungspunkte von B_1' als Mittelpunkte an Stelle des Nullpunktes zur Anwendung zu bringen unter Beachtung, daß die an Stelle von $F(z)$ tretende Funktion $\varphi_1(z')$ nach dem Spiegelungsprinzip über die Begrenzungsschlitze hinweg analytisch fortgesetzt werden kann. Die Umkehrpunkte der Begrenzungsschlitze hat man sich zwecks Anwendung des Hilfssatzes mittels einer Quadratwurzelabbildung in gewöhnliche Punkte transformiert zu denken

an bemerkt sofort, da um jeden Begrenzungsschlitz von B_1' herum bis
einer gewissen festen endlichen Entfernung keine singulären Punkte der
unktion $\varphi_1(z')$ liegen, daß durch Anwendung des Hilfssatzes als Ergebnis
ne infinitesimale Abschätzung der Wertabweichung $\varphi_1(z')$ auf, den
inien h gegenüber den auf benachbarten Schlitzpunkten angenommenen
erten gefunden wird, mithin eine infinitesimale Abschätzung der Wert-
hwankung des imaginären Teiles der Funktion $\varphi_1(z')$ auf den Linien h,
elche nicht von der Wahl des Bereiches B_1' abhängt.

Durch das Vorhergehende ist festgestellt, daß die Wertschwankung
es imaginären Teiles der beiden Funktionen $\varphi_0(z')$ und $\varphi_1(z')$, mithin
uch der Funktion $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ auf jeder der Linien h bei dem Grenz-
ergange gleichmäßig unendlich klein wird. Daraus folgt, daß die Wert-
hwankung des imaginären Teiles der Differenzfunktion im ganzen Bereiche
$_{(h)}$ beim Grenzübergange unendlich klein wird, weil nämlich die Wert-
hwankung in $\beta_{(h)}$ die Summe der Wertschwankungen auf den einzelnen
egrenzungslinien h nicht übersteigen kann gemäß folgenden Hilfssatzes,
welchem reeller und imaginärer Teil nur mit vertauschten Rollen auf-
eten.

Hilfssatz 3: Es sei $F(z)$ eine in einem mehrfach zusammen-
ngenden Bereich der z-Ebene *eindeutige* und reguläre Funktion, von
elcher angenommen werden kann, daß sie auch noch auf den Begrenzungs-
nien regulär sei. Alsdann ist die Schwankung des reellen Teiles dieser
unktion im ganzen Innern des Bereiches nicht größer als die Summe
r Schwankungen auf den einzelnen Begrenzungslinien.

Der Beweis des Hilfssatzes bietet sich der funktionentheoretischen
nschauung unmittelbar dar. Nimmt man in der Tat das Gegenteil an,
wäre es möglich, in der Funktionsebene eine Parallele zur Achse des
naginären zu ziehen, welche keine der Begrenzungslinien des bei Ab-
ldung durch $F(z)$ sich ergebenden Bildbereiches des Originalbereiches
ifft, jedoch die Eigenschaft hat, daß zu beiden Seiten derselben in
r Funktionsebene sich Begrenzungslinien des Bildbereiches vorfinden.
lsdann müßte jener Bildbereich die erwähnte Gerade notwendig zum
il überdecken. Da nun auf den beiderseitigen Verlängerungen der Ge-
den sich keine Begrenzungspunkte des Bildbereiches vorfinden, so würde
ch ergeben, daß der erwähnte Bildbereich sich notwendig ins Unendliche
strecken muß, was mit der Beschränktheit der betrachteten, als regulär
n ganzen Bereich einschließlich der Begrenzung vorausgesetzten Funktion
Widerspruch steht.

Aus dem nunmehr bewiesenen gleichmäßigen Unendlichkleinwerden
s imaginären Teiles der Differenz $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ im ganzen Bereiche $\beta_{(h)}$
önnen wir jetzt das gleichmäßige Unendlichkleinwerden der Werte dieser

Funktion selbst schließen für jeden beim Grenzübergang festgedachten abgeschlossenen Teilbereich von $\beta_{(h)}$, insbesondere für den Bereich $\beta_{(H)}$. Dieser Schluß wird durch kettenförmige Anwendung des nächstfolgenden Hilfssatzes auf eine endliche Anzahl solcher Kreisflächen vermittelt, die eine vollständige Ausschöpfung des Bereichs $\beta_{(H)}$ mit Einschluß seiner Begrenzung liefern. Zu beachten ist dabei noch, daß die Differenzfunktion im unendlich fernen Punkte den Wert Null annimmt. Der gemeinte Hilfssatz lautet:

Hilfssatz 4: Es sei $F(z)$ eine für $|z| \leqq R$ regulär und eindeutig erklärte Funktion, deren reeller Teil eine Schwankung $\leqq \Delta$ in der genannten Kreisfläche besitzt. Alsdann besteht für die Differenz $F(z) - F(0)$ im Gebiete $|z| \leqq \varrho < R$ eine obere Schranke, die nur von $\frac{\varrho}{R}$ und Δ abhängt und bei festgehaltenem $\frac{\varrho}{R}$ unendlich klein wird, wenn Δ unendlich klein wird.

Beweis: Es kann angenommen werden, daß $F(0) = 0$ ist. Die Größe $F(z)$ werde zur Abkürzung mit w bezeichnet. Der Parallelstreifen, welcher durch die Ungleichheitsbedingungen $-\Delta \leqq \Re(w) \leqq +\Delta$ erklärt ist, kann durch eine elementare Hilfsfunktion $w' = h(w)$ auf die Fläche des w'-Einheitskreises in der Weise abgebildet werden, daß der Nullpunkt festbleibt, den beiden unendlich fernen Enden des Streifens aber die Punkte $+i$ und $-i$ entsprechen. Die Größe w' erscheint nun als eine für $z = 0$ verschwindende Funktion von z, deren Absolutwerte für $|z| \leqq R$ unter 1, folglich nach dem Schwarzschen Lemma für $|z| \leqq \varrho$ unter ϱ bleiben müssen. Dieser Schranke entspricht in der w-Ebene eine Schranke der gewünschten Form.

Es ist jetzt festgestellt, daß die Differenzfunktion $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ auf den Linien H gleichmäßig unendlich klein wird, wenn B_1' sich unbegrenzt B_0' und damit zugleich jede Linie h unbegrenzt den von ihr umschlossenen Begrenzungsschlitzen der Bereiche B_0' und B_1' nähert. Der Stetigkeitssatz, den wir für den Kontinuitätsbeweis benötigen, besagt, daß die Differenz der Funktionswerte $\varphi_1(z')$ und $\varphi_0(z')$, unter z' und z' be- nachbarte Endpunkte der Begrenzungsschlitze von B_1' und B_0' verstanden, beim Grenzübergang unendlich klein wird. Dieser Nachweis erfordert jetzt keine neuen Hilfsmittel mehr. Die Stellen z' und z' liegen in gewisser Nachbarschaft einer und derselben Stelle z' auf H. Ebenso, wie wir oben einen Schluß von den auf Begrenzungsschlitzen angenommenen Werten auf die von derselben Abbildungsfunktion auf den benarchbarten Linien angenommenen Werte machen konnten, können wir jetzt umgekehrt

mittels des Hilfssatzes 2 schließen, daß die Funktionswerte $\varphi_0(z')$ und $\varphi_1(z')$ sich vor den Werten $\varphi_0(z')$ und $\varphi_1(z')$ um eine Größe unterscheiden, die unabhängig von der Wahl des Bereiches B_1' lediglich durch die Entfernung der Punkte z' und z' vom Punkte z' abgeschätzt werden kann als eine zugleich mit jener Entfernung unendlich klein werdenden Größe. Da nun die Linien H von vornherein beliebig nahe den Begrenzungsschlitzen von B_0' gewählt werden können, so ist damit eine infinitesimale Abschätzung der Wertdifferenz $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ gewonnen, also der Stetigkeitssatz bewiesen.

Allgemeiner Gang des Kontinuitätsbeweises.

Die Parameter des Bereiches B hängen nach § 2 stetig von den Parametern des Bereiches B' ab. Mit Rücksicht auf die Eineindeutigkeit der Beziehung der Mannigfaltigkeit M' auf die Mannigfaltigkeit M kann nunmehr der „*Satz von der Invarianz des Gebietes*" bei stetiger eineindeutiger Abbildung gleichdimensionaler Räume aufeinander zur Anwendung gelangen. Dieser Satz besagt: „Werden alle Punkte einer vollständigen Umgebung eines Punktes a des n-dimensionalen Raumes durch stetige Abbildung auf die Punkte eines anderen n-dimensionalen Raumes bezogen und weiß man ferner, daß verschiedenen Originalpunkten immer auch verschiedene Bildpunkte entsprechen, so erfüllen die Bildpunkte ihrerseits eine vollständige Umgebung des Punktes a', nämlich des Bildpunktes des Punktes a. Die Anwendung dieses Satzes auf unsere Beziehung der Mannigfaltigkeit M' (Originalmannigfaltigkeit) auf die Mannigfaltigkeit M (Bildmannigfaltigkeit) ergibt den folgenden Satz.

Umgebungssatz: Weiß man für einen Bereich B die Möglichkeit seiner Abbildung auf einen Bereich B' der verlangten Beschaffenheit, so kann man von da aus schließen auf die Existenz der gesuchten Abbildung für alle Bereiche der Mannigfaltigkeit M, welche dem Bereiche B genügend benachbart sind.

Es sei nun B_1 ein Bereich der Mannigfaltigkeit M, für welchen die Abbildung auf einen Bereich B_1' der Mannigfaltigkeit M' feststehe. Man findet einen solchen Bereich B_1, indem man von einem beliebigen Bereiche B_1' der Mannigfaltigkeit M' ausgeht und ihn auf den zugehörenden Bereich B_1 der Mannigfaltigkeit M abbildet. Andererseits sei B_2 ein beliebiger anderer Bereich von M, für welchen die Abbildbarkeit auf einen Bereich B_2' der verlangten Art noch nicht feststehe. Wir verbinden dann den Punkt a_1 des 3 m-dimensionalen Raumes M, welcher den Bereich B_1 repräsentiert, durch eine Linie Ω (*Überführungs-*

linie) mit dem Punkte a_2, der der Repräsentant des Bereiches B_2 im Raume M ist. Nach dem „Umgebungssatze" sind wir in der Lage, auf der Linie Ω vom Punkte a_1 aus ein Stück s fortzuschreiten mit der Gewißheit, daß zu jedem Punkte von s ein Bildpunkt in M' gehört. Gelangen wir nun, auf der Linie Ω fortschreitend, nicht bis zum Punkte a_2, so würde sich ein Zwischenpunkt a_* ergeben von der Beschaffenheit, daß alle Punkte der Linie Ω zwischen a_1 und a_* noch Bildpunkte in M' haben, während dem Punkte a_* selbst kein Bildpunkt in M' entsprechen würde, eben darum, weil die Existenz eines solchen Bildpunktes ja sogleich wieder den Umgebungssatz anzuwenden und also über a_* hinaus zu gehen gestatten würde. Die Existenz eines solchen Grenzpunktes a_* ist nun durch eine besondere Betrachtung zu widerlegen, welche einen zweckmäßig als *Limessatz* zu bezeichnenden Satz liefern soll. Damit ist dann der Kontinuitätsbeweis beendigt.

§ 3.

Beweis des Limessatzes.

Limessatz: Es sei B_* ein Bereich der Mannigfaltigkeit M (Parallelschlitzbereich), in dessen beliebiger Nachbarschaft sich Bereiche B derselben Gattung vorfinden, für deren jeden die Möglichkeit der konformen Abbildung auf einen Bereich B' der Mannigfaltigkeit M' als bekannt gilt, alsdann ist auch der Bereich B_* seinerseits auf einen Bereich B'_* der Mannigfaltigkeit M' abbildbar.

Zum Beweise des Limessatzes betrachten wir irgend zwei dem Bereiche B_* benachbarte B_1 und B_2. Die Funktionen, welche letztere Bereiche auf die Bereiche B'_1 und B'_2 der Mannigfaltigkeit M' abbilden mögen mit $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bezeichnet werden. Wir wollen nun eine infinitesimale Abschätzung für die Differenzfunktion $f_2(z) - f_1(z)$ in analoger Weise wie oben für $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ durchführen. Diese Abschätzung wird uns die Gewißheit der Existenz einer Grenzfunktion $f_*(z)$ geben, welche die von uns im Limessatze postulierte Abbildung des Bereiches B_* auf einen Bereich B'_* liefert.

Wir können, genau wie oben in der z'-Ebene, jetzt in der z-Ebene Linien K, h, H, bzw. Bereiche β, $\beta_{(h)}$, $\beta_{(H)}$ definieren. Die Linien h und H umschlingen je einen Begrenzungsschlitz des Bereichs B_* nebst den benachbarten Begrenzungsschlitzen der Bereiche B_1 und B_2. Wir bemerken zunächst wieder die Tatsache der Beschränktheit der Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$, daher auch der Differenzfunktion $f_2(z) - f_1(z)$, letzterer im ganzen Bereich $\beta_{(h)}$.

Um das gleichmäßige Unendlichkleinwerden der zu untersuchenden

Differenzfunktion für den Bereich $\beta_{(H)}$ zu ermitteln, genügt es, das gleichmäßige Unendlichkleinwerden ihrer Schwankung in $\beta_{(H)}$ darzutun. Hierzu betrachten wir zunächst das Verhalten dieser Differenzfunktion auf den Linien h. Während wir früher bei den Funktionen $\varphi_1(z')$ und $\varphi_0(z')$ in der Lage waren, die Schwankung des imaginären Teils derselben auf den einzelnen Linien h einer infinitesimalen Abschätzung zu unterwerfen, können wir das im vorliegenden Falle nicht, da wir es in der Abbildung mit m Schlitzen verschiedener Richtung zu tun haben. Wir können jedoch jetzt aus denselben Gründen wie oben schließen, daß für die Funktion $f_2(z) - f_1(z)$ auf jeder Linie h eine infinitesimale *seitliche Schwankung* besteht. Als seitliche Schwankung bezeichnen wir hierbei die Schwankung einer gewissen linearen Verbindung des reellen und imaginären Teils, nämlich die Breite eines möglichst schmalen, die jeweilig vorgeschriebene Schlitzrichtung innehaltenden, jene Werte geometrisch einschließenden Parallelstreifens. Durch Multiplikation der Abbildungsfunktion mit einem durch die Schlitzrichtung bestimmten, daher von Begrenzung zu Begrenzung wechselnden Multiplikator des absoluten Betrages 1 wird der Begriff der seitlichen Schwankung mit dem Begriff der Schwankung des imaginären oder auch des reellen Teiles zur Identität gebracht.

Wir werden durch das Vorhergehende auf eine neue Betrachtung geführt, welche folgenden Hilfssatz zum Ziele haben muß.

Hilfssatz 5: Es sei in der z-Ebene ein m-fach zusammenhängender schlichter Bereich S gegeben und in demselben eine veränderlich vorgestellte reguläre und eindeutige analytische Funktion, deren Regularität auch noch auf der Grenze des Bereiches bestehen möge. Es sei ferner S' ein innerer Teilbereich des Bereiches S, dessen Begrenzungslinien nicht an die Begrenzungslinien des Bereiches S anstoßen. Die Funktion $F(z)$ sei beschränkt, d. h. die Werte $|F(z)|$ mögen unterhalb einer festen Größe M bleiben. Ferner werde angenommen, daß die seitlichen Schwankungen Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_m$ auf den Begrenzungslinien infinitesimale Größen sind, insofern als man sich die Funktion $F(z)$ noch von Parametern oder Indizes abhängig vorstellt. Alsdann wird behauptet, daß die Funktion $F(z)$ im ganzen Bereiche S' eine infinitesimale Schwankung besitzt, wobei jetzt unter Schwankung das Maximum des absoluten Betrages der Differenz irgend zweier dem Bereiche angehörender Funktionswerte verstanden wird.

Beweis: Den Begrenzungslinien des Bereiches S entsprechen bei der Abbildung durch die Funktion $F(z)$ Linien $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Die einzelne Linie l ist geschlossen und wird eine gewisse Außenkontur darbieten, welche ihrerseits die vollständige Begrenzung eines schlichten Flächenstückes σ_α liefert. Die m auf diese Weise entstehenden Flächenstücke $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ bedecken ein schlichtes Gesamtgebiet σ. Dies Ge-

biet σ kann, beiläufig bemerkt, nicht aus vollständig getrennten Stücken bestehen; denn sonst würde es möglich sein, eine Verbindungslinie zwischen den genannten Stücken herzustellen, welche als Bild einer ganz in S verlaufenden Linie aufzufassen wäre. Von einem Zwischenpunkte dieser Linie aus könnte man aber nun ohne Auftreffen auf die Linien $l_1, \ldots, l_m$ nach dem Unendlichen hingelangen. D. h. die Funktion $F(z)$ wäre nicht beschränkt, entgegen der Voraussetzung.

Wir machen nun die weitere Bemerkung, daß das Flächenstück Σ welches sich als Bild der ganzen Fläche S ergibt, aus Gründen der Analysis situs nur Punkte der Fläche σ darbieten kann; denn in bezug auf jeden anderen Punkt der Funktionsebene ist offenbar die Umlaufscharakteristik jeder der Linien l gleich Null.

Wir sagen: Eine in einem Bereiche der z-Ebene erklärte reguläre analytische Funktion besitze in diesem Bereiche die *schlichte Abbildungsweite* ϱ, wenn es möglich ist, eine Kreisfläche vom Radius ϱ in die Funktionsebene anzugeben, welche, abgesehen von weiteren zulässigen Bedeckungen derselben, auch wenigstens einmal zu einer vollständigen grenzstellenfreien *einfachen* Bedeckung gelangt, und wenn zugleich ϱ der möglichst groß gewählte Radius der genannten Beschaffenheit ist. Nach dieser Definition können wir nun sagen, daß unsere für den Bereich S erklärte Funktion $F(z)$ eine infinitesimale Abbildungsweite besitzt, da in die Fläche σ offenbar nur Kreisflächen mit infinitesimalem Radius Platz finden wie auch bei den einzelnen Gebieten σ_α, wegen der infinitesimalen seitlichen Schwankung der einzelnen Linien l_α.

Andererseits gilt nun der folgende Satz.

Hilfssatz 6: Es sei $F(z)$ eine für $|z| \leqq R$ regulär erklärte eindeutige analytische Funktion, die im Nullpunkte den Wert Null annimmt und deren absolute Werte unterhalb der endlichen Schranke M bleiben. Ist a_1 der Koeffizient von z in der Potenzreihenentwicklung der Funktion $F(z)$ an der Nullstelle und ist derselbe von Null verschieden, so ist die schlichte Abbildungsweite der Funktion $F(z)$ größer als die nur von R, $|a_1|$ und M abhängende Größe $\frac{1}{4} \frac{|a_1|^2 R^2}{M + |a_1| R}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$F(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = a_1 z + z^2 \Phi(z),$$

wobei

$$\Phi(z) = \frac{F(z) - a_1 z}{z^2}$$

ist. Es ist daher für $|z| \leqq R$

$$|\Phi(z)| \leqq \frac{M + |a_1| R}{R^2}.$$

Wir suchen $|z|$ so klein zu bestimmen, daß

$$|z^2 \Phi(z)| \leqq \tfrac{1}{2}|a_1 z|$$

wird. Das erreichen wir jedenfalls, wenn wir setzen

$$|z|^2 \frac{M+|a_1|R}{R^2} \leqq \tfrac{1}{2}|a_1||z|,$$

d. h.

$$|z| \leqq \frac{1}{2} \frac{|a_1| R^2}{M+|a_1|R}.$$

Es ergibt sich nun für $|z| = \frac{1}{2} \frac{|a_1| R^2}{M+|a_1|R} = \varrho$

$$|F(z)| \geqq \tfrac{1}{2}|a_1||z| = \frac{1}{4} \frac{|a_1|^2 R^2}{M+|a_1|R}.$$

Indem man die Größe z den Kreis $|z| = \varrho$ einfach umlaufen läßt, wird entsprechend die Größe $F(z)$ den Nullpunkt einfach umlaufen und dabei beständig vom Nullpunkte einen Abstand $\geqq \frac{1}{2}\varrho$ bewahren. Es wird folglich die Kreisfläche mit dem Radius $\frac{1}{2}\varrho$ in der Funktionsebene eine einfache Bedeckung durch die Funktionswerte erfahren. D. h.. Die schlichte Abbildungsweite der Funktion $F(z)$ ist $\geqq \frac{1}{4} \frac{|a_1|^2 R}{M+|a_1|R}$.

Wir machen nun sogleich den für die Anwendung wichtigen

Zusatz: Weiß man, daß die Abbildungsweite der veränderlich vorgestellten Funktion $F(z)$ unendlich klein wird, während gleichzeitig R und M fest beibehalten werden, so wird $|a_1|$ ebenfalls unendlich klein in einem Grade, welcher lediglich durch den Kleinheitsgrad der Abbildungsweite selbst bestimmbar ist.

In der Tat folgt, wenn unter ε eine unendlich klein werdende positive Größe verstanden wird, aus $\frac{1}{4} \frac{|a_1|^2 R^2}{M+|a_1|R} < \varepsilon$ für $|a_1|$ die Beziehung $|a_1| < \eta$, wobei η zugleich mit ε unendlich klein wird.

Hat die Funktion $F(z)$ für $z = 0$ nicht den Wert Null, so kann man durch Abziehung des konstanten Gliedes der Entwicklung auf den vorherigen Fall kommen, wobei dann die Größe M nur durch $2M$ zu ersetzen ist. Aus dem Zusatz ergibt sich jetzt der weitere Satz.

Hilfssatz 7: Es sei S ein endlicher Bereich der z-Ebene, in welchem eine Funktion $F(z)$ regulär erklärt sei. Es sei ferner S' ein Teilbereich des Bereiches S, dessen sämtliche Punkte vom Rande des Bereiches S einen Abstand oberhalb R haben mögen. Die Funktion $F(z)$ sei ferner für den ganzen Bereich S beschränkt, — ihre absoluten Werte mögen unterhalb M liegen; schließlich sei die Abbildungsweite der Funk-

tion $F(z)$ eine infinitesimale Größe[5]). Alsdann ist für das ganze Inner des Bereiches S' auch $|F'(z)|$ eine gleichmäßig infinitesimale Größe.

Satz 7 wenden wir jetzt auf unsere Funktion $F(z)$ des Hilfssatzes an und finden, da wir bereits wissen, daß diese Funktion eine infini tesimale Abbildungsweite besitzt, nunmehr. daß ihre Ableitung im Ge biete S' ebenfalls eine gleichmäßig infinitesimale Größe darstellt. Daraus aber findet man weiter, daß die Schwankung derselben Funktion $F(z)$ in Gebiete S' infinitesimal ist, indem man nämlich den folgenden Hilfssat zur kettenförmigen Anwendung bringt. Für jede längs einer geradlinige Strecke $z_1 \dots z_2$ der z-Ebene reguläre analytische Funktion $F(z)$ ist

$$\left|\frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leqq \mu,$$

wenn μ das Maximum von $|F'(z)|$ auf derselben Strecke bezeichnet. Ma hat nämlich, wenn man

$$r = |z - z_1| \quad \text{und} \quad |F(z) - F(z_1)| = h(r)$$

setzt und nun z die Strecke $z_1 \dots z_2$ durchlaufen läßt, nach dem Mittelwert satz der Differentialrechnung

$$\left|\frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1}\right| = |h'(r')|, \quad o < (r') < |z_2 - z_1|.$$

Der Ableitungswert $|h'(r')|$ ist nun seinerseits $\leqq |F'(z')|$, wenn mit z' die dem Werte r' entsprechende Stelle der Strecke $z_1 \dots z_2$ bezeichnet wird.

Wir sind damit im vollen Besitze des Hilfssatzes 5 und haben nun denselben nur noch anzuwenden aut unsere Funktion $f_2(z) - f_1(z)$. Für diese Differenzfunktion finden wir dann, daß ihre Schwankung im ganzen Bereiche $\beta_{(H)}$ eine infinitesimale Größe ist, daß mithin diese Funktion selbst im ganzen Bereiche infinitesimal ist, da sie im unendlich fernen Punkte den Wert Null hat.

Mit dem Nachweise des gleichmäßigen Verschwindens der Differenz $f_2(z) - f_1(z)$ im Bereiche $\beta_{(H)}$ ist das Zustandekommen einer bestimmten Grenzfunktion $f_*(z)$ bewiesen. welche den Bereich $\beta_{(H)}$ eineindeutig kon form auf einen schlichten Bereich abbildet und im Unendlichen ebens wie die Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Entwicklungsform $z + ((0$ besitzt. Die Linien H können nun aber beliebig nahe den Begrenzung schlitzen von B_* gewählt werden. Daher vermittelt die Funktion $f_*(z$ eine eineindeutige konforme Abbildung des ganzen Bereiches B_* auf eine schlichten Bereich. Zu zeigen ist noch, daß dieser schlichte Bereich vo Schlitzen der gewünschten Richtung begrenzt wird. Dies ergibt sich da

[5]) D. h. unter Zugrundelegung einer von Parametern bzw. Indizes abhäng vorgestellten Funktion $F(z)$; cf. Hilfssatz 5.

aus, daß die Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ den Bereich $\beta_{(H)}$ auf solche Bereiche abbilden, von deren Begrenzungslinien behauptet werden kann, daß sie eine in bezug auf jede vorgeschriebene Einzelrichtung zu verstehende seitliche Schwankung haben, deren Größe lediglich abhängig von der größten Entfernung der Linien H von den durch sie umschlungenen Begrenzungsschlitzen des Bereiches B_* abgeschätzt werden kann durch Aufstellung oberer Schranken, die zugleich mit jenen Entfernungen unendlich klein werden.

Hiermit ist der Beweis des Limessatzes vollendet und damit die Abbildungsaufgabe I_a vollständig erledigt.

Zweiter Teil.

Abbildungen (I_b', I_b'', I_b''') auf spiralförmig geschlitzte Bereiche der Ebene E_b.

§ 4.

Abbildung (I_b') auf die spiralförmig aufgeschlitzte Vollebene. (Verzerrungssätze I—III).

Der Übergang von der Figur des Parallelschlitzbereiches zur Figur des allgemeineren Schlitzbereiches mit beliebigen Schlitzrichtungen hat ein vollkommenes Analogon bei den Bereichformen, welche nicht, wie der Parallelschlitzbereich, dem Parallel-Geradenbüschel entspringen, sondern vielmehr dem allgemeinen Geradenbüschel. Man hat jetzt als allgemeinere Begrenzungsliniengattung diejenigen Linien zuzulassen, welche das Geradenbüschel isogonal unter irgendeinem konstanten Winkel schneiden. Das sind die *logarithmischen Spiralen*. Dem Begriff der vorgeschriebenen Richtung einer Geraden gegen das Parallelbüschel entspricht jetzt der Begriff der vorgeschriebenen Neigung der Spiralen gegen das Geradenbüschel. Ist die Neigung Null, so haben wir es mit einer Geraden des Geradenbüschels selbst zu tun; ist der Neigungswinkel ein Rechter, so haben wir es mit Kreisen der zum Geradenbüschel orthogonalen Schar konzentrischer Kreise zu tun.

Wir stellen nun den Satz auf, daß man *einen gegebenen mehrfach zusammenhängenden, den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt als innere Punkte enthaltenden Bereich B der z-Ebene eineindeutig und konform und zwar, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, nur auf eine Weise auf einen ebenfalls schlichten, von endlichen, allgemein zu reden spiralförmigen Schlitzen begrenzten Bereich B' abbilden kann, wenn für jede Begrenzungslinie des gegebenen Bereiches die Neigung des*

entsprechenden Spiralbogens vorgeschrieben wird und weiter verlangt wird, daß Nullpunkt und unendlich ferner Punkt bei der Abbildung fest bleiben sollen. (*Abbildung* I_b'.) Die bei dieser Abbildung I_b' freigebliebene multiplikative Konstante kann dadurch eindeutig normiert werden, daß man im Unendlichen für die Abbildungsfunktion $f(z)$ das Verhalten

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z=\infty} f'(z) = 1$$

vorschreibt.

Jede logarithmische Spirale mit dem Nullpunkte und dem unendlich fernen Punkte der z-Ebene als asymptotischen Punkten wird durch konforme Abbildung mittels der Funktion Logarithmus in eine Gerade übergeführt, und zwar werden Spiralen gleicher Neigung dabei in parallele Geraden übergeführt, welche gegen die Achse des Reellen dieselbe Neigung besitzen wie die Spiralen gegen die positive Halbachse und überhaupt gegen jeden den Nullpunkt mit dem unendlich fernen Punkte verbindenden Halbstrahl. Diese Eigenart der logarithmischen Spiralen läßt auch sofort die weitere Bemerkung als richtig erkennen: Wenn zwei Punkte z' und z'' der z-Ebene gleichgeneigte Spiralbögen beschreiben, so bewegt sich der Punkt $\frac{z'}{z''}$ auf einem Spiralbogen derselben Neigung.

Die vorstehenden Bemerkungen gestatten uns, den Unitätssatz für die Abbildungsaufgabe I_b' nach Analogie des Unitätsbeweises für die Abbildungsaufgabe I_a zu führen. Wir brauchen nur an Stelle der damals betrachteten Größe $z_2' - z_1'$ jetzt die Größe $\frac{z_2'}{z_1'}$ zu betrachten, welche in dem zu betrachtenden Bereiche überall von Null verschieden ist und im Unendlichen bei Zugrundelegung der Normierung den Wert 1 bekommt.

Für die Durchführung des Kontinuitätsbeweises werden wir zunächst den Bereich B in einer Normalgestalt annehmen, deren Existenz bereits als bekannt gelten kann. Eine solche jetzt geeignete Normalgestalt ist diejenige, bei welcher der Bereich B von der ganzen Ebene mit Einschluß des Nullpunktes und des unendlich fernen Punktes gebildet wird und von m konzentrischen Kreisbögen begrenzt wird (Fig. 2 der Abhandlung IV). Nehmen wir den Bereich B in dieser Gestalt an, so bemerken wir sofort die Übereinstimmung der Parameterzahlen der Bereiche B und B'.

Es ist nun erstens der *Stetigkeitssatz* zu beweisen, nämlich der Satz, daß die Parameter des Bereiches B stetig von den Parametern des Bereiches B' abhängen; zweitens der *Limessatz*, nämlich der Satz, daß zu jedem Bereiche B_* der B-Mannigfaltigkeit, in dessen beliebiger Nähe Nachbarreiche B existieren, für welche die Existenz zugehörender Bereiche B' feststeht, immer auch ein Bereich B_*' der B'-Mannigfaltigkeit

existiert. Um diese Sätze nach Analogie von I_a zu beweisen, werden wir jetzt an Stelle der damals betrachteten Funktionen

$$\varphi_1(z') - \varphi_0(z'). \quad \text{und} \quad f_2(z) - f_1(z)$$

zweckmäßig die Funktionen

$$\log \frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')} \quad \text{bzw.} \quad \log \frac{f_2(z)}{f_1(z)}$$

betrachten, welche beide im unendlich fernen Punkte verschwinden und in den jetzt zu betrachtenden Bereichen $B'_{(H)}$, $B'_{(h)}$ bzw. $B_{(H)}$, $B_{(h)}$ regulär und eindeutig sind. Eine besondere Untersuchung haben wir hierbei der Frage der *Beschränktheit* der angegebenen Funktionen zu widmen. Diese ergab sich früher verhältnismäßig einfach auf Grund des Hilfssatzes 1. Hier jedoch wird es wegen der Quotientenbildungen notwendig, gewisse obere und untere Schranken für die Funktionen $\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}$ und $\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$ aufzustellen. Als Grundlage hierfür dient uns der folgende Satz (Abhandlung III, S. 89 l. c.).

Hilfssatz 8: 1. Es sei $\Phi(z)$ für $|z| \leqq 1$ eine reguläre analytische Funktion, welche die Fläche des Einheitskreises schlicht auf die Fläche eines endlichen, jedoch nicht weiter beschränkten Gebietes G abbildet, wobei der Nullpunkt sich selbst entsprechen soll und der Wert der Ableitung an dieser Stelle gleich 1 sein soll. Alsdann gibt es eine von der Wahl der Funktion $\Phi(z)$ unabhängige, von Null verschiedene positive Größe $\tilde{q}$ unterhalb 1, so daß die Bildkurve L des Einheitskreises, d. i. die Begrenzungslinie des Bereiches G, die Kreislinie $K_{\tilde{q}}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und $\tilde{q}$ als Radius vollständig umschließt. 2. Unter denselben Voraussetzungen läßt sich von der Bildkurve l_ϱ des Kreises $|z| = \varrho < 1$ behaupten, daß sie ganz in einem von der Wahl der Funktionen $\Phi(z)$ unabhängig bestimmbaren Ringgebiete verläuft, dessen innerer Begrenzungskreis den Radius $\varrho\tilde{q}$ hat, während der äußere Begrenzungskreis einen von der Wahl der Funktion $\Phi(z)$ unabhängig bestimmbaren endlichen Radius $\tilde{Q}_\varrho$ hat.

Von vorstehendem Hilfssatze aus gelangen wir durch eine einfache Überlegung zu einem von uns als *Verzerrungssatz* bezeichneten Satze, welcher in seiner Grundfassung besagt, daß der Ableitungswert $\Phi'(z)$ unter den bestehenden Voraussetzungen für $|z| \leqq \varrho < 1$ zwischen zwei von Null verschiedenen endlichen, nur von ϱ abhängenden Schranken q_ϱ und Q_ϱ bleibt, von welchen die erstere größer, die zweite kleiner als 1 ist.

Zum Zwecke des Beweises dieses Verzerrungssatzes untersuchen wir den Wert $\Phi'(\varrho)$. Wegen der Schlichtheit der Abbildung ist dieser Wert jedenfalls von Null verschieden. Um die Stelle ϱ als Mittelpunkt denken wir uns die Kreisfläche K mit dem Radius $1 - \varrho$ konstruiert. Diese wird

auf ein schlichtes Gebiet abgebildet, dessen Begrenzungslinie K' von Punkte $\Phi(\varrho)$ einen Abstand hat, der nach Hilfssatz 8 größer al $(1-\varrho)\,\Phi'(\varrho)\,\tilde{q}$ sein muß. Nun ist $|\Phi(\varrho)| < \tilde{Q}_\varrho$. Die Linie K' muß außer dem von der Linie L umschlungen werden, deren kürzeste Entfernun vom Nullpunkte kleiner als 1 ist. Hieraus ergibt sich für $|\Phi'(\varrho)|$ eine nu von ϱ abhängende obere Schranke, die ohne weiteres für die ganze Kreis fläche $|z| \leqq \varrho$, nicht nur für die Stelle ϱ Geltung hat.

Daß andererseits auch eine untere von Null verschiedene Schrank für den Wert $|\Phi'(\varrho)|$ und damit für alle Werte $|\Phi'(z)|$ der Kreisfläch $|z| \leqq \varrho$ existiert, folgt nunmehr durch lineare Transformation des z-Ein heitskreises in sich vermöge der Gleichung $z' = \frac{\varrho - z}{\varrho z - 1}$, welche die Punkt $+1$ und -1 fest läßt, den Punkt $z = \varrho$ in den Punkt $z' = 0$ und de Punkt $z = 0$ in den Punkt $z' = -\varrho$ überführt. Bei dieser Transforma tion hat man

$$\left(\frac{dz'}{dz}\right)_{z=\varrho} = \frac{1}{1-\varrho^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz'}{dz}\right)_{z=0} = 1-\varrho^2.$$

Das Ergebnis formulieren wir so:

Verzerrungssatz I (Verzerrungsgrundtheorem)[6]). Vermitte eine Funktion $\Phi(z)$ eine eineindeutige konforme Abbildung einer Krei fläche K, deren Begrenzungslinie nicht mit einbezogen zu sein brauch auf ein schlichtes endliches Gebiet G, das sonst keinerlei Beschränkunge unterworfen ist, so bleibt das *Verzerrungsverhältnis* $\left|\frac{\Phi'(z_2)}{\Phi'(z_1)}\right|$, wenn z und z_2 in einer mit K konzentrischen Kreisfläche K beliebig gewählt we den, zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen Schranken Q_I und $\frac{1}{Q_I}$ welche nur von dem Radienverhältnis der beiden Kreise K und K, nic jedoch von der Abbildungsfunktion $\Phi(z)$ bzw. von dem Gebiete G a hängen. Diese beiden Schranken gehen stetig in den Wert 1 über, wen das erwähnte Radienverhältnis unendlich klein wird. Letzteres ergibt si durch passende Anwendung von Hilfssatz 2, wenn man beachtet, daß d Funktion $\Phi'(z)$ des Hilfssatzes 8 im Kreise $|z| \leqq \varrho < 1$ beschränkt i und im Nullpunkte den Wert 1 annimmt.

Aus dem Verzerrungssatze I folgt durch kettenförmige Anwendu desselben auf endlich viele ein endliches Gebiet mit Einschluß seiner B grenzung ausschöpfende Kreisflächen der weitergehende Satz.

Verzerrungssatz II (für beliebige endliche schlichte B reiche). Vermittelt eine Funktion $\Phi(z)$ eine eineindeutige konform

[6]) cf. wegen der Verzerrungssätze I, II, III eine Abhandlung des Verfassers de[n] Math. Ann. 69 (1910), S. 1—81, passim.

Abbildung eines schlichten mehrfach zusammenhängenden, den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern enthaltenden Bereichs B auf einen beliebigen anderen schlichten mehrfach zusammenhängenden, den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern enthaltenden Bereich B', der auch mit B identisch sein kann, so bleibt das *Verzerrungsverhältnis* $\left|\frac{\Phi'(z_2)}{\Phi'(z_1)}\right|$, wenn z_1 und z_2 irgend zwei beliebige Stellen eines nicht bis an die Grenze von B heranreichenden abgeschlossenen Teilbereichs β von B sind, zwischen zwei von Null verschiedenen endlichen Schranken Q_{II} und $\frac{1}{Q_{II}}$, welche nur von der Wahl der Bereiche B und β, nicht jedoch von der Abbildungsfunktion $\Phi(z)$ bzw. vom Bereiche B' abhängen.

Vom Verzerrungssatze II gelangen wir weiter durch eine einfache Überlegung zu einem dritten Verzerrungssatze.

Verzerrungssatz III (für unendliche schlichte Bereiche). Vermittelt eine Funktion $\Phi(z)$ eine eineindeutige konforme Abbildung eines schlichten, den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenen Bereichs B auf einen beliebigen anderen ebenso beschaffenen Bereich B', der auch mit B identisch sein kann, und entspricht bei dieser Abbildung der unendlich ferne Punkt sich selbst, so bleibt das *Verzerrungsverhältnis* $\left|\frac{\Phi'(z_2)}{\Phi'(z_1)}\right|$, wenn z_1 und z_2 irgend zwei Stellen eines beliebigen nicht bis an die Grenze von B heranreichenden, den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden Teilbereichs β von B sind, zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen Schranken Q_{III} und $\frac{1}{Q_{III}}$, welche nur von der Wahl der Bereiche B und β, nicht jedoch von der Abbildungsfunktion bzw. vom Bereiche B' abhängen.

Zum Beweise des letzten Satzes bemerken wir, daß das Maximum der Größe $\left|\frac{\Phi'(z_2)}{\Phi'(z_1)}\right|$ im Bereiche β wegen der Regularität der Funktion $\Phi'(z)$ im Unendlichen an zwei Stellen der Begrenzung von β angenommen wird. Für dieses Maximum aber ergeben sich zwei endliche Schranken nach dem Verzerrungssatze II. Denn die Begrenzungslinien von β sind vollständig enthalten in einem Teilbereiche von B, der aus B durch Entfernung einer den unendlich fernen Punkt enthaltenden Kreisfläche entsteht.

Nach der hiermit vollendeten Herleitung der Verzerrungssätze lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die zum Beweise des Stetigkeitssatzes zu betrachtende Funktion $\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}$. Die Funktion $\varphi_0(z')$ leistet die Abbildung eines Bereichs B_0' auf den zugehörenden Bereich B_0, die Funktion $\varphi_1(z')$ die Abbildung eines B_0' benachbarten Bereichs B_1' auf den zugehörenden

Bereich B_1. Wir denken uns wieder Hilfslinien h und H konstruiert um die jetzt spiralförmigen Begrenzungsschlitze von B_0, außerdem zwei für den ganzen Stetigkeitsbeweis festzuhaltende Kreislinien k und K um den Nullpunkt als Mittelpunkt, deren ersterer alle Linien H ausschließt, letzterer alle Linien H umschließt.

Aus dem *Verzerrungssatze* III ergibt sich wegen $\varphi_1'(\infty) = 1$ eine obere und eine untere von Null verschiedene endliche Schranke für den Ableitungswert $\varphi_1'(0)$. Daraus folgt wegen des Satzes 8 die Existenz einer unteren von Null verschiedenen Schranke der Werte $|\varphi_1(z')|$ auf der Linie k und damit für das ganze Äußere der Linie K. Der Hilfssatz 1 liefert andererseits für die Schwankung der Funktion $\varphi_1(z')$ auf der Linie K eine endliche obere Schranke, damit zugleich auch eine obere Schranke für die Werte $|\varphi_1(z')|$ selbst auf K, weil die von der Funktion $\varphi_1(z')$ auf K angenommenen Werte, geometrisch gesprochen, eine Kurve beschreiben, die den Nullpunkt umschlingt.

In dem von den beiden Kreisen k und K begrenzten Ringgebiete bleiben somit die Werte $\varphi_1(z')$ zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen Schranken.

Wir betrachten nunmehr die Funktion $\log \frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}$. Auch diese Funktion ist im Bereiche $\beta_{(h)}$, d. i. die ganze von den Kurven h begrenzte Ebene, eindeutig und regulär. Im Punkte ∞ nimmt sie den Wert Null an. Auf jeder der Linien h ist die Schwankung ihres reellen Teiles eine Größe, die beim Grenzübergange unendlich klein wird. Daraus folgern wir, wie früher, daß die Funktion $\log \frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}$ selbst im ganzen Bereiche $\beta_{(h)}$ gleichmäßig unendlich klein wird. D. h.: Die Werte der Funktion $\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}$ gehen im ganzen Bereiche $\beta_{(H)}$ gleichmäßig in den Wert 1 über. Hieraus kann weiter geschlossen werden, daß $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ auf den Linien H gleichmäßig unendlich klein wird usw.

Der Stetigkeitssatz ist damit bewiesen.

Zum Beweise des *Limessatzes* betrachten wir die Funktion $\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$. Wir definieren jetzt in der z-Ebene wieder die Linien h, H, k, K. In dem von den Kreisen k und K begrenzten Ringgebiete sind $|f_1(z)|$ und $|f_2(z)|$ nach oben und unten beschränkt, daher ist der Quotient $\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$ in Gebiete $\beta_{(h)}$ der z-Ebene nach oben und unten beschränkt. Die auf den Linien h angenommenen Werte $\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right|$ liegen, geometrisch gesprochen, auf Linien λ, die in der Nachbarschaft von Spiralbögen der betreffenden Neigung verlaufen. Die Linien λ müssen dabei in ihrem ganzen Verlauf in einem fest angebbaren Ringgebiete mit dem Nullpunkt als Mittelpunk

verbleiben. Die Begriffe der *seitlichen Schwankung* (jetzt in Orientierung an den Spiralen zu definieren) und der *Abbildungsweite* dienen wiederum dazu, die gleichmäßige Konvergenz des Quotienten $\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$ gegen 1 für den ganzen Bereich $B_{(H)}$ zu beweisen. Daraus ergibt sich auch die gleichmäßige Konvergenz der Differenz $f_2(z) - f_1(z)$ gegen Null zunächst im Gebiete $\beta_{(H)}$ nach Ausschluß der endlichen Kreisscheibe k und der unendlichen Kreisscheibe K, dann aber auch im ganzen Gebiete $\beta_{(H)}$, weil die Differenz $f_2(z) - f_1(z)$ in den genannten beiden Kreisflächen regulär ist, in der Kreisfläche K nämlich wegen der gleichartigen Normierung der Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ im Unendlichen.

Unter Zugrundelegung der vorstehenden Bemerkungen vollzieht sich der Beweis des Limessatzes in vollständiger Analogie mit dem entsprechenden Beweise I_a.

§ 5.

Abbildungen (I_b'' und I_b''') auf eine spiralförmig aufgeschlitzte Kreisfläche bzw. Kreisringfläche.

Die Bereichformen I_b'' und I_b''' erhalten wir, wenn wir den Nullpunkt oder den unendlich fernen Punkt oder auch beide vom Bereichinnern des unbekannten Bildbereichs B' ausschließen, indem wir vielmehr entweder den ganzen *Bereich B' nach außen durch den Einheitskreis begrenzt vorstellen und den Nullpunkt seinem Inneren angehören lassen* (Abbildung I_b''), oder aber, indem wir den *ganzen Bereich B' nach außen durch den Einheitskreis und nach innen durch einen weiteren, mit dem Einheitskreise konzentrischen, nicht vorausbestimmbaren Kreis begrenzt vorstellen* (Abbildung I_b'''). Für die *übrigen Begrenzungslinien* des Bereichs B' denken wir uns nach wie vor die Vorschrift gegeben, daß sie *spiralförmige Schlitze gegebener Neigung* werden sollen; diese Neigung ist *für jede einzelne Begrenzungslinie besonders zu geben*. Sucht man unsere Beweisbetrachtung auf den gegenwärtigen Fall zu übertragen, so wird man dazu geführt, als *Ausgangsgestalten* für die abzubildenden Bereiche B die in Abhandlung IV behandelten Figuren der längs konzentrischen Kreisen aufgeschlitzten Flächen des Einheitskreises (Fig. 2 a. a. O) bzw. der längs konzentrischen Kreisbögen aufgeschlitzte Kreisringfläche mit dem Einheitskreis als äußeren Begrenzungskreis (Fig. 1 a. a. O.). Die Abbildung der Bereiche B wird normiert, indem man im Falle I_b'' den Nullpunkt und den Einheitspunkt je sich selbst entsprechen läßt, im Falle I_b''' den Einheitspunkt sich selbst entsprechen läßt und außerdem vorschreibt, daß der innere Begrenzungskreis von B dem inneren Begrenzungskreise von B' entsprechen solle.

Bezüglich der *Abbildungsaufgabe* I_b'' bemerkt man sofort die Mög-

lichkeit ihrer *Zurückführung auf die Abbildungsaufgabe* I_b'. Man braucht in der Tat die Bereiche B und B' nur am Einheitskreise zu spiegeln, um von B zu einer längs konzentrischen Kreisbögen aufgeschlitzten Vollebene (B), von B' zu einer längs Spiralbögen aufgeschlitzten Vollebene (B') zu gelangen. Bei (B') haben die durch die Spiegelung gewonnenen Spiralbögen und ihre Originalbögen entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel. Wendet man auf den Bereich (B) die Abbildung I_b' an, so ergibt sich ein Bereich $(B)'$, und es bleibt besonders nachzuweisen, daß dem Einheitskreise der z-Ebene in $(B)'$ eine Kreislinie mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt entspricht. Dazu bemerke man, daß die Bildkurve des z-Einheitskreises eine geschlossene reguläre analytische Linie L ist, welche den Bereich $(B)'$ in zwei im Sinne der analytischen Spiegelung zueinander symmetrische Hälften zerlegt. Bei dieser Spiegelung möge allgemein dem Punkt z' der Punkt $\tilde{z}'$ entsprechen. Geht man nun vom Punkte $\tilde{z}'$ durch Reziprokeradien-Transformation am Einheitskreise der z'-Ebene zu einem Punkte $\tilde{\tilde{z}}'$ über, so stellt sich die Beziehung $\tilde{\tilde{z}}'(z')$ als eine direkt konforme Abbildung des Bereichs $(B)'$ auf einen Bereich $(\tilde{B})'$ dar, und zwar gehen bei dieser Abbildung Nullpunkt und unendlich ferner Punkt in sich über, jeder Begrenzungsschlitz von $(B)'$ aber in einen Begrenzungsschlitz von $(\tilde{B})'$, nämlich in einen Spiralbogen der gleichen Neigung. Hieraus folgt nach dem Unitätssatze der Abbildungsaufgabe I_b', daß

$$\tilde{\tilde{z}}' = \alpha z'$$

sein muß, unter α eine Konstante verstanden. Daraus ergibt sich für $\tilde{z}'$ die Form

$$\tilde{z}' = \frac{1}{\alpha \bar{z}'},$$

wobei die Überstreichung einer Größe den Übergang zur konjugiert komplexen Größe andeuten soll. Auf der Linie L haben z' und $\tilde{z}'$ gleichen absoluten Betrag. Für die Punkte dieser Linie ergibt sich daraus die Gleichung

$$|z'| = \sqrt{\left|\frac{1}{\alpha}\right|},$$

welche zeigt, daß L ein Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist. Damit wäre die Abbildungsaufgabe I_b'' erledigt.

Um die *Abbildungsaufgabe* I_b'' *direkt mittels der Kontinuitätsmethode* zu behandeln, wird man nach Analogie der Abbildungsaufgabe I_b' die Begrenzungsschlitze in Linien h und H einschließen. Für den Einheitskreis kommt die Anwendung einer solchen Hilfslinie nicht in Betracht, da derselbe weder bei dem Stetigkeitsbeweise, noch beim Beweise des Limessatzes variiert. Es wird ferner der Nullpunkt wieder in eine feste Krei

linie k eingeschlossen, die ihren Mittelpunkt im Nullpunkte hat. Wesentlich ist dann der Nachweis, daß die *Absolutwerte der Funktion* $\varphi_1(z')$ (*beim Stetigkeitssatze*) *bzw.* $f_1(z)$, $f_2(z)$ (*beim Limessatze*) *auf der Kreislinie k oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bleiben.* Für diesen Nachweis dient als Grundlage der *Verzerrungssatz.* Nach demselben können wir für die Ableitungswerte $\varphi_1'(0)$ bzw. $f_1'(0)$, $f_2'(0)$ von Null verschiedene untere Schranken angeben. Um sie zu finden, spiegeln wir die Bereiche am Einheitskreise, wobei sich eine reguläre Fortsetzung der Abbildungsfunktionen ergibt. Der *Verzerrungssatz* II wird dadurch anwendbar *bis in den Einheitskreis hinein.* Die Annahme beliebig kleiner Werte $\varphi_1'(0)$ bzw. $f_1'(0)$, $f_2'(0)$ würde das gleiche für die ganze Peripherie des Einheitskreises zur Folge haben. Durch Anwendung des Satzes 8 auf eine feste endliche Anzahl kettenartig aneinandergereihter Kreisflächen, die den Nullpunkt mit der Peripherie des Einheitskreises verbinden, würde sich jetzt eine beliebig kleine Wertschwankung der Abbildungsfunktion auf dieser Verbindung ergeben, was ausgeschlossen ist, weil der Einheitskreis in sich selbst übergehen soll, die genannte Wertschwankung also oberhalb 1 liegen muß.

Weitere Bemerkungen zum Kontinuitätsbeweise der Abbildung I_b'' erübrigen sich.

Der *Kontinuitätsbeweis der Abbildung* I_b''' schließlich erledigt sich nach Analogie der Kontinuitätsbeweise I_b' und I_b''. Als Hilfslinien h und H sind wieder einerseits solche um die inneren Begrenzungsschlitze zu benützen, außerdem aber noch ein am einfachsten kreisförmig zu wählendes Linienpaar h, H um den veränderlich zu denkenden inneren Begrenzungskreis. Wesentlich wird jetzt der Nachweis, daß der *innere Begrenzungskreis des Bereichs* B_1 *bzw.* B_1', B_2' *bei den durch die Funktionen* $\varphi_1(z')$ *bzw.* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *vermittelten Abbildungen der Bereiche* B_1' *bzw.* B_1, B_2 *nicht einen beliebig kleinen Radius* bekommen kann. Die erforderlichen unteren Schranken werden sofort durch den Verzerrungssatz geliefert, wenn man denselben auf die mehrfach zusammenhängenden Bereiche anwendet, die aus den genannten Bereichen durch Hinzufügung ihrer durch Spiegelung am äußeren und inneren Begrenzungskreise sich ergebenden Bilder entstehen. Weil der Einheitskreis bei der Abbildung fest bleibt, müssen die Ableitungswerte auf demselben zwischen endlichen von Null verschiedenen Schranken bleiben. Dann aber müssen die Ableitungswerte auch auf dem inneren Begrenzungskreise zwischen endlichen von Null verschiedenen Schranken bleiben. Der Bildkreis kann infolgedessen nicht beliebig klein werden. Er kann sich, wie dieselbe Betrachtung lehrt, auch dem Einheitskreise nicht beliebig nähern, eine Bemerkung, die übrigens beim Beweise des Stetigkeits- und Limessatzes nicht weiter zur Anwendung gelangt.

Dritter Teil.

Häufungsmethoden zum Beweise des Stetigkeits- und Limessatzes.

§ 6.

Darlegung zweier bekannter Konvergenzsätze.

Die im Vorstehenden angewandte Methode zum Beweise des Stetigkeits- und Limessatzes beruhte auf präzisen Abschätzungen, welche die im Stetigkeits- und Limessatze ausgesprochenen Konvergenztatsachen explizite zum Ausdruck bringen. Wir legen jetzt eine weitere, zweckmäßig als Häufungsmethode (*erste Häufungsmethode*) zu bezeichnende Art der Beweisführung dar, die im Gegensatz zur früheren keine Handhabe zu einer wirklichen Abschätzung des konvergenten Prozesses darbietet. Wesentliche hierbei heranzuziehende neue Hilfsmittel sind zwei jetzt vorzuführende bekannte Konvergenzsätze.

Erster Konvergenzsatz (allgemeines Konvergenzprinzip für analytische Funktionen): Es seien im Gebiete $|z| < R$ unendlich viele reguläre Funktionen

$$F_1(z),\ F_2(z),\ F_3(z),\ \ldots$$

gegeben, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben. Dann läßt sich aus der Reihe der Indexwerte $1, 2, 3, \ldots$ eine unendliche Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ herausgreifen, so daß die Funktionenfolge

$$F_{n_1}(z),\ F_{n_2}(z),\ F_{n_3}(z),\ \ldots$$

innerhalb der Kreisfläche $|z| < R$, präziser gesagt, in jedem Kreise $|z| < \varrho < R$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F(z)$ konvergiert.

Ein der von uns hier vertretenen potenzreihentheoretischen Auffassung angepaßter Beweis ist der folgende.

Wir nehmen der Einfachheit der Schreibweise halber an, daß $R = 1$ und $M = 1$ sei. Wir erreichen dies jedenfalls stets durch lineare Transformation der unabhängigen und abhängigen Variablen. Für die Funktionen $F_\alpha(z)$ haben wir nun reguläre Potenzreihen:

$$F_\alpha(z) = \mathfrak{P}_\alpha(z) = a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)} z + a_2^{(\alpha)} z^2 + \ldots,$$

in denen die Koeffizienten der Beziehung genügen

$$|a_\nu^{(\alpha)}| \leqq 1.$$

Wir bestimmen aus der Folge aller α, d. i. aus der natürlichen Zahlenreihe, eine Teilfolge.

(0) $$1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \ldots,$$

daraus eine neue Teilfolge

(1) $$1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3' < \alpha_4' < \ldots$$

daraus wieder eine neue Teilfolge

(2) $$1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3'' < \alpha_4'' < \ldots$$

und so fort, indem wir dafür sorgen, daß

für die Indexfolge (0) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_0^{(\alpha)} = a_0^*$ existiert,

für die Indexfolge (1) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_1^{(\alpha)} = a_1^*$ existiert,

für die Indexfolge (2) ... $\lim\limits_{\alpha=\infty} a_2^{(\alpha)} = a_2^*$ existiert usw.

Die resultierende Folge

(*) $$1 < \alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_3'' < \alpha_4''' < \cdots$$

ist eine Teilfolge jeder der Folgen (0), (1), (2), ... Für diese resultierende Folge existieren daher sämtliche oben genannten Limites. Wir behaupten nun, daß

$$a_0^* + a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \cdots = \mathfrak{P}_*(z)$$

für $|z| < 1$ eine reguläre Potenzreihe ist, die sich im Sinne gleichmäßiger Konvergenz als Limes darstellt:

$$\lim_{\alpha=\infty} \mathfrak{P}_\alpha(z) = \mathfrak{P}_*(z) \quad \text{für die Indexfolge (*).}$$

Da die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}_*(z)$ sämtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, so ist die Reihe $\mathfrak{P}_*(z)$ für $|z| < 1$ sicher gleichmäßig konvergent. Aus der Definition der Koeffizienten geht weiter sofort hervor, daß der $\varkappa$-te Abschnitt dieser Potenzreihe im Sinne gleichmäßiger Konvergenz der Limes von den $\varkappa$-ten Abschnitten der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\alpha(z)$ für die Indexfolge (*) ist, d i.

$$\lim_{\alpha=\infty} \mathfrak{P}_{\alpha,\varkappa}(z) = \mathfrak{P}_{*,\varkappa}(z) \quad \text{für die Indexfolge (*).}$$

Was nun die Restsummen $R_{\alpha,\varkappa}$ und $R_{*,\varkappa}$ der zugehörenden Potenzreihen anbetrifft, so gilt für diese im Kreise $|z| < \varrho < 1$

$$\left.\begin{matrix} |R_{\alpha,\varkappa}| \\ |R_{*,\varkappa}| \end{matrix}\right\} < \varrho^\varkappa + \varrho^{\varkappa+1} + \varrho^{\varkappa+2} + \cdots = \frac{\varrho^\varkappa}{1-\varrho}.$$

Diese werden also bei genügend großer Wahl von $\varkappa$ beliebig klein, woraus die aufgestellte Behauptung folgt.

Aus dem hiermit vollständig bewiesenen Konvergenzprinzip folgern wir jetzt einen zweiten Konvergenzsatz.

Zweiter Konvergenzsatz: Es seien $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, ... unendlich viele für $|z| < R$ regulär erklärte analytische Funktionen, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben, welche ferner die Eigenschaft besitzen, für einen bestimmten der Bedingung $\varrho < R$ genügenden Wert ϱ eine gleichmäßig konvergente Folge im Gebiete $|z| < \varrho$ darzustellen, so daß

$$\lim_{n=\infty} F_n(z) = F(z) \quad \text{für } |z| < \varrho \text{ existiert.}$$

Dann gilt vorstehende Gleichung im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auch für das ganze Innere der Kreisfläche $|z| < R$, d. h. die unendliche Folge ist für jeden Teilbereich $|z| < \varrho' < R$ gleichmäßig konvergent, und es existiert damit zugleich die Grenzfunktion $F(z)$ als reguläre analytische Funktion im ganzen Bereiche $|z| < R$. Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir wieder an, daß $M = 1$ und $R = 1$ sei. Nach dem vorangegangenen Beweise genügt es darzutun, daß unter den bestehenden Voraussetzungen die den darstellenden Potenzreihen der Funktionen $F_n(z)$ entnommenen Koeffizienten von $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots$ einzeln konvergieren. Dies aber ergibt sich aus der vorausgesetzten Konvergenz der Funktionen $F_n(z)$ im Kreise $|z| < \varrho$ folgendermaßen:

Zunächst müssen die ersten Koeffizienten $a_0^{(n)}$ der Entwicklungen $\mathfrak{P}_n(z)$ eine konvergente Folge bilden, weil sie die Werte der Funktionen $F_n(z)$ im Nullpunkte darstellen. Nunmehr ist klar, daß auch die Funktionen

$$\frac{\mathfrak{P}_n(z) - a_0^{(n)}}{z} = \overline{F}_n(z) = \overline{\mathfrak{P}}_n(z)$$

auf dem Kreise $|z| = \varrho$, daher auch innerhalb dieses Kreises gleichmäßig konvergieren. Ihre ersten Koeffizienten sind identisch mit den zweiten Koeffizienten $a_1^{(n)}$ der Reihen $\mathfrak{P}_n(z)$, die demnach auch eine konvergente Folge bilden. Hieraus ergibt sich weiter die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen

$$\frac{\mathfrak{P}_n(z) - (a_0^{(n)} - a_1^{(n)} z)}{z^2} = \overline{\overline{F}}_n(z) = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_n(z),$$

deren Anfangskoeffizienten mit den Koeffizienten $a_2^{(n)}$ identisch sind usw.

§ 7.

Beweis des Stetigkeits- und Limessatzes für die Abbildung I_a auf Grund der Konvergenzsätze des § 6.

Im Besitze der soeben entwickelten beiden Konvergenzsätze gehen wir jetzt zunächst an den Beweis des *Stetigkeitssatzes*, wobei wir die früher eingeführten Bezeichnungen beibehalten. Um darzutun, daß die

Differenz $\varphi_1(z') - \varphi_0(z')$ im Bereiche β, d. i. außerhalb des Kreises K, gleichmäßig unendlich klein wird, wenn B_1' in B_0' übergeht, machen wir die Annahme des Gegenteils. Es würde also dann eine Folge von Bereichen

$$B_1', B_2', B_3', \ldots$$

geben, für welche

$$\lim_{n=\infty} B_n' = B_0'$$

ist, für welche andererseits die Differenzen $\varphi_n(z') - \varphi_0(z')$ in β eine Bedingung

$$\text{Max}\,|\varphi_n(z') - \varphi_0(z')|_\beta > \gamma > 0$$

erfüllen. Da nun die Werte $|\varphi_n(z')|$ auf K unterhalb einer von n unabhängigen endlichen Schranke bleiben, gilt dasselbe auch für die Differenzen $|\varphi_n(z') - \varphi_0(z')|$. Die Funktionen $\varphi_n(z') - \varphi_0(z')$ sind aber in β regulär; im Punkte ∞ insbesondere nehmen sie den Wert Null an. Nach dem ersten Konvergenzsatze können wir aus der Reihe der natürlichen Zahlen eine Indexfolge

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

auswählen, so daß

$$\lim_{\lambda=\infty} (\varphi_{n_\lambda}(z') - \varphi_0(z'))$$

innerhalb β existiert im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Unter Anwendung des zweiten Konvergenzsatzes schließen wir dann unter Bezugnahme auf das Verfahren der analytischen Fortsetzung durch Funktionselemente die gleichmäßige Konvergenz derselben Funktionenfolge in β_H. Insbesondere ist damit auch die gleichmäßige Konvergenz auf dem Kreise K selbst bewiesen. Die Grenzfunktion muß nun ihrerseits in β Werte annehmen, deren absoluter Betrag ein Maximum $\geqq \gamma$ hat. Aus dem Vorhergehenden folgern wir durch Abtrennung der Funktion $\varphi_0(z')$ die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\varphi_{n_\lambda}(z')$ selbst in β_H. Von der Grenzfunktion $\varphi_*(z')$ gilt die Behauptung, daß sie von $\varphi_0(z')$ verschieden ist. Diese Grenzfunktion läßt sich auch in das Innere der Linie H hinein analytisch fortsetzen, sogar über die Begrenzungsschlitze von B_0' hinaus. Dies ergibt sich nach derselben Methode der analytischen Fortsetzung mittels Funktionselementen, wenn man bedenkt, daß die Funktionen $\varphi_n(z')$ ihrerseits über die Begrenzungsschlitze der ihnen entsprechendeu Bereiche B_n' durch Spiegelung fortsetzbar sind, wobei sich zugleich in dieser weiteren Ausdehnung ihre Beschränktheit ergibt. Die topologische Natur dieser analytischen Fortsetzung erfassen wir am einfachsten, indem wir uns das schlichte Innere $[H]$ jeder einzelnen Linie H in zwei längs des umschlossenen Begrenzungsschlitzes von B_n' aufgeschnittenen Exemplaren längs

dieses Schlitzes überkreuzt zusammengeheftet denken, wobei an den Endpunkten des Schlitzes je ein Windungspunkt erster Ordnung entsteht. In dem so gewonnenen zweiblätterigen Riemannschen Flächenstücke ist die Funktion $\varphi_n(z')$ eindeutig. Dieses Flächenstück wird durch die Funktion $\varphi_n(z')$ auf ein analog beschaffenes, durch Spiegelung an einem Schlitz entstehendes Riemannsches Flächenstück abgebildet. Da die Windungspunkte von der Wahl des Index abhängen, kann man, um das Verhalten der Funktionen beim Grenzübergang unter Einschluß der Windungspunkte näher zu charakterisieren, die beiden elementaren symmetrischen Funktionen der beiden Zweige betrachten. Diese sind beschränkte eindeutige Funktionen in dem von H umschlossenen schlichten Gebiete $[H]$ und konvergieren für die ausgewählte Indexfolge gleichmäßig auf H, also auch im ganzen Innern von H. Die Grenzfunktion $\varphi_*(z')$ wird nun in dem Gebiete $[H]$ als Wurzel einer quadratischen Gleichung mit regulären analytischen Funktionen als Koeffizienten dargestellt.

Nunmehr ergibt sich aus dem Abbildungscharakter der Näherungsfunktionen, daß die Grenzfunktion $\varphi_*(z')$ eine Abbildung des Bereiches B_0' leistet, bei welcher den Begrenzungsschlitzen von B_0' wegen des entsprechenden Abbildungscharakters der Näherungsfunktionen geradlinige Schlitze parallel der Achse des Reellen entsprechen müssen. Zwar gilt diese Behauptung bei den Näherungsfunktionen nicht für die Begrenzungsschlitze von B_0' selbst, sondern für benachbarte Schlitze. Aber es ist zu bedenken, daß infolge der Beschränktheit unserer betrachteten Funktionen bzw. symmetrischen Bildungen auch die Differenzenquotienten beschränkt sind und daher die zu betrachtenden Abweichungen in der Grenze unendlich klein werden (vgl. den Hilfssatz 2).

Aus dem Vorstehenden folgern wir nunmehr, daß die Grenzfunktion $\varphi_*(z')$ eine Abbildung des Bereiches B_0' auf einen schlichten Parallelschlitzbereich (B_0) leistet. Die Funktion $\varphi_*(z')$ verhält sich außerdem im Unendlichen wie ihre Näherungsfunktionen, d. h. sie hat die Verhaltungsform $z + ((0))$ im Unendlichen. Nach dem Unitätssatze müßte daher $\varphi_*(z')$ mit $\varphi_0(z')$ identisch sein. Das ist ein Widerspruch mit der oben festgestellten Verschiedenheit dieser beiden Funktionen.

Nach dem gefundenen Widerspruch bleibt nur die Annahme übrig, daß die Abbildungsfunktion $\varphi_1(z')$ in β gleichmäßig gegen $\varphi_0(z')$ konvergiert, wenn B_1' in B_0' übergeht. Daraus folgt nun wieder durch Anwendung des zweiten Konvergenzsatzes die gleichmäßige Konvergenz für den ganzen Bereich β_H und darüber hinaus in $[H]$, wobei im letzteren Gebiete, wie oben, zweckmäßig Summe und Produkt der beiden Zweige an Stelle der mehrdeutigen Funktionen selbst betrachtet werden können.

Hiermit ist der Stetigkeitsbeweis vollendet.

Was nun den Beweis des *Limessatzes* anbetrifft, so erfordert dieser etzt keine wesentlich neuen Betrachtungen. Es sei B_* der Bereich, für welchen die Existenz einer Abbildungsfunktion $f_*(z)$ nachzuweisen ist. Ferner seien $B_1, B_2, B_3, \ldots$ Nachbarbereiche des Bereiches B_*, für welche die Existenz zugehörender Abbildungsfunktionen $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ bereits als bekannt gilt. Die Funktionen $f_n(z)$ sind dann in β beschränkt. Man kann daher aus ihrer Gesamtheit eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Diese Folge ist aber dann nicht nur in β, sondern nach dem zweiten Konvergenzsatze auch in β_H gleichmäßig konvergent und darüber hinaus im Innern von $[H]$, in welch letzterem Gebiete diese Aussage zweckmäßig zunächst auf die beiden symmetrischen Funktionen der Zweige bezogen wird. Die Grenzfunktion $f_*(z)$ der ausgewählten Folge leistet die verlangte Abbildung.

Man kann die Bemerkung hinzufügen, daß auch die Folge $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ selbst in β_H und $[H]$ bereits gleichmäßig konvergiert. Dazu genügt es, diese Behauptung in β darzutun. In diesem Gebiete aber folgt sie indirekt, indem sich unter der Annahme des Gegenteils sofort die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge ergeben würde, deren Grenzfunktion $f_{**}(z)$ von $f_*(z)$ verschieden wäre und dennoch eine Abbildung der verlangten Art liefern würde, was mit dem Unitätssatze in Widerspruch steht.

§ 8.

Darlegung einer zweiten Häufungsmethode (Vermeidung der Konvergenzsätze des § 6) (Verzerrungssatz IV).

Noch eine *andere Beweisform des Limessatzes* (*zweite Häufungsmethode*), bei welcher wir von den beiden oben angegebenen Konvergenzsätzen keinen Gebrauch machen, die jedoch mit der soeben geschilderten Methode den Charakter als Häufungsmethode gemeinsam hat, verdient eine besondere Besprechung. Das Wesentliche hierbei ist eine Zurückführung auf den Stetigkeitsbeweis, den wir uns dabei nach der ursprünglichen in § 2 dargelegten Methode erbracht denken.

Die Funktionen $f_n(z)$ sind, wie gesagt, auf dem Kreise K beschränkt. Hieraus folgt, daß die Begrenzungsschlitze der Bildbereiche B_n' alle einem *endlichen Bezirke* angehören. Wir behaupten nun weiter, daß diese Begrenzungsschlitze *gegenseitige Abstände* haben, die oberhalb einer endlichen, von Null verschiedenen Schranke bleiben.

Vorstehende Behauptung ergibt sich aus den in § 4 dargelegten Verzerrungssätzen. Nach diesen Sätzen bleibt das Vergrößerungsverhältnis $|f_n'(z)|$ im ganzen Bereiche β_H oberhalb einer endlichen von n unab-

hängigen positiven von Null verschiedenen Schranke sowie auch unterhalb einer endlichen von n unabhängigen Schranke. Um jeden Punkt z_0 einer Linie H als Mittelpunkt können wir einen Kreis mit festem Radius ε beschreiben, dessen Fläche keinen Punkt der Begrenzung eines der Bereiche B_n enthält. Das Bild dieser Kreisfläche wird dann nach dem Hilfssatze 8 (§ 4) ein schlichtes Teilgebiet in B_n' bedecken, welches seinerseits eine Kreisfläche mit festem Radius um den Bildpunkt z_0' von z_0 als Mittelpunkt vollständig enthält. Man bemerkt sofort, wie sich hieraus unsere obige Behauptung ergibt.

Noch eine weitere Behauptung stellen wir auf, nämlich die, daß die *Längen der Begrenzungsstrecken* der Bereiche B_n' oberhalb einer von n unabhängigen endlichen Schranke bleiben. Daß diese Längen unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, ist eine unmittelbare Folge der Beschränktheit der Funktionen $f_n(z)$. Die Annahme beliebiger Kleinheit derselben würde andererseits mit Rücksicht auf die vorher bewiesene Behauptung zur Folge haben, daß man bei passender Wahl des Index n um einen solchen Begrenzungsschlitz einen Kreisring mit beliebig kleinem Radienverhältnis bestimmen kann, welcher alle anderen Begrenzungsschlitze des betreffenden Bereiches ausschließt. Die zugehörende Funktion $\varphi_n(z')$ würde dann, wegen ihrer Beschränktheit, auf dem Symmetralkreise des Ringes Werte von entsprechend kleiner Schwankung annehmen (vgl. einen Satz in Abh. III, Journ. f. Math. Bd. 147 (1917), S. 80). Dies ist aber nicht möglich, weil dem Symmetralkreise im Bilde eine Linie entspricht, die den entsprechenden Begrenzungsschlitz von B_n vollständig umschließt und der ist jedenfalls nicht beliebig kleiner Länge fähig.

Die somit bewiesene, die Längen der Schlitze betreffende Behauptung läßt sich, wie die vorhergehende über die Abstände der Begrenzungsschlitze voneinander, auch direkt mit Hilfe des Verzerrungssatzes beweisen. Zu dem Zwecke führe man in der z-Ebene und z'-Ebene je eine Transformation aus, durch welche einander entsprechende Umgebungen zugeordnete Schlitze je auf die äußere Umgebung eines Kreises mit dem Begrenzungsschlitz als Durchmesser abgebildet werden. Diese Transformationen ergeben sich aus den bekannten

$$\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = z \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(\zeta' + \frac{1}{\zeta'}\right) = z'$$

durch Ähnlichkeitstransformationen. Die angeschriebenen Transformationen bilden bekanntlich das Äußere des Einheitskreises auf die vom Punkte (-1) nach dem Punkte $(+1)$ geradlinig aufgeschlitzte Vollebene ab. Nach Einführung dieser Hilfstransformationen hat man an Stelle der Abbildungsbeziehung $z'(z)$ eine Abbildungsbeziehung $\zeta'(\zeta)$ wieder mit dem Ver

größerungsverhältnis 1 im Unendlichen zu betrachten, auf welche nun der Verzerrungssatz bis in die erwähnten, jetzt gewonnenen kreisförmigen Begrenzungslinien hinein angewandt werden kann, da über diese Kreise hinaus die Abbildung nach dem Spiegelungsprinzip unter voller Wahrung der Schlichtheit fortgesetzt werden kann.

Nunmehr greift folgendes *Schlußverfahren* Platz. Aus der natürlichen Zahlenreihe kann man eine Teilfolge so auswählen, daß der erste der $2m$ Schlitzendpunkte des m-fach zusammenhängenden Bereiches B_n' mit wachsendem Index gegen einen endlichen bestimmten Punkt konvergiert; aus der gefundenen Teilfolge eine neue Teilfolge so, daß auch der zweite Schlitzendpunkt gegen einen bestimmten Grenzpunkt konvergiert; aus der jetzt gefundenen Folge eine Teilfolge so, daß auch der dritte Schlitzendpunkt gegen einen bestimmten endlichen Punkt konvergiert usw., für alle $2m$ Schlitzendpunkte. Es ergibt sich schließlich eine Teilfolge

$$N_1 < N_2 < N_3 < \ldots,$$

für welche die zugehörenden Bereiche B_{N_h}' mit unbegrenzt wachsendem h gegen einen bestimmten, von m getrennten endlichen Schlitzen begrenzten Grenzbereich B_*' konvergiert. Indem wir für diesen Bereich B_*' die zugehörende Funktion $\varphi_*(z')$ bilden, finden wir eine Abbildung von B_*' auf einen Parallelschlitzbereich (B_*), der nun wegen des Stetigkeitssatzes in Verbindung mit dem Unitätssatze (für die Abbildungen $\varphi_n(z')$) offenbar mit B_* identisch sein muß.

Wir bemerken noch, daß auch die ursprüngliche Folge der Bereiche B_1', B_2', B_3', ... eindeutig gegen den Grenzbereich B_*' konvergieren muß. Die Annahme des Gegenteils würde nämlich die Existenz eines von B_*' verschiedenen Bereichs B_{**}' zur Folge haben, der eine zweite Lösung der Abbildungsaufgabe für den Bereich B_* darstellen würde, was mit dem Unitätssatze in Widerspruch steht.

Zum Schluß dieser Entwicklungen formulieren wir noch besonders einen Satz, der durch dieselben mit erwiesen ist.

Verzerrungssatz IV: Es sei B ein den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltender Bereich der z-Ebene, begrenzt von endlich vielen getrennten, geschlossenen, regulären analytischen Linien. Es sei $F(z)$ eine analytische Funktion, welche den Bereich B auf einen beliebigen anderen schlichten Bereich B' eineindeutig konform abbildet in der Weise, daß dabei der unendlich ferne Punkt in sich übergeht gemäß einer Verhaltungsformel $F(z) = z + ((0))$. Die Begrenzung des Bereichs B' werde keinerlei Bedingung unterworfen; überhaupt braucht die Funktion $F(z)$ auf der Begrenzung des Bereichs B nicht erklärt zu sein. — Unter

den angegebenen Voraussetzungen lassen sich über den Bereich B' al gemeingültige, d. h. für alle möglichen Abbildungen des Bereichs B m den genannten Eigenschaften gültige Aussagen machen; *erstens*: Die Be grenzungslinien des Bereichs B' liegen in einem endlichen, von der Wah der Abbildung unabhängigen Bezirke; *zweitens*: Die Begrenzungslinien de Bereichs B' besitzen kürzeste Abstände voneinander, die oberhalb eine endlichen von der Wahl der Abbildung unabhängigen Schranke bleiben *drittens*: die einzelnen Begrenzungslinien besitzen eine Maximalweit (größtmöglichster Abstand zweier auf einer Begrenzungslinie liegende Punkte) oberhalb einer endlichen, von Null verschiedenen, von der Wah der Abbildung unabhängigen Schranke. —

Es dürfte von Interesse sein, auch einen auf unsere beiden obige Konvergenzsätze (§ 6) sich gründenden, von den Verzerrungssätzen I bis II keinen Gebrauch machenden Beweis vorstehenden Satzes vorzubringen der allerdings gegenüber dem gegebenen Beweise den Nachteil hat, da er keine Möglichkeit einer expliziten Berechnung der in Rede stehende Schranken darbietet.

Gesetzt, es gäbe Abbildungsfunktionen $F(z)$ der im Satze bezeich neten Art, für welche die Begrenzungslinien des Bereichs B' beliebig nah aneinander heranrücken, so würde sich eine Folge solcher Abbildungs funktionen bestimmen lassen $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, . . ., für die behaupte werden kann, daß die betreffende Abstandsgröße mit wachsendem Index unendlich klein wird. Nun könnte man wegen der Beschränktheit de Funktionen $F_n(z)$ nach den beiden Konvergenzsätzen eine Teilfolge $F_{n_1}(z)$ $F_{n_2}(z)$, $F_{n_3}(z)$, . . ., auswählen, welche in jedem Teilbezirke von B gleich mäßig konvergiert. Die Grenzfunktion $F_*(z)$ würde dann ihrerseits ein schlichte Abbildung des Bereichs B auf einen gewissen Bereich B'_* leisten Man denke sich nun die einzelnen Begrenzungslinien von B je mit eine sie isolierenden Hilfslinie H umgeben. Die Bildkurven dieser Linien H im Bereich B'_* haben dann jedenfalls endliche von Null verschieden kürzeste Abstände voneinander. Daraus folgt wegen der gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $F_{n_\varkappa}(z)$, daß auch die Bildkurven der Linien H in den Bereichen B'_n nicht beliebig kleine Abstände voneinander habe können. Dies widerspricht aber der bei der Wahl der Funktionen $F_n(z)$ beobachteten Vorschrift.

Um auch die Existenz einer von Null verschiedenen unteren Schrank für die Maximaldurchmesser der einzelnen Begrenzungslinien darzutun können wir uns wohl am einfachsten wieder auf das Argument des Hilfs ringes mit beliebig kleinem Radienverhältnis berufen. Übrigens könne wir auch hier mit den beiden Konvergenzsätzen ohne Heranziehung diese

Argumentes zum Ziele kommen durch folgende Betrachtung, die uns wegen ihrer Eigenart einiges Interesse darzubieten scheint.

Ausgehend von der Annahme des Gegenteils der zu beweisenden Behauptung könnten wir eine Folge $F_1(z), F_2(z), F_3(z), \ldots$ bestimmen, für welche etwa die erste Begrenzungslinie des Bereichs B_n' einen mit unbegrenzt anwachsendem n unter jede Grenze herabsinkenden Maximaldurchmesser hat. Wir bestimmen dann aus dieser Folge eine gleichmäßig konvergente Folge: $F_{n_1}(z), F_{n_2}(z), F_{n_3}(z), \cdots$. Deren Grenzfunktion $F_*(z)$ bildet die erste Hilfslinie H auf eine Linie H_*' ab. Die inversen Funktionen $\Phi_{n_1}(z'), \Phi_{n_2}(z'), \Phi_{n_3}(z'), \cdots$ sind dann auf H_*' und in der Nachbarschaft von H_*' ebenfalls (wenigstens von einem gewissen Index ab) regulär definiert und konvergieren gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\Phi_*(z')$, die Umkehrungsfunktion der Funktion $F_*(z)$. Innerhalb H_*' sind sie eindeutig und beschränkt, dazu regulär erklärt, jede bis zu dem eingeschlossenen Begrenzungsschlitze des Bereichs B_n' vom gleichen Index. Man kann jetzt eine neue Indexfolge $n_1' < n_2' < n_3' < \cdots$ aus der Folge $n_1, n_2, n_3, \cdots$ herausgreifen, für die der erste Begrenzungsschlitz gegen einen Punkt α' innerhalb H_*' konvergiert. Für diese Indexfolge muß die Konvergenz der Funktionen $\Phi_{n_\varkappa'}(z')$ $[\varkappa = 1, 2, 3, \ldots]$ im ganzen Innern der Linie H_*' mit Ausnahme des Punktes α bestehen. Da auf Grund der bestehenden Abbildungen als Werte dieser Grenzfunktion in diesem Gebiete nur solche in Frage kommen, welche geometrisch durch Punkte innerhalb B repräsentiert werden, so finden wir jetzt zweierlei: daß die Funktion $\Phi_*(z')$ in dem ganzen von H_*' und α begrenzten Gebiete regulär ist und daß sie dasselbe abbildet auf die von H und der ersten Begrenzungslinie L des Bereichs B begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich. Die Funktion $F_*(z)$ würde sich also längs L gleichmäßig auf den konstanten Wert α reduzieren. Sie müßte daher nach einem bekannten Satze (vgl. Abh. I, S. 210) eine Konstante sein, was sie tatsächlich wegen ihres Verhaltens im Unendlichen nicht ist. Damit sind wir auf einen Widerspruch geführt.

§ 9.

Anwendung der beiden Häufungsmethoden auf die Abbildungen I_b', I_b'', I_b''' (Verzerrungssätze V—VII).

Nach den vorstehenden Darlegungen können wir uns in bezug auf die weiteren im zweiten Teile behandelten Abbildungen verhältnismäßig kurz fassen, was ihre Erledigung nach den beiden Häufungsmethoden betrifft.

Zunächst die Abbildung auf die *spiralförmig aufgeschlitzte Vollebene*. Stetigkeitsbeweis und Beweis des Limessatzes nehmen hier wesentlich den-

selben Verlauf wie bei der ersten Abbildung. Wir können jetzt direkt die Funktionen $\varphi(z')$ bzw. $f(z)$ betrachten, brauchen also nicht, wie früher, zu ihren Logarithmen überzugehen. Ebenfalls ist es zur Durchführung der Beweise mit dem Hilfsmittel der beiden Konvergenzsätze nicht mehr, wie früher, erforderlich, den Verzerrungssatz zur expliziten Anwendung zu bringen. Wesentlich ist nur der Nachweis, daß die Funktionen $\varphi(z')$ und $f(z)$ beschränkte Funktionen sind. Ihre Normierung im Unendlichen ist durch die Verhaltungsformeln

$$z' + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z'}\right) \quad \text{bzw.} \quad z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

bestimmt. Über die konstanten Glieder in den Potenzreihen $\mathfrak{P}$ ist dabei nichts vorausgesetzt. Die Funktionen verschwinden aber im Nullpunkte deswegen bleiben, wie wir oben gesehen haben, die Werte $|\varphi(z')|$ und $|f(z)|$ auf und innerhalb des alle Begrenzungslinien umschließenden Kreises K unter einer allgemein gültigen Schranke. Also können wir jedesmal eine gleichmäßig konvergente Folge bestimmen.

Bei der Abbildung auf die *spiralförmig aufgeschlitzte Einheitskreisfläche* ist die Beschränktheit der zu betrachtenden Funktionen von vorn herein klar. Es ist jedoch jetzt besonders zu zeigen, daß die Grenzfunktion nicht eine Konstante werden kann, ein Umstand, welcher das Schlußverfahren hinfällig machen würde. Daß dies in der Tat nicht eintreten kann, lehrt folgende Überlegung. Diese Konstante müßte, wenn sie zustande käme, jedenfalls gleich Null sein, weil die zu betrachtenden Näherungsfunktionen im Nullpunkte verschwinden. Konstruieren wir jetzt eine mit dem Einheitskreise E konzentrische Kreislinie K, die alle inneren Begrenzungslinien der in der Ebene der jeweils unabhängigen Variablen liegenden Bereiche umschließt, so würden die Abbildungsfunktionen der ausgewählten konvergenten Folge auch auf dieser Kreislinie gegen die Konstante Null konvergieren. Der von E und K begrenzte Ring würde unter diesen Umständen durch die Näherungsfunktionen von genügend hohem Index auf ein ringartiges Gebiet abgebildet werden, dessen äußere Begrenzungslinie der Einheitskreis ist und dessen innere Begrenzungslinie vollständig innerhalb K verläuft. Das ist aber nicht möglich, weil alsdann die Funktionen $\log \frac{\text{Funktion}}{\text{unabh. Variable}}$ ihrerseits eine Abbildung des erwähnten Ringes auf ein Gebiet G leisten würden, dessen beide Begrenzungslinien durch einen unendlichen Parallelstreifen endlicher Breite parallel der Achse des Imaginären voneinander getrennt wären, so daß das Gebiet G sich offenbar notwendig ins Unendliche erstrecken müßte.

Nachdem feststeht, daß die Grenzfunktion nicht eine Konstante werden kann, ist nunmehr auch klar, daß die Werte der Funktionen der

konvergenten Folge auf K absolut genommen oberhalb einer von Null verschiedenen Schranke bleiben. Nach Spiegelung am Einheitskreise, wobei der Kreis K in einen Kreis K' übergeht, folgt nun, daß die Werte dieser Näherungsfunktionen auch in dem von K und K' begrenzten Ringe beschränkt bleiben. Die gleichmäßige Konvergenz erstreckt sich also auch auf den Einheitskreis selbst und über diesen hinaus.

Ganz analoge Betrachtungen führen auch in dem Falle der Abbildung auf eine *spiralförmig aufgeschlitzte Kreisringfläche* zum Ziele. Spiegelt man bei dieser Untersuchung am inneren Begrenzungskreise, so bleiben die zu betrachtenden Funktionen natürlich auch in dem so erweiterten Bereiche beschränkt. Die Konvergenz erstreckt sich daher in diesem Falle ohne weiteres bis über die inneren Begrenzungskreise. Die Konvergenz auf dem Einheitskreise wird durch eine der vorangehenden analoge Betrachtung sichergestellt.

Die Behandlung der jetzt in Rede stehenden Abbildungsaufgaben nach der *zweiten Häufungsmethode* bietet ebenfalls keine besondere Schwierigkeiten dar. Dabei kommt es der oben entwickelten Auffassung gemäß wesentlich nur darauf an, den Limessatz darzutun, wobei der Stetigkeitssatz als bewiesen betrachtet wird. Die im zweiten Teil bei Behandlung dieser Abbildungsaufgaben dargelegten Verzerrungssätze bieten bei Beachtung der in § 8 vorgebrachten auch hier maßgebenden Gründe die ausreichenden Unterlagen für eine Beweisführung im Sinne der zweiten Häufungsmethode. Wir können uns damit begnügen, die dem Verzerrungssatze IV (§ 8) analogen, jetzt zur Geltung kommenden Sätze anzugeben, indem eine nähere Begründung sich erübrigt.

Verzerrungssatz V: Es sei B ein den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltender einfach oder mehrfach zusammenhängender schlichter Bereich, welcher durch Vermittlung einer Funktion $F(z)$ der Entwicklungsform $z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ im Unendlichen unter Festhaltung des Nullpunktes und des unendlich fernen Punktes eineindeutig auf einen andern schlichten Bereich B' abgebildet werde. Dann gelten folgende Behauptungen: 1. Die Begrenzung des Bereichs B' gehört ganz einem vorherbestimmbaren (d. h. hier und im folgenden: „unabhängig von der Wahl der Abbildung vorherbestimmbaren") endlichen Bezirke an; sie hat auch vom Nullpunkte einen kürzesten Abstand, dessen Größe oberhalb einer vorhebestimmbaren von Null verschiedenen positiven Schranke liegt. 2. Die einzelnen Begrenzungslinien besitzen untereinander kürzeste Abstände, deren Größe oberhalb einer vorherbestimmbaren positiven von Null verschiedenen Schranke liegt. 3. Die Maximaldurchmesser der einzelnen Be-

grenzungslinien haben eine Größe, welche oberhalb einer vorherbestimm
baren positiven von Null verschiedenen Schranke liegt.

Verzerrungssatz VI: Es sei B ein den Nullpunkt in seinem Innern enthaltender, außen durch den Einheitskreis begrenzter endlicher Bereich welcher unter Festhaltung des Nullpunktes auf einen anderen schlichten Bereich B' sonst gleicher Beschaffenheit eineindeutig konform abgebilde werde. Dann gibt es für den Bereich B' vorherbestimmbare positive von Null verschiedene untere Schranken für die Abstände der Begrenzungslinien des Bereichs B' und des Nullpunktes untereinander sowie für die Maximal durchmesser der einzelnen Begrenzungslinien.

Verzerrungssatz VII: Es sei B ein außen durch den Einheitskreis innen u. a. auch durch einen konzentrischen Kreis begrenzter, mehrfach zusammenhängender Bereich. Derselbe werde unter Festhaltung des Einheitskreises und unter Überführung des inneren Begrenzungskreises in einen wiederum konzentrischen (nicht näher vorherbestimmten) Kreis auf einen anderen Bereich B' sonst gleicher Beschaffenheit abgebildet. Dann bleibt der Radius des inneren Begrenzungskreises von B' oberhalb einer vorher bestimmbaren von Null verschiedenen Schranke. Gleiches gilt von den Abständen der einzelnen Begrenzungslinien von B' untereinander, sowie von den Maximaldurchmessern aller einzelnen Begrenzungslinien von B'

(Eingegangen am 4. Mai 1918.)

Über die Nullstellen der Zetafunktion.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

I. Die von Riemann angegebene, erst 46 Jahre später durch von Mangoldt streng begründete Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + R(T), \tag{1}$$

wo in üblicher Bezeichnungsweise $R(T) = O(\log T)$ ist, ist bekanntlich in sehr eleganter Weise von Backlund[1]) wieder abgeleitet worden. — $N(T)$ bezeichnet hier die Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = 0$, deren Ordinaten der Beziehung $0 < t \leqq T$ genügen.

Unter Voraussetzung der Richtigkeit der Riemannschen Hypothese, daß alle diese Wurzeln den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, ist es nun Bohr[2]) vor einigen Jahren gelungen zu beweisen, daß sogar $R(T) = o(\log T)$ ist; ein Resultat, dem für unsere Vorstellung von der asymptotischen Verteilung der Nullstellen wegen der daraus entspringenden Formel

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(T+1) - N(T)}{\log T} = \frac{1}{2\pi}$$

eine gewisse Bedeutung zukommt. — Durch eine geeignete Abänderung der Backlundschen Beweismethode werde ich nun im folgenden dieses Resultat und sogar etwas mehr in einfacher Weise ableiten, indem ich nämlich beweisen werde: *Die Abschätzung* $R(T) = o(\log T)$ *bleibt richtig, wenn nur die Wahrheit der sogenannten Lindelöfschen Hypothese vorausgesetzt wird.* — Es besagt diese Hypothese, daß $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$

[1]) „Über die Nullstellen der Zetafunktion", Dissertation, Helsingfors 1916 und „Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus, Bd. 158 (1914), S. 1979.

[2]) Bohr, Landau, Littlewood, „Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$", Bulletin de l'Academie Royale de Belgique, Bd. 15 (1913), S. 1144 bis 1175.

ist, oder mit anderen Worten, daß gleichmäßig für $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 1$, $\zeta(s) = O(t^{\varepsilon}$ ist. Dieses Resultat enthält in der Tat dasjenige von Bohr, da nach dem bekannten Satze von Littlewood[3]) jene Vermutung eine Folge der Riemannschen ist. Der Beweis von Bohr macht in erschöpfender Weise von dem Nichtverschwinden von $\zeta(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ Gebrauch.

Es ist schon lange bekannt, daß in (1), T wurzelfrei vorausgesetzt

$$R(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\tfrac{1}{2} + iT) + O(1),$$

wenn man z. B. vom Punkte $s = 2$ mit dem Argumente 0 von $\zeta(s)$ aus geht und zunächst geradlinig nach $s = 2 + iT$ und von hier aus gerad linig weiter nach $\frac{1}{2} + iT$ fortschreitet. Der Kern der Backlundsche Methode besteht nun in der Anwendung der leicht zu erkennenden Tatsach

$$\frac{1}{\pi} |\arg \zeta(\tfrac{1}{2} + iT)| < l + \tfrac{1}{2},$$

wo l die Anzahl der innerhalb des Kreises $|s - 2| = \frac{3}{2}$ gelegenen Nul stellen von

$$f(s) = \tfrac{1}{2}[\zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)]$$

ist. Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Größe, und es werde di Lindelöfsche Vermutung als wahr angenommen. Alsdann gibt es be kanntlich ein t_0, so daß für $|t| > t_0$

$$|\zeta(s)| < |t|^{\varepsilon^2} \quad \text{für} \quad \sigma \geqq \tfrac{1}{2},$$
$$|\zeta(s)| < |t|^{\frac{1}{2} - \sigma + \varepsilon^2} \quad \text{für} \quad 0 < \sigma \leqq \tfrac{1}{2}$$

gilt. Ich wende nun den Jensenschen Satz auf die Funktion $f(s)$ un auf den Kreis $|s - 2| = r = \frac{3}{2}(1 + \varepsilon)$ an. Hierbei wird $\varepsilon < \frac{1}{3}$ un $T > t_0 + 2$ vorausgesetzt. Indem ich nur die l Nullstellen innerhal $|s - 2| = \frac{3}{2}$ beibehalte, erhalte ich

$$l \cdot \log(1 + \varepsilon) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2 + re^{i\varphi})| \, d\varphi - \log |f(2)|.$$

Da aber $|f(2)| = R[\zeta(2 + iT)] > \frac{1}{4}$ ist, so ergibt sich hieraus für ei hinreichend kleines ε

$$(2) \qquad l < \frac{1}{2\pi \log(1 + \varepsilon)} \int_0^{2\pi} \log |f(2 + re^{i\varphi})| \, d\varphi + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Um nun das Integral abzuschätzen, bemerken wir, daß der aus d Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ herausragende Bogen des Kreises $|s - 2| = \frac{3}{2}(1 +$

[3]) Comptes rendus, Bd. 154 (1912), S. 263–266.

mit ε unendlich klein wird, und zwar von der Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$. Für die auf diesen Bogen bezüglichen Werte von φ ist aber

$$\log|f(2+re^{i\varphi})| < \log(T+2)^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon^2} \leqq \varepsilon\left(\tfrac{3}{2}+\varepsilon\right)\log(T+2).$$

Daher ist

$$l < \frac{1}{\varepsilon}\left[M\sqrt{\varepsilon}\cdot\varepsilon\left(\tfrac{3}{2}+\varepsilon\right)+2\pi\varepsilon^2\right]\log(T+2)+\frac{2}{\varepsilon},$$

was für alle hinreichend großen Werte von T kleiner als $M_1\sqrt{\varepsilon}\cdot\log T$ ist, unter M und M_1 absolute Konstanten verstanden. Der Beweis des Satzes ist hiermit für jedes wurzelfreie T geliefert; für stetig wachsendes T kann er nunmehr unmittelbar gefolgert werden.

II. Es wird sich jetzt ergeben, daß unter Voraussetzung der Riemannschen Hypothese eine noch bessere Abschätzung von $R(T)$ erhalten werden kann.

Wenn diese Hypothese wahr ist, so ist nämlich[4])

$$R(T) = O\left[\log T\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

In der oben erwähnten Abhandlung gibt Littlewood ohne vollständige Angabe seines Beweises, der aber nicht schwer zu ergänzen ist, die Abschätzung:

$$\log\zeta(\sigma+it) = O\left[\left(\frac{\log t\log_2 t}{\log_3 t}\right)^{2(1-\sigma)}\log_3 t\right]$$

gleichmäßig für

$$\tfrac{1}{2}+\frac{\delta}{\log_2 t} \leqq \sigma \leqq 1, \quad t>0.$$

Unter Berücksichtigung bekannter Sätze schließt man hieraus: es ist für alle $\sigma \geqq \frac{1}{2}+2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$, $t>0$ gleichmäßig

$$\log\zeta(\sigma+it) = O\left[\left(\frac{\log t\log_2 t}{\log_3 t}\right)^{1-4\frac{\log_3 t}{\log_2 t}}\cdot\log_3 t\right] = \tag{3}$$

$$= O\left[\log t\cdot\log_2 t\cdot e^{\frac{4\log_3 t}{\log_2 t}[\log_2 t+\log_3 t-\log_4 t]}\right] = O\left[\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}\right].$$

Speziell auf der Kurve $\sigma = \frac{1}{2}+2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$ ist also für $t>t_0$

$$|\zeta(s)| < e^{K\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}}, \tag{4}$$

also nach der Funktionalgleichung auf der Kurve $\sigma = \frac{1}{2}-2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}$, $t>t_0$

$$|\zeta(s)| < K_1\cdot t^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{K\frac{\log t}{(\log_2 t)^3}} < e^{K_2\frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t}} \tag{5}$$

[4]) Ich setze $\log_2 t = \log\log t$, $\log_3 t = \log\log_2 t$.

Betrachten wir nun die für große t_0 im Gebiete

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2} - 2\frac{\log_3 t}{\log_2 t} \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2} + 2\frac{\log_3 t}{\log_2 t}, \quad t > t_0$$

reguläre Funktion

$$\varphi(s) = \frac{\zeta(s)}{e^{K_3 \frac{\log(-is)\cdot\log_3(-is)}{\log_2(-is)}}},$$

wo bei der Definition der vieldeutigen Funktionen jedem Logarithmus sein Hauptwert zu erteilen ist. Man sieht nun ohne Schwierigkeit, daß für $t \to \infty$

$$\frac{\log(-is)\cdot\log_3(-is)}{\log_2(-is)} = \frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

gilt, und zwar in bezug auf σ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig.

Auf dem Rande des Gebietes (6) ist also nach (4) und (5) die Funktion $\varphi(s)$ beschränkt, und da sie im Innern des Gebietes jedenfalls nicht schneller als eine endliche Potenz von t wächst, so ist sie nach einem bekannten Phragmén-Lindelöfschen Satze auch im Innern beschränkt[5]).

Es ist also im Gebiete (6)

$$(7) \qquad \log|\zeta(s)| < K_3 \frac{\log t\cdot\log_3 t}{\log_2 t}.$$

Wir setzen nun in (2)

$$\varepsilon = \frac{\log_3 T}{\log_2 T}.$$

Da $f(s) = \frac{1}{2}[\zeta(s+iT) + \zeta(s-iT)]$ ist und da über den Kreis $|s-2| = \frac{3}{2}(1+\varepsilon)$ integriert wird, so kommen bei der Integration für große Werte von T nur solche Werte des Argumentes in $\zeta(s+iT)$ in Betracht, die im Gebiete (6) oder rechts davon liegen. Für $\zeta(s-iT)$ gilt natürlich Entsprechendes in der unteren Halbebene.

Zuerst wird derjenige Teil des Integrals in (2) abgeschätzt, in dem entweder bei $\zeta(s+iT)$ oder bei $\zeta(s-iT)$ ein Argumentwert auftritt, der im Gebiete (6) oder in dem hierzu symmetrischen Gebiete der unteren Halbebene liegt. Der diesbezügliche Teil des Kreisbogens wird wieder schließlich unendlich klein, und zwar von der Ordnung $\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^3$; für $f(s)$ gilt aber hier nach (7)

$$\log|f| = O\left(\frac{\log T\cdot\log_3 T}{\log_2 T}\right).$$

Für den ganzen übrigbleibenden Teil des Kreises gilt nach (3)

$$\log|f| = O\left[\frac{\log T}{(\log_2 T)^3}\right].$$

---

[5]) Vgl. Landau, Handbuch. II, S. 849.

so daß schließlich

$$l < \frac{1}{2\pi \log(1+\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \log|f(2+re^{i\varphi})|\, d\varphi + \frac{2}{\varepsilon} =$$

$$= O\left\{\frac{\log_2 T}{\log_3 T}\left[\left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} + \frac{\log T}{(\log_2 T)^3} + 1\right]\right\} = O\left[\log T \left(\frac{\log_3 T}{\log_2 T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

gilt. Hieraus kann nunmehr ähnlich wie oben die zu beweisende Abschätzung für $R(T)$ gefolgert werden.

Stockholm, den 23. Februar 1918.

(Eingegangen am 21. März 1918.)

Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen.

Von

Wilhelm Groß in Wien.

In dieser Arbeit setze ich die Untersuchungen fort, die ich in einer früheren Arbeit[1]) über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen angestellt habe. So führe ich die Untersuchungen über die Häufungsbereiche[2]) einer Funktion dahin weiter, daß ich nunmehr wenn P die einzige transzendente Stelle einer innerhalb und auf der Jordankurve $\mathfrak{W}$ meromorphen Funktion auf $\mathfrak{W}$ ist, den Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ in einen rechtsseitigen und linksseitigen Teil trenne und diesen Begriff für den Fall erweitere, daß $f(z)$ nur in $\mathfrak{W}$ meromorph ist. Sodann führe ich den Begriff eines „inneren" Häufungsbereiches ein. Der „innere" Häufungsbereich einer innerhalb des Einheitskreises definierten Funktion bezüglich eines Randpunktes P besteht in der Gesamtheit der Werte, die in den Häufungsbereichen der Funktion für jene gegen P strebende Wege enthalten sind, die den Einheitskreis im weiteren Sinne nicht berühren, d. h. die sich in Winkelräume mit der Spitze in P einschließen lassen, deren Schenkel den Einheitskreis nicht berühren. Dieses bezüglich lassen sich einige interessante Sätze aufstellen mit Hilfe der Ungleichung:

$$(1) \qquad \left(\int\left[\int |f'(w)|\,du\right]dv\right)^2 \leqq \iint |f'(w)|^2\,du\,dv \cdot \iint du\,dv,$$

die ich bereits in der ersten Arbeit ausgiebig verwendet habe. Von den Ergebnissen will ich hier nur folgenden Satz erwähnen.

Bildet die im Einheitskreis analytische Funktion $f(z)$ den Einheitskreis auf einen schlichten Bereich ab und strebt $f(z)$ auf einem in den Randpunkt P_0 endenden Weg des Inneren gegen einen bestimmten Wert w_0

[1]) Wilh. Groß, Über die Singularitäten analytischer Funktionen, Monatshefte für Math. u. Physik, Bd. XXIX, 1918, S. 3—47.

[2]) Zu diesem Begriffe vgl. Abschnitt I.

so strebt $f(z)$ auf allen in P_0 endenden, den Einheitskreis im weiteren Sinne nicht berührenden Wegen des Einheitskreises gegen w_0. Sonst besteht der Häufungsbereich jedes solchen Weges genau aus der Menge der Hauptpunkte des P_0 zugehörigen „Randelementes" (Primendes).

Ferner untersuche ich das Verhalten der Abbildung am Rande und gelange unter sehr weitgehenden Voraussetzungen zu Sätzen über Winkelproportionalität der Abbildung.

Die in meiner ersten Arbeit verwendeten Methoden gestatten es ohne Schwierigkeit, den dort ausgesprochenen Satz

Jeder Stern der Umkehrungsfunktion einer im endlichen meromorphen Funktion überdeckt die ganze Ebene mit Ausnahme einer Nullmenge.

in weitgehendem Maße zu verallgemeinern. Mit Hilfe dieser Verallgemeinerung erhalten wir einen neuen, in seinem Grundgedanken einfachen Beweis und eine bedeutsame Ausdehnung der in jener Arbeit aufgestellten Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems[3]). Es sei erwähnt, daß mein erster Beweis auf rein potenzreihentheoretischer Grundlage beruht und wenn er auch — trotz seines einfachen Grundgedankens — in der Ausführung umständlicher verläuft als der Lindelöfsche Beweis des unten erwähnten Sonderfalles, der sich auf einen Satz über das Poissonsche Integral stützt, so gestattet er dafür ohne weiteres die übrigen in meiner Arbeit [1]) gegebenen Verallgemeinerungen abzuleiten. Ich gebe schließlich noch einen dritten — mit dem Lindelöfschen Beweis des Sonderfalles und den Iversenschen Sätzen also den vierten[3a]) — Beweis dieser Sätze, der sich auf die Verallgemeinerung eines von Zoretti[4]) mit gänzlich un-

[3]) Wie mir Herr Mittag-Leffler nach Fertigstellung jener Arbeit liebenswürdigerweise mitteilte, wurde der Satz: „Wenn die innerhalb und auf der Jordankurve $\mathfrak{W}$ mit Ausnahme des Punktes P meromorphe Funktion $f(z)$ beim Herangehen an P auf $\mathfrak{W}$ von rechts und links gegen verschiedene Werte a und b strebt, so nimmt $f(z)$ jeden Wert mit Ausnahme von höchstens zwei innerhalb $\mathfrak{W}$ unendlich oft an", bereits vorher in während des Krieges erschienenen, mir erst nachher durch die Freundlichkeit des Herrn Mittag-Leffler teilweise bekannt gewordenen Arbeiten der finnischen Forscher E. Lindelöf und F. Iversen veröffentlicht [F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes, Dissert. Helsingfors 1914 (Iversen I); Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier, Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förh., Bd. 58, 1916, Afd. A. Nr. 25 (Iversen II); E. Lindelöf, Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la theorie de la representation conforme, Acta Soc. Sc. Fenn., Bd. 46, 1915 [Letztes Zitat nach Iversen II]. Die übrigen Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems, die ich in [1]) ausgesprochen und bewiesen habe, lassen sich teilweise aus drei Sätzen von Iversen II, S. 7, 11, 13 unmittelbar ablesen.

[3a]) Vgl. den Nachtrag S. 294.

[4]) Zoretti, Sur les fonctions analytiques uniformes, qui possedent un ensemble parfait discontinu de points singuliers (Journ. de Math., ser. VI, Bd. I. (1905), S. 1

zureichender Begründung ausgesprochenen, von mir an anderer Stelle[5] zuerst bewiesenen wichtigen Satzes der Funktionentheorie stützt.

I. Der Häufungsbereich.

1. Es sei uns ein zusammenhängendes Gebiet G gegeben, in dem eine eindeutige Funktion $f(z)$ meromorph ist. Wir betrachten dann für einen Randpunkt P von G bezüglich des Verhaltens von $f(z)$ in G drei Bereiche:

1. den Wertebereich, d. i. die Gesamtheit der Werte, die $f(z)$ in jeder Umgebung von P innerhalb G annimmt;

2. den Häufungsbereich, d. i. die Gesamtheit der Werte, denen $f(z)$ in jeder Umgebung von P innerhalb G beliebig nahekommt;

3. den Konvergenzbereich, d. i. die Gesamtheit der Werte, für die es in P endende Jordankurven innerhalb G gibt, auf denen $f(z)$ bei der Annäherung von z an P gegen einen dieser Werte strebt. Diesbezüglich sei zu meiner früheren Arbeit nachgetragen, daß, wie aus einem von mir hergestellten Beispiel[6]) folgt, *der Konvergenzbereich die ganze Ebene umfassen kann.*

2. Ist $f(z)$ auf einem im Punkte P endenden Jordanweg $\mathfrak{W}$ meromorph, so bezeichnen wir als Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ für $f(z)$ im Punkte P die Gesamtheit der Werte, denen $f(z)$ auf $\mathfrak{W}$ in jeder Umgebung von P beliebig nahe kommt. Wir erhalten ihn, indem wir die Werte, die $f(z)$ zwischen P_i und P auf $\mathfrak{W}$ annimmt, abgeschlossen machen und den Durchschnitt dieser Folge von ineinandergeschachtelten, zusammenhängenden abgeschlossenen Mengen aufsuchen. Die P_i sollen hierbei eine gegen P konvergierende Folge von Punkten auf $\mathfrak{W}$ sein, so daß P_{i+1} zwischen P und P_i liegt. Daraus folgt, daß der *Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ ein Punkt oder ein Kontinuum*[7]) *ist.*

3. Ist nun $f(z)$ auf einem Jordanweg $\mathfrak{W}$ mit Ausnahme des Innenpunktes P meromorph, so wird $\mathfrak{W}$ durch P in einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Teil, $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$, getrennt. Diese sind in P endende Jordanwege, auf denen $f(z)$ meromorph ist und ihre Häufungsbereiche bezeichne ich als den rechtsseitigen, bzw. linksseitigen Häufungs-

---

bis 51, insbes. S. 49); Leçons sur le prolongement analytique (Paris, Gauthier-Villars 1911, S. 73).

[5]) Wilh. Groß, Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten. Math. Ann. 78 (1918), S. 332–342.

[6]) Wilh. Groß, Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist, Math. Ann. Bd. 79 (1918).

[7]) In der Funktionentheorie rechnen wir das Unendliche einfach als Punkt. So ist die Vollebene ein Kontinuum.

bereich von $\mathfrak{W}$. Jeder derselben ist ein Kontinuum und ihre Vereinigungsmenge, der Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ schlechtweg, *besteht also aus ein oder zwei Kontinuen oder Punkten.*

4. Es sei jetzt $\mathfrak{W}$ eine geschlossene Jordankurve, $f(z)$ eine innerhalb $\mathfrak{W}$ und auf $\mathfrak{W}$ mit Ausnahme des Punktes P meromorphe Funktion. *Besteht dann in P der Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$: h aus zwei getrennten Kontinuen (Punkten) h_1 und h_2,* so nimmt $f(z)$ in dem Innengebiet G von $\mathfrak{W}$, wie aus den von Iversen und mir gegebenen Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems folgt, jeden Wert des von h_1 und h_2 bestimmten Gebietes mit Ausnahme von höchstens zwei Werten unendlich oft an, d. h. *der Häufungsbereich H von G in P besteht zumindest aus der Vereinigungsmenge von h_1, h_2 und dem durch h_1 und h_2 bestimmten Gebiet. Denn H enthält stets h_1 und h_2.*

5. Ist jedoch h ein einziges Kontinuum, so wissen wir aus jenem Satze, daß, wenn H einen einzigen Punkt irgendeines der zusammenhängenden Gebiete enthält, die als Komplementärmengen durch h bestimmt werden, $f(z)$ jeden Punkt dieses Gebietes mit Ausnahme von höchstens zwei in G unendlich oft annimmt, also enthält H dieses Gebiet. Überhaupt die Randpunkte von H liegen stets in h[8]).

Es läßt sich nun folgender Satz aussprechen:

Sind h_1 und h_2 irgend zwei Kontinua (Punkte), die zumindest einen Punkt miteinander gemein haben, so läßt sich eine geschlossene Jordankurve $\mathfrak{W}$ und eine im Innern G von $\mathfrak{W}$ und auf $\mathfrak{W}$ selbst mit Ausnahme des Punktes Π reguläre Funktion konstruieren, so daß in Π der rechtsseitige, bzw. linksseitige Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ aus h_1, bzw. h_2 besteht, während H von der Vereinigungsmenge von h_1 und h_2 gebildet wird.

Zum Beweis konstruieren wir uns einmal eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche auf folgende Art. Es sei P ein gemeinsamer Punkt von h_1 und h_2, von dem wir voraussetzen können, daß er im Endlichen liegt[9]). Wir nehmen dann ein gleichseitiges Dreieck Δ her von der Seitenlänge 1, dessen eine Spitze in P liegt. Ist $S_r(S_l) = [P, Q_r] = [0, 1]$ die eine der an P stoßenden Seiten, so bezeichnen wir die Strecken $\left[\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right]$ auf ihr mit $S_r^{(k)}(S_l^{(k)})$. Um das Gebiet $G_r^{(k)}$ herzustellen, gehe ich von dem Teile T_k von h_1 aus, der dem Kreise $|z - P| \leqq 2^k$ an-

[8]) So auch Iversen II, S. 7.

[9]) Sonst bewirken wir dies durch eine lineare Transformation. Damit bei der Rücktransformation die konstruierte Funktion ganz bleibt, nehmen wir für den später erwähnten Punkt A den Punkt P.

gehört und den wir evtl. durch Stücke des Kreisrandes zusammenhängend machen. Ist M_k dann die Menge aller Punkte, die von T einen Abstand $\geqq \frac{1}{2^k}$ haben, so bezeichnen wir mit N_k die Menge jener Punkte, die von M_k einen Abstand $> \frac{1}{2^{k+1}}$ besitzen. Die Innenpunkte und die Randpunkte von N_k besitzen von T_k einen Abstand $\leqq \frac{1}{2^k}$, $\geqq \frac{1}{2^{k+1}}$. Daraus folgt unmittelbar, daß N_k ein zusammenhängendes Gebiet ist, welches T_k in seinem Innern enthält. Die Komplementärmenge von N_k ist eine abgeschlossene Menge. Zerfällt sie in getrennte Bestandteile, so enthält jeder derselben einen Kreis vom Radius $\frac{1}{2^{k+1}}$ als Teilmenge. Es kann deren also nur endlich viele geben, d. h. N_k ist von endlicher Zusammenhangszahl und läßt sich durch endlich viele geradlinige Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich N_k^* verwandeln, dessen Innen- und Randpunkte von T_k einen Abstand $\leqq \frac{1}{2^k}$ besitzen. Um zu erzielen, daß alle Punkte von T_k von den Randpunkten von $G_r^{(k)}$ einen Abstand $\leqq \frac{1}{2^k}$ besitzen, gehen wir so vor. Wir betrachten die Gesamtheit der Punkte von N_k^*, die von dem Rande von N_k^* einen Abstand $\geqq \frac{1}{2^k}$ besitzen. Diese abgeschlossene, beschränkte Menge m_k läßt sich nach dem Heine-Borelschen Theorem mit endlich viel Kreisen vom Radius $\frac{1}{2^k}$ bedecken. Wir verbinden sukzessive die Mittelpunkte dieser Kreise durch geradlinige Einschnitte mit dem Rande von N_k^*, bzw. dem Rande der so nacheinander entstehenden Bereiche. Bedeckt der so entstandene Bereich die beiden festgewählten Punkte A und B, so scheiden wir sie durch geradlinige Einschnitte aus. Schließlich führen wir noch einen geradlinigen Einschnitt $\Sigma_r^{(k)}$ innerhalb des Kreises $|z - P| < \frac{1}{2^{k+1}}$ der in dem Punkte $P_k^{(r)}$ $|P_k^{(r)} - P| < \frac{1}{2^{k+1}}$ endet; dieser ist stets möglich, da P der Menge T_k angehört. Der so erhaltene Bereich $G_k^{(r)}$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Randpunkte und T_k in der gegenseitigen Nachbarschaft $\frac{1}{2^k}$ liegen. Es sei nebenbei erwähnt, daß der Rand von $G_k^{(r)}$ ein endliches lineares Maß besitzt, da dies für den Rand von N_k gilt[10]).

Genau so stellen wir uns, von h_2 ausgehend, $G_k^{(l)}$ her.

---

[10]) Der Beweis hierfür ist in meiner eingangs angeführten Arbeit [1]) (S. 2 Fußnote) angedeutet.

Wir bilden nun aus Δ und der Gesamtheit der $G_k^{(r)}$, $G_k^{(l)}$ einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$, indem wir $G_k^{(r)}[G_k^{(l)}]$ an Δ mittels eines geradlinig begrenzten Streifens endlicher Breite angliedern, der innerhalb $|z-P|<\frac{1}{2^k}$ von $S_r^{(k)}(S_r^{(l)})$ nach $\Sigma_r^{(k)}(\Sigma_r^{(l)})$ verläuft und A und B nicht bedeckt. Wir bilden $\mathfrak{B}$ jetzt konform auf den Einheitskreis ab — dies geht, da der Bereich $\mathfrak{B}$ berandet ist, bzw. auch weil er die Punkte $1, B, \infty$ nicht überdeckt. Betrachte ich die ineinander geschachtelten Gebiete

$$\mathfrak{B}_1 \succ \mathfrak{B}_2 \succ \ldots \succ \mathfrak{B}_n \succ \ldots,$$

die von $\mathfrak{B}$ durch die Querschnitte q_n abgeschnitten werden, die in Δ die Punkte $\frac{2}{3^n}$ der Seiten S_r und S_l geradlinig verbinden. Dadurch wird ein Randelement bestimmt, dem auf dem Einheitskreis ein Punkt Π entspricht. Es folgt dies ohne weiteres aus der in meiner Arbeit entwickelten Theorie der konformen Abbildung Riemannscher Flächen, die drei Punkte der Ebene unbedeckt lassen; denn nach dem dort verallgemeinerten Schwarzschen Satze müssen die Querschnitte q_n gegen einen Punkt Π des Einheitskreises konvergieren. Wir können dies übrigens auch, wie wir dies schon in der ersten Arbeit[1]) S. 16 getan haben, mit Hilfe der Ungleichung (1) schließen, indem wir das Integral über die von den Punkten $\frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{3^{n+1}}$ auf S_r und S_l gebildeten Trapeze t_n erstrecken und hierbei die u-Achse der dritten Seite von Δ parallel legen. Es folgt nämlich sofort daraus die Existenz von S_r und S_l innerhalb dieser Trapeze verbindenden Querschnitten, deren Länge mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht.

Da die Anzahl der Einschnitte, mit deren Hilfe ich aus N_k $G_k^{(r)}$ hergestellt habe, eine endliche ist, so kann ich mir leicht einen rektifizierbaren Jordanweg $\mathfrak{w}_k^{(r)}$ in $G_k^{(r)}$ herstellen, der in der gegenseitigen Nachbarschaft $\frac{1}{2^{k+1}}$ mit dem Rande von G_k und daher in der gegenseitigen Nachbarschaft $\frac{1}{2^{k-1}}$ mit T_k liegt. Ich kann dies aber beispielsweise auch so machen, daß ich $G_k^{(r)}$ auf den Einheitskreis der ζ-Ebene abbilde und für diesen Weg dann das Bild eines Kreises $r=1-\varepsilon$ in der ζ-Ebene bei genügend kleinem ε wähle. Aus $\mathfrak{w}_k^{(r)}$ entferne ich ein im Kreise $|z-P|<\frac{1}{2^k}$ liegendes Stück $\sigma_k^{(r)}$, dessen Endpunkte von außen und zwar von $\Sigma_r^{(k)}$ innerhalb dieses Kreises geradlinig erreichbar sind. Sodann nehme ich das Dreieck Δ^* her, dessen Ecken von P und zwei Punkten gebildet werden, die auf den Höhen von Δ in der Entfernung $\frac{1}{4}$ von den Eckpunkten Q_r und Q_l liegen. Aus den Seiten, die an P anschließen,

lassen wir die Stücke $S_k^{(r)}(S_k^{(l)})$ weg, die in den Trapezen t_k liege
Die Endpunkte von $S_k^{(r)}(S_k^{(l)})$ verbinden wir jetzt durch zwei Streckenzüg
in $\mathfrak{B}$ mit den Endpunkten von $\sigma_k^{(r)}(\sigma_k^{(l)})$, die im Kreise $|z-P| < \frac{1}{2^k}$ u
außerhalb Δ^* verlaufen, in Δ im Trapez t_k liegen, mit $\mathfrak{w}_k^{(r)}(\mathfrak{w}_k^{(l)})$ nur d
Endpunkte von $\sigma_k^{(r)}(\sigma_k^{(l)})$ gemein haben und einander nirgends treffe
Auf diese Weise erhalten wir auf $\mathfrak{B}$ einen Jordanquerschnitt $\mathfrak{w}$, d. h. eine
Weg, der in den Bereichen $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_n$ eine Jordankurve ist und der bei
Durchlaufen in der einen und der anderen Richtung keinen inneren Punk
von $\mathfrak{B}$ als Häufungspunkt besitzt. Bei der konformen Abbildung von
entspricht dem Wege $\mathfrak{w}$ ein Weg $\mathfrak{W}$, der im Bilde von $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_n$ ei
Jordankurve ist, und da die Bilder von $\mathfrak{B}_n$ gegen Π konvergieren, i
$\mathfrak{W}$ eine geschlossene Jordankurve.

Aus der Konstruktion von $\mathfrak{W}$ ersieht man unmittelbar, daß der recht
seitige, bzw. linksseitige Häufungsbereich von $\mathfrak{W}$ im Punkte Π bezüglic
der Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ von h_1, bzw. h_2 gebildet wird. Da d
Durchschnitt der abgeschlossen gemachten Projektionen von $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_n$[11]
aus h_1+h_2 besteht, so besteht der Häufungsbereich des Einheitskreise
(als Gebiet) im Punkte Π und demnach auch der des von $\mathfrak{W}$ bestimmte
Innengebietes aus der Vereinigungsmenge von h_1 und h_2. Da die Funk
tion $\varphi(\zeta)$ auf $\mathfrak{W}$ mit Ausnahme von Π überall analytisch ist, so ist d
Satz bewiesen.

6. Es liegt nun nahe, den Begriff des rechtsseitigen, bzw. linksseitige
Häufungsbereiches einer Jordankurve $\mathfrak{W}$ für den Fall zu erweitern, da
$f(z)$ auf $\mathfrak{W}$ gar nicht definiert ist, sondern daß $\mathfrak{W}$ der Berandung ein
auf der einen Seite von $\mathfrak{W}$ gelegenen Gebietes G angehört, innerha
dessen eine meromorphe, eindeutige Funktion definiert ist. Von dem G
biete G wollen wir verlangen, daß es für die Umgebung jedes Punkte
von $\mathfrak{W}$ „im kleinen zusammenhängend" sei, d. h. daß irgend zw
in der Nachbarschaft ϱ des Punktes P gelegene Punkte des Gebiet
durch einen in der Nachbarschaft ϱ_1 gelegenen Streckenzug des Gebiet
verbunden werden können, wobei ϱ_1 mit ϱ gegen Null geht. Durch die
Voraussetzung wird bewirkt, daß *der Häufungsbereich von G im Punkte*
ein Kontinuum (Punkt) ist. Wir geben der Jordankurve eine bestimmt
Durchlaufungsrichtung. Greifen wir nun den Punkt P_0 auf $\mathfrak{W}$ heraus, sei dan
$\mathfrak{B}(P_i)$ die abgeschlossen gemachte Vereinigungsmenge der Häufungsbereich
des Gebietes G für die Gesamtheit der Punkte P auf $\mathfrak{W}$, für die $P_i \geqq P > P_{i+1}$

---

[11]) Ich bezeichne hiermit die von $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_n$ überdeckte Punktmenge d
z-Ebene.

so bezeichnen wir als rechten Randteil von $\mathfrak{W}$ in $P_0 : r_1$ den Durchschnitt der $\bar{\mathfrak{B}}(P_i)$ für irgendeine gegen P_0 konvergierende Folge

$$P_1 > P_2 > \ldots > P_n > \ldots \to P_0. \tag{2}$$

r_1 ist von der besonderen zur Bildung verwendeten Folge unabhängig. Ist $f(z)$ auf $\mathfrak{W}$ analytisch, so ist r_1 gleich dem rechtsseitigen Häufungsbereich h_1. Entsprechend definieren wir den linken Randteil von $\mathfrak{W}$ in $P_0 : r_2$.

Die Menge r_1 ist ein Kontinuum oder ein Punkt. Es läßt sich nämlich jedem Punkte $P_k \geqq P \geqq P_{k+1}$ eine Nachbarschaft $\varrho_P \neq 0$ zuweisen, so daß $f(z)$ in G innerhalb dieser Nachbarschaft nur Werte annimmt, die von dem Häufungsbereich H_P von G in P einen Abstand $< \frac{1}{2^k}$ besitzen. Nach dem Heine-Borelschen Theorem können wir den Jordanweg $\bar{\mathfrak{W}}_k$ zwischen P_k und P_{k+1}

$$P_k \geqq P \geqq P_{k+1}$$

mit einer endlichen Anzahl von diesen Nachbarschaften überdecken, wobei wir noch annehmen können, daß ϱ_P kleiner ist als die Hälfte des Abstandes des Punktes P_0 von $\bar{\mathfrak{W}}_k$. Wir betrachten die Gesamtheit der so für alle k gewählten abzählbarvielen Nachbarschaften. Der auf derselben Seite von $\mathfrak{W}$ wie G gelegene Teil dieser Menge, der an P_1 heranreicht, ist ein zusammenhängendes Gebiet, ein an $\mathfrak{W}$ anschließender, in P_0 endender Zwickel Z_1, der für $|z - P_0| > \varepsilon$ eine nicht verschwindende Breite besitzt. Wähle ich δ genügend klein, so treten als Mittelpunkte der ausgewählten Nachbarschaften, die mit $|z - P_0| < \delta$ Punkte gemein haben, nur Punkte auf, die zwischen P_0 und dem beliebig nahe an P_0 gewählten Punkte P_j liegen. Sei nun γ_j der an P_0 heranreichende zusammenhängende Teil des Zwickels, der im Kreise $|z - P_0| < \delta$ liegt, so erhalte ich, wenn ich die Werte, die $f(z)$ in γ_j annimmt, abgeschlossen mache, ein Kontinuum $\bar{\mathfrak{H}}_j$, dessen Punkte von $\bar{\mathfrak{B}}(P_j)$ einen Abstand $< \frac{1}{2^{j-1}}$ besitzen.

Ist $\mathfrak{W}^*$ jener zusammenhängende Teil von $\mathfrak{W} > P_0$ im Kreise $|z - P_0| < \delta$, der P_0 enthält, und ist P_l der erste Punkt meiner Folge (2), der auf $\mathfrak{W}^*$ liegt, so kann ich für jeden Punkt $P : P_l \geqq P > P_0$ eine Umgebung angeben, daß deren Durchschnitt mit G in γ_j liegt. Daher enthält $\bar{\mathfrak{H}}_j$ die Menge $\bar{\mathfrak{B}}(P_l)$. r_1 ist daher der Durchschnitt der ineinandergeschachtelten Kontinuen $\bar{\mathfrak{H}}_j$ also: *r_1 ist ein Kontinuum oder ein Punkt.*

7. Jeder Weg, der innerhalb Z_1 und G gegen P_0 strebt, besitzt als Häufungsbereich eine Teilmenge von r_1. Wir können uns nun *einen gegen P_0 strebenden Jordanweg* herstellen, *auf dem $f(z)$ regulär ist und der in P_0 den Häufungsbereich r_1 besitzt.* Zu diesem Ende bestimme ich ein-

mal zu jedem Punkte P: $P_1 \geqq P > P_0$ eine Nachbarschaft $\varrho_P^* < \varrho_P$, s daß der Teil der nach der Definition des Zusammenhangs im Kleine zugehörigen Nachbarschaft ϱ_{1P}^*, der auf derselben Seite von $\mathfrak{W}$ wie liegt und an P heranreicht, ganz in Z_1 liegt. Aus diesen Nachbar schaften ϱ_P^* stelle ich mir einmal wie oben einen in Z_1 enthaltenen zu sammenhängenden Zwickel Z_1^* her. Es seien $p_1 = P_1 > p_2 > p_3 \ldots$ di Mittelpunkte der diesen Zwickel bildenden Nachbarschaften ϱ^*, von dene je zwei aufeinanderfolgende einen Teil auf $\mathfrak{W}$ gemein haben sollen.

Ich bemerke vorab, daß man r_1 auch erhält, wenn man die Häufungs bereiche des Gebietes G in den Punkten p_j, p_{j+1}, ... zu einer Menge ver einigt, diese abgeschlossen macht: $\bar{\mathfrak{v}}_j$ und dann den Durchschnitt der $\bar{\mathfrak{v}}$ aufsucht; denn $\bar{\mathfrak{v}}_j$ ist ersichtlich in einen passend bestimmten $\bar{\mathfrak{V}}(P)$ ent halten und seine passend bestimmte Nachbarschaft $\frac{1}{2^{m_j}}$, $\left(\lim_{j=\infty} m_j = \infty\right)$ enthält alle $\bar{\mathfrak{V}}(P)$ von einem bestimmten an.

Es sei jetzt $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ eine abzählbare auf r_1 überall dicht Teilmenge. Es sei Q_0 ein Punkt in $\varrho_{p_1}^*$[12]), sodann $i_1 > 1$ der erste Index so daß a_1 von dem Häufungsbereich $H_{p_{i_1}}$ einen Abstand $< \frac{1}{2}$ besitzt Q_1 ein Punkt der Nachbarschaft $\varrho_{p_{i_1}}^*$, für den $|f(Q_1) - a_1| < \frac{1}{2}$. Ich wähle dann eine Reihe von Punkten $q_1, \ldots, q_{i_1-1}$, so daß q_h in dem Durchschnitt von $\varrho_{p_h}^*$ und $\varrho_{p_{h+1}}^*$ liegt. Ich kann Q_0 mit q_1 durch einen Jordanstreckenzug in $\varrho_{1p_1}^*$, q_1 mit q_2 durch einen Jordanstreckenzug in $\varrho_{1p_2}^*$ verbinden, wobei wir darauf achten, daß diese beiden Streckenzüge nur den Punkt q_1 gemein haben. Gehen wir so weiter, so erhalten wir eine Q_0 und Q_1 verbindenden Streckenzug in Z_1 und G. Es sei dann $i_2 >$ der erste Index, so daß a_2 von dem Häufungsbereich $H_{p_{i_2}}$ einen Abstan $< \frac{1}{2^2}$ besitzt, Q_2 ein Punkt der Nachbarschaft $\varrho_{p_{i_2}}^*$, für den $|f(Q_2) - a_2| < \frac{1}{2^2}$. Ich verbinde dann wie oben Q_1 mit Q_2 durch einen Jordanstreckenzug der mit dem Q_0 und Q_1 verbindenden Jordanstreckenzug nur den Punkt Q gemein hat. Fahren wir so fort, so erhalten wir einen gegen P_0 streben den Jordanweg in Z_1 und G, dessen Häufungsbereich r_1 ist[13]), und da wi den Weg so legen können, daß er durch keinen der abzählbarvielen Pol geht, so ist unsere Behauptung bewiesen.

---

[12]) Damit soll jetzt kurz der Durchschnitt von $\varrho_{p_1}^*$ mit G verstanden werden.

[13]) Wir haben hier einen Sonderfall des auf gleiche Weise nachzuweisenden Satzes

Ist H der Häufungsbereich des in der Umgebung von P im Kleinen zusammen hängenden Gebietes G, so gibt es einen gegen P strebenden Jordanweg in G, auf der die in G meromorphe, eindeutige Funktion $f(z)$ regulär ist und dessen Häufungsbereic in P aus der Menge H besteht.

Denn r_1 ist Häufungsbereich in P_0 für das an W anschließende, G und Z_1 ge meinsame Gebiet.

8. Der Beweis des Satzes von Absatz 5 liefert sofort den Satz: *Sind r_1 und r_2 irgendzwei Kontinua — bzw. Punkte —, die zumindest einen Punkt miteinander gemein haben, so läßt sich eine in der geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{W}$ reguläre Funktion konstruieren, für die der rechte, bzw. linke Randteil des Randpunktes Π aus r_1, bzw. r_2 besteht, während der Häufungsbereich des Innengebietes von $\mathfrak{W}$ in P aus der Vereinigungsmenge von r_1 und r_2 gebildet wird.*

Denn wir können einmal das Innere der Jordankurve auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Da die Abbildung auch am Rande stetig ist, sind die Häufungsbereiche und die Randteile bezüglich einer Funktion des einen Bereiches und der durch die Abbildung in den andern Bereich verpflanzten Funktion in den entsprechenden Randpunkten gleich, so daß ich den Beweis bloß für den Kreis zu führen habe. Für diesen ergibt sich der Beweis schon daraus, daß bei der konformen Abbildung des Bereichs $\mathfrak{B}$ auf den Einheitskreis die Häufungsbereiche der Randpunkte des Einheitskreises mit Ausnahme des Punktes Π aus je einem Punkte bestehen, der der Berandung von Δ, $G_k^{(r)}$, $G_k^{(l)}$ oder der verbindenden Streifen angehört. Übrigens folgt der Satz auch sofort aus der Abbildung der dort konstruierten Jordankurve $\mathfrak{W}$ auf den Einheitskreis.

9. Vorstehenden Satz kann man folgendermaßen erweitern: *Sind r_1 und r_2 irgend zwei Kontinua — bzw. Punkte —, die zumindest einen Punkt gemein haben, sind dann $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_n^{(1)}, \ldots$ die Gebiete, die durch r_1, $\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \ldots, \gamma_m^{(2)}, \ldots$ die Gebiete, die durch r_2 bestimmt werden, so läßt sich eine im Einheitskreis reguläre, bzw. meromorphe Funktion $f(z)$ konstruieren, für die im Randpunkte Π: r_1, bzw. r_2 den rechten, bzw. den linken Randteil bilden, während der Häufungsbereich H aus der Vereinigungsmenge von r_1, r_2 und den Gebieten $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots, \gamma_{j_1}^{(2)}, \gamma_{j_2}^{(2)}, \ldots$ besteht.*

Ist der unendlich ferne Punkt in keinem der Gebiete $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots, \gamma_{j_1}^{(2)}, \gamma_{j_2}^{(2)}, \ldots$ enthalten, so gehen wir genau so wie vorher vor. Wir nehmen nur als Menge T_k die Vereinigungsmenge von r_1 mit den Gebieten $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots$, soweit sie im Kreise $|z - P| \leqq 2^k$ liegt, nachdem wir sie evtl. durch Stücke des Kreisrandes mit P zusammenhängend gemacht haben. Als Menge m_k bezeichnen wir die Gesamtheit der Punkte von N_k, — soweit sie nicht in den Gebieten $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots$ mit einem Index $\leqq k$ liegen, — die von dem Rande von N_k einen Abstand $\geqq \frac{1}{2^k}$ besitzen. Die zu vollführenden Quer- und Einschnitte, die jetzt aus Streckenzügen bestehen sollen, führen wir so, daß sie die Gebiete $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots$ mit einem Index $\leqq k$ höchstens in Teilen durchsetzen, deren Punkte vom

Rande dieser Gebiete um weniger als $\frac{1}{2^k}$ abstehen. Dies geht immer, wenn wir für A und B Punkte außerhalb H oder Punkte von r_1, bzw. r_2 nehmen, die in keinem der Gebiete $\gamma_{i_1}^{(1)}, \ldots, \gamma_{j_1}^{(2)}, \ldots$ liegen. Solche Punkte gibt es aber, da der unendlich ferne Punkt in keinem dieser Gebiete liegt. — Übrigens könnten wir diese Einschnitte auch fallen lassen. — Die konforme Abbildung des schließlich erhaltenen Bereichs $\mathfrak{B}$ liefert schon die gewünschte reguläre Funktion.

Liegt aber der unendlich ferne Punkt in einem der obenerwähnten Gebiete, etwa in $\gamma_{i_1}^{(1)}$, so nehmen wir als Menge T_k einfach die Vereinigungsmenge von r_1 mit den Gebieten $\gamma_{i_2}^{(1)}, \gamma_{i_3}^{(1)}, \ldots$ Es sei dann L_k jenes Teilgebiet der Menge der Punkte von $\gamma_{i_1}^{(1)}$, die von den Randpunkten von $\gamma_{i_1}^{(1)}$ einen Abstand $> \frac{1}{2^k}$ besitzen, das den Punkt ∞ enthält. L_k hat mit der aus T_k wie vorher gebildeten Menge $G_k^{(r)}$ keinen Punkt gemein. Wir verbinden nun $G_k^{(r)}$ mit L_k durch einen geradlinig begrenzten Streifen zum einfach zusammenhängenden Gebiet $\Gamma_k^{(r)}$ und stellen uns mit Hilfe dieser Gebiete den Bereich $\mathfrak{B}$ her. Dessen Abbildung auf den Einheitskreis liefert uns die gewünschte Funktion $\varphi(\zeta)$, die jedoch diesmal Pole besitzt.

Nach den Betrachtungen von **7.** können wir uns einen geschlossenen Jordanweg $\mathfrak{W}$ im Einheitskreis herstellen, der mit diesem nur den Punkt Π gemein hat, so daß im Punkte Π r_1, r_2, H den rechtsseitigen, bzw. linksseitigen Häufungsbereich des Weges $\mathfrak{W}$, bzw. den Häufungsbereich des von $\mathfrak{W}$ umschlossenen Gebietes bezüglich $\varphi(\zeta)$ bilden.

10. Um die durch den vorstehenden Satz ausgesprochene Tatsache mehr hervortreten zu lassen, will ich die später (**IV. 3**) erwiesene Tatsache erwähnen, daß es beispielsweise unmöglich ist, eine im Einheitskreis reguläre Funktion zu konstruieren, bezüglich der im Randpunkte Π H aus einem abgeschlossenen Vollkreis gebildet wird, während r_1 und r_2 aus der einen, bzw. der anderen Hälfte der Berandung dieses Vollkreises besteht.

Wir können nach Vorstehendem nur sagen:

Ist h ein Kontinuum, durch das die Gebiete $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ bestimmt werden, so läßt sich eine in der Jordankurve $\mathfrak{W}$ reguläre, bzw. meromorphe Funktion bilden, bezüglich der im Randpunkte Π das Innengebiet als Häufungsbereich die Vereinigungsmenge von h mit den beliebig gewählten Gebieten $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots$ besitzt, während die Vereinigungsmenge von r_1 und r_2 gleich h ist.

11. Sind so der rechte, bzw. der linke Randteil einer Jordankurve im Punkte Π nichts anderes als die Häufungsbereiche zweier an diese Kurve anschließenden, in Π endenden Zwickeln, und ist daher der Häu-

fungsbereich jedes in diesen Zwickeln gegen Π strebenden Weges eine Teilmenge von r_1 bzw. r_2[14]), so interessiert anderseits das Verhalten der Funktion in der Nähe eines Randpunktes auf solchen Wegen, die vom Innern gegen den Randpunkt streben, ohne die Randkurve im „weiteren Sinne" zu berühren. Einigen Aufschluß hierüber wird uns die Untersuchung des inneren Häufungsbereiches geben, dessen Begriff wir im nächsten Abschnitt aufstellen.

II. Der innere Häufungsbereich.

1. Es sei im Einheitskreise eine meromorphe Funktion $f(z)$ gegeben. P sei ein Randpunkt. Wir nehmen eine Folge von Winkelräumen $< \pi$ her, die den Mittelpunkt des Kreises enthalten und deren Scheitel in P liegt: $R_1, R_2, R_3, \ldots$ Dabei soll R_i in R_{i-1} derart enthalten sein, daß die Schenkel von R_i mit der Berandung von R_i nur den Punkt P gemein haben. Schließlich sollen die Schenkel von R_i für $i \to \infty$ gegen die den Kreis tangierenden Halbstrahlen im Punkte P konvergieren. Jeder dieser Winkelräume, bzw. richtiger gesagt, sein Durchschnitt mit dem Einheitskreis besitzt bezüglich $f(z)$ im Punkte P einen Häufungsbereich $H(P; R_i)$ und dabei ist

$$H(P; R_{i+1}) \succ H(P; R_i).$$

Die Vereinigungsmenge der $H(P; R_i)$ bezeichne ich als *inneren Häufungsbereich* $\mathfrak{H}(P)$. Dieser ist demnach zusammenhängend. Ersichtlich ist der innere Häufungsbereich von der zu seiner Bildung benutzten besonderen Folge der R_i unabhängig. Er enthält auch den Häufungsbereich jedes Weges, der gegen P strebt, ohne den Einheitskreis im weiteren Sinne zu berühren. *Besteht der innere Häufungsbereich aus einem einzigen Punkt, so ist dieser Konvergenzwert.*

Besitzt eine Jordankurve in einem Punkte P zwei tangierende Halbstrahlen, die einen gegen das Innere der Kurve gerichteten Winkelraum einschließen, so kann man auch hierfür den Begriff des inneren Häufungsbereiches übertragen. Bei der konformen Abbildung der Jordankurve auf den Einheitskreis besitzen aber P und der entsprechende Punkt Π infolge der etwas später nachgewiesenen Winkelproportionalität der Abbildung in solchen Randpunkten denselben inneren Häufungsbereich bezüglich einer Funktion bzw. der durch die Abbildung übertragenen Funktion. Wir können uns daher auf die Betrachtung der im Einheitskreise meromorphen

[14]) Es lassen sich leicht Beispiele konstruieren, die zeigen, daß unter Umständen, wie enge ich auch den Zwickel Z_1 an $\mathfrak{B}$ nehme, doch immer gegen P strebende Wege in Z_1 existieren können, deren Häufungsbereich im Punkte P nur eine echte Teilmenge von r_1 ist.

Funktionen beschränken und verzichten darauf, die Übertragung der Sätze auf allgemeiner berandete Gebiete eigens zu formulieren.

2. Wir wollen vorerst voraussetzen, daß die zu untersuchende Funktion $w = f(z)$ den Einheitskreis auf einen schlichten Bereich $\mathfrak{B}$ der w-Ebene abbildet. Der Häufungsbereich eines Randpunktes $H(\Pi)$, von Carathéodory Primende, von Koebe Randelement benannt, ist ein nirgends dichtes Kontinuum (Punkt), das, wie ich in meiner ersten Arbeit gezeigt habe, die Berandung eines Gebietes, das $\mathfrak{B}$ enthält, bildet. Da in jeder Umgebung eines Punktes von H erreichbare Randpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegen, deren Bildpunkte von Π beliebig wenig entfernt sind, so gehört der betreffende Punkt mindestens einem der Randteile r_1, r_2 an, d. h. *H ist gleich der Vereinigungsmenge von r_1 und r_2.*

Die Menge der Hauptpunkte, d. h. die Menge der Punkte, die auf jedem gegen Π strebenden Wege approximiert wird, ist infolge des Satzes 3 Absatz 7 des Abschnittes I, sowohl in r_1 als in r_2 enthalten, doch kann der Durchschnitt von r_1 und r_2 auch noch andere Teilmengen enthalten, ja unter Umständen mit $H(P)$ zusammenfallen, ohne daß die Menge der Hauptpunkte mit $H(P)$ zusammenfällt.

3. Wir können nunmehr den schon in der Einleitung erwähnten Satz in folgender Form aussprechen:

Der innere Häufungsbereich $\mathfrak{H}(P)$ eines Randpunktes bezüglich einer Funktion, die den Einheitskreis auf einen schlichten Bereich $\mathfrak{B}$ abbildet, wird von der Menge der Hauptpunkte gebildet.

Daraus folgt:

In diesem Falle besteht der innere Häufungsbereich aus einem Punkt oder einem Kontinuum.

Daß $\mathfrak{H}(P)$ die Menge der Hauptpunkte $h(P)$ enthält, ist selbstverständlich. Wir müssen also nur noch nachweisen, daß irgendein Punkt von H, der dem Kontinuum der Hauptpunkte nicht angehört, d. h. also daß jeder Nebenpunkt in der Menge $\mathfrak{H}(P)$ fehlt.

Wir setzen also voraus, daß die Menge $H(P)$ tatsächlich Nebenpunkte enthält, ferner, daß $H(P)$ beschränkt ist, was in unserem Falle ja keine Einschränkung bedeutet. Wir bilden dann zuerst den Einheitskreis konform auf das Quadrat ab[15]), dessen Ecken in der (x, y)-Ebene die Koordinaten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(-1, -1)$ besitzen, so daß dem Punkte P der Punkt O $(0, 0)$ entspricht. Nach dem früher Gesagten hat dann

[15]) Man könnte auch den Einheitskreis mittels einer Quadratwurzeloperation auf den durch die Halbstrahlen $y = x$, $y = -x$ $(x > 0)$ begrenzten Winkelraum abbilden.

O bezüglich der übertragenen Funktion denselben inneren Häufungsbereich wie P bezüglich der ursprünglichen Funktion.

4. Würde nun der Nebenpunkt b dem Häufungsbereich des durch die Halbstrahlen $y = kx$, $y = -kx$, $(k < 1, x > 0)$ bestimmten Winkelraumes angehören, so gibt es eine Folge von Punkten $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n, \ldots$, die im Bereiche $\mathfrak{B}$ liegen und gegen $\mathfrak{b}$ konvergieren, während ihre Bildpunkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in dem bezeichneten Winkelraum gegen O konvergieren. Da $\mathfrak{b}$ von der abgeschlossenen Menge der Hauptpunkte h einen endlichen Abstand η hat, wähle ich zwei Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ um $\mathfrak{b}$ mit den Radien ϱ, 2ϱ, wobei $\varrho < \frac{\eta}{4}$. Ich kann annehmen, daß die Folge $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n, \ldots$ in dem Kreise $\mathfrak{k}_1$ mit dem Radius ϱ liegt.

Sodann wähle ich eine Folge von Querschnitten $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, die gegen einen Hauptpunkt c konvergieren, so daß die dadurch bestimmten Teilgebiete $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n, \ldots$ ineinandergeschachtelt sind: $\mathfrak{B}_1 > \mathfrak{B}_2 > \ldots, \mathfrak{B}_n > \ldots$. und daher ihre Bilder gegen ihren gemeinsamen Randpunkt O konvergieren. Diese Querschnitte kann ich z. B. auf Kreisen um c wählen. Ich achte dabei darauf, daß in $\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_{n+1}$ stets Punkte $\mathfrak{b}_i$ enthalten sind; von diesen wähle ich immer einen aus und numeriere dann die Teilfolge der $\mathfrak{b}_i$ so um, daß in $\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_{n+1}$ gerade $\mathfrak{b}_n$ liegt. Von einem bestimmten N an liegen die q_n außer dem Kreise $\mathfrak{k}_2$; da $\lim_{n=\infty} \mathfrak{B}_n = 0$, so können wir N obendrein so groß wählen, daß $\mathfrak{B}_N < \varrho^2 \pi$.

Durch den Rand von $\mathfrak{k}_2$ wird q_n von $\mathfrak{b}_n$ getrennt. Das zusammenhängende Gebiet von $\mathfrak{B}_n$ außer $\mathfrak{k}_2$, das von q_n begrenzt wird, besitzt daher einen begrenzenden und infolge des einfachen Zusammenhanges nur einen Querschnitt auf dem Rande von $\mathfrak{k}_2$, durch den q_n innerhalb $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{b}_n$ getrennt wird. Ich bezeichne ihn mit τ_n. Das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{C}_n$ von $\mathfrak{B}_n$, das durch diesen Querschnitt begrenzt wird, enthält $\mathfrak{b}_n$. Da der Inhalt von $\mathfrak{C}_n < \varrho^2 \pi$ ist, liegen auf dem Rande von $\mathfrak{k}_1$ eine Reihe von Querschnitten, durch deren Gesamtheit τ_n von $\mathfrak{b}_n$ getrennt wird. Ich betrachte jetzt das einfach zusammenhängende Teilgebiet $\bar{\mathfrak{C}}_n$ von $\mathfrak{C}_n$ außer dem Kreise $\mathfrak{k}_1$, das von τ_n begrenzt wird. Es gibt dann einen und nur einen $\bar{\mathfrak{C}}_n$ begrenzenden Querschnitt $\sigma_{\varrho,n}$ auf dem Rande von $\mathfrak{k}_1$, durch den τ_n innerhalb $\mathfrak{C}_n$ von $\mathfrak{b}_n$ getrennt wird. Das Gebiet $\bar{\mathfrak{C}}_n$ ist möglicherweise noch nicht ganz im offenen Kreisring $\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1$ gelegen. Ich nehme nun das einfach zusammenhängende Teilgebiet ϑ_n von $\bar{\mathfrak{C}}_n$, das innerhalb $\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1$ liegt und von $\sigma_{\varrho,n}$ begrenzt wird. Gehört zu seiner Begrenzung τ_n, so bezeichne ich τ_n mit $\sigma_{2\varrho,n}$. Sonst gibt es einen und nur einen ϑ_n begrenzenden Querschnitt von $\bar{\mathfrak{C}}_n$, der τ_n und $\sigma_{\varrho,n}$ trennt. Diesen bezeichne ich mit $\sigma_{2\varrho,n}$.

Jeder in $\mathfrak{B}_n$ q_n und $\mathfrak{b}_n$ verbindende Weg durchsetzt $\sigma_{\varrho,n}$, $\sigma_{2\varrho,n}$ und besitzt ein Stück, das innerhalb ϑ_n die Ränder von $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ verbindet. Wir nehmen jetzt irgendeinen Kreis um $\mathfrak{b}$ mit dem Radius r her: $\varrho < r < 2\varrho$. Auf ihm liegen eine Anzahl von Querschnitten von ϑ_n. Unter ihnen gibt es einen, der in ϑ_n $\sigma_{\varrho,n}$ und $\sigma_{2\varrho,n}$ trennt, und der der Begrenzung des an $\sigma_{\varrho,n}$ grenzenden Teilgebietes von ϑ_n angehört, für das $|w-b|<r$. Ihn bezeichnen wir mit $\sigma_{r,n}$; $\sigma_{r,n}$ wird ebenfalls von jedem in $\mathfrak{B}_n$ q_n und $\mathfrak{b}_n$ verbindenden Weg durchsetzt, und zwar haben wir die Reihenfolge

$$q_n > \sigma_{2\varrho,n} > \sigma_{r,n} > \sigma_{\varrho,n} > \mathfrak{b}_n \text{ [16]}).$$

5. Der Berandung von ϑ_n, soweit sie nicht dem Rande des Kreisringes angehört, entsprechen, wenn n genügend groß ist, bei der Abbildung auf das Quadrat lauter Randpunkte, für die $y>0$ bzw. $y<0$ ist[17]). Würden nämlich für noch so große n der Berandung von ϑ_n sowohl Punkte der einen als auch Punkte der anderen in O endenden Quadratseite entsprechen, so gäbe es für n Querschnitte in ϑ_n, deren Bilder q_n Querschnitte des Quadrates sind, die die beiden von O ausgehenden Quadratseiten verbinden. Da $\lim_{n=\infty} \vartheta_n$ gegen Null geht, so kann ich diese Querschnitte so wählen, daß ihre Länge mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Zumindest eine Teilfolge dieser Querschnitte würde gegen einen Häufungspunkt e konvergieren, für den also $|b-e| \leqq 2\varrho$; e hat daher von der Menge der Hauptpunkte einen Abstand $>2\varrho$. Da jeder Weg, der im Quadrat von einem Punkte des Bildes von $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_n$ gegen O geht, q_n durchsetzen muß, so müßte e ein Hauptpunkt sein; denn für jeden Weg läßt sich ein n_1 so bestimmen, daß ein Punkt in $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_{n_1}$ liegt, er durchsetzt daher alle so bestimmten q_n für $n>n_1$, und unsere Funktion nimmt auf ihm in jeder Nähe von O Werte an, die sich von e um beliebig wenig unterscheiden.

Ich kann daher zumindest eine Teilfolge der ϑ_n herausgreifen, denen etwa nur Punkte der Berandung der in O endenden Quadratseite Σ entsprechen, für die $y>0$. Irgendeinem Querschnitt $\sigma_{r,n}$ entspricht ein Querschnitt $\sigma^*_{r,n}$ des Quadrates, dessen Endpunkte auf Σ liegen[18]). Der Punkt β

[16]) Für diese Reihenfolge rechnen wir bei der Durchlaufung des Weges von q_n nach $\mathfrak{b}_n$ als auf $\sigma_{R,n}$ gelegenen Punkt des Weges immer den letzten Punkt, den der Weg mit $\sigma_{R,n}$ gemein hat.

[17]) Es sei hervorgehoben, daß es wohl möglich ist, daß für bestimmte n den Randpunkten von ϑ_n Punkte auf den Quadratseiten entsprechen, für die $y>0$, während bei anderen n für die den Randpunkten von ϑ_n entsprechenden Randpunkte des Quadrates $y<0$.

[18]) Jedem Einschnitt, der gegen einen Punkt strebt, entspricht ja ein Einschnitt, der wieder gegen einen Punkt strebt.

wird durch $\sigma^*_{r,n}$ vom Bilde q^*_n des Querschnittes q_n getrennt, und da ich q^*_n im Quadrate mit O durch einen Weg verbinden kann, der $\sigma^*_{r,n}$ nicht trifft, so wird durch $\sigma^*_{r,n}$ β_n und O getrennt. Jedes $\sigma^*_{r,n}$ trifft daher die Strecke T_n, für die $x = x_n$, $y_n > y > -x_n$. x_n, y_n bezeichnen hierbei die Koordinaten von β_n. Von jedem $\sigma^*_{r,n}$ nehme ich jetzt jenen Punkt auf Σ, der O am nächsten liegt. Von diesem Punkte verfolge ich $\sigma^*_{r,n}$ bis zum ersten Schnittpunkt mit T_n und bezeichne dieses Teilstück mit $\sigma^{**}_{r,n}$. Die Gesamtheit der $\sigma^{**}_{r,n}$ liegt in einem Gebiet, das von $\sigma^{**}_{\varrho,n}$, T_n und den zwei an O stoßenden Quadratseiten begrenzt wird. Da T_n von Σ einen Abstand besitzt $\geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_n - y_n)$, also da $y_n < k x_n$, $\geqq \frac{1-k}{\sqrt{2}} x_n = \varkappa x_n$, so ist

$$l(\sigma^{**}_{r,n}) > \varkappa x_n, \tag{3}$$

wobei $\varkappa$ eine von n unabhängige Konstante ist.

6. Bezeichne ich die Funktion in $\mathfrak{B}$, die die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf das Quadrat leistet, mit $F(w)$, so haben wir entsprechend der Ungleichung (1)

$$\begin{aligned}(4)\quad \overline{\iint_{\bar{\vartheta}^{**}_n}} |F'(w)|^2 r\,dr\,d\varphi \cdot \overline{\iint_{\bar{\vartheta}^{**}_n}} r\,dr\,d\varphi &\geqq \Big(\int \Big(\int_{\bar{\vartheta}^{**}_n} |F'(w)|\,r\,d\varphi\Big)\,dr\Big)^2 \\ &\geqq \Big(\int_{\varrho}^{2\varrho}\Big(\int_{\bar{\sigma}^{**}_{r,n}} |F'(w)|\,r\,d\varphi\Big)\,dr\Big)^2 \\ &> \varkappa^2 \varrho^2 x_n^2;\end{aligned}$$

$\bar{\vartheta}^{**}_n$ bezeichnet hierbei die von den Bildern von $\sigma^{**}_{r,n}$ in $\mathfrak{B}$, den $\bar{\sigma}^{**}_{r,n}$ gebildete Teilmenge von ϑ_n. Ich kann nun n so groß wählen, daß der Inhalt von ϑ_n kleiner ist als $\frac{\varkappa^2 \varrho^2}{\nu}$, wobei ν eine beliebig große Zahl ist. Dann folgt aus (4)

$$\overline{\iint_{\bar{\vartheta}^{**}_n}} |F'(w)|^2 r\,dr\,d\varphi > \nu x_n^2. \tag{5}$$

Daraus folgt, da der Teil des Quadrates, für den $x \leqq X$, den Inhalt X^2 besitzt, daß ϑ^{**}_n, das Bild von ϑ^{**}_n, und daher $\sigma^{**}_{\varrho,n}$ Punkte besitzt, für die $x > \sqrt{\nu}\, x_n$. Da die $\sigma^*_{r,n}$ alle in dem durch $\sigma^*_{\varrho,n}$ bestimmten Teilgebiet des Quadrates liegen, das β_n nicht enthält, so trifft die Gerade $x = \sqrt{\nu}\, x_n$ alle $\sigma^*_{r,n}$, und jedes $\sigma^*_{r,n}$ enthält daher ein Stück $\tilde{\sigma}^*_{r,n}$, das diese Gerade mit der Geraden $x = x_n$ verbindet und dabei ganz in dem durch diese beiden Geraden begrenzten Streifen $\mathfrak{E}$ des Quadrates liegt. Dabei ist

$$l(\tilde{\sigma}^*_{r,n}) \geqq (\sqrt{\nu} - 1)\, x_n. \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit ϑ_n die Menge der Punkte der $\sigma_{r,n}$, deren Bildpunkte ϑ_n^* im Streifen $\mathfrak{E}$ liegen — ihr äußerer Inhalt ist als der einer Teilmenge von $\vartheta_n < \frac{\varkappa^2 \varrho^2}{\nu}$ —, so folgt

$$(7)\quad \overline{\iint_{\vartheta_n}} |F'(w)|^2 r\,dr\,d\varphi \cdot \overline{\iint_{\vartheta_n}} r\,dr\,d\varphi \geqq \Big(\int\Big(\int_{\vartheta_n} |F'(w)|\,r\,d\varphi\Big)\,dr\Big)^2$$

$$\geqq \Big(\int_{\varrho}^{2\varrho}\Big(\int_{\bar{\sigma}_{r,n}} |F'(w)|\,r\,d\varphi\Big)\,dr\Big)^2$$

$$\geqq (\sqrt{\nu}-1)^2 \varrho^2 x_n^2.$$

Da aber die Menge ϑ_n^*, deren äußeres Maß durch $\overline{\iint_{\vartheta_n}} |F'(w)|^2 r\,dr\,d\varphi$ gegeben wird, in dem Streifen $\mathfrak{E}$ enthalten ist, der den Inhalt $(\nu-1)x_n^2$ besitzt, würde aus (7) die Gleichung folgen

$$(8)\quad (\nu-1)x_n^2 \cdot \frac{\varkappa^2\varrho^2}{\nu} \geqq (\sqrt{\nu}-1)^2 \varrho^2 x_n^2,$$

die schon falsch ist, wenn ich die Zahl ν, die ich beliebig groß wählen kann, größer wähle als $(1+\varkappa)^2$. Wir sind damit zu einem Widerspruch gekommen, nnd damit ist der Satz erwiesen.

7. Wir wollen noch einen Sonderfall des Satzes besonders hervorheben:

Wenn $f(z)$ den Einheitskreis auf einen schlichten Bereich abbildet, so konvergiert $f(z)$, wenn es einen im Randpunkte P endenden Weg gibt, auf dem es gegen a strebt, auf allen den Einheitskreis im weiteren Sinne nicht berührenden Wegen, die in P enden, gegen a.

In diesem Falle besteht nämlich die Menge der Hauptpunkte aus dem Punkte a.

8. Die in vorstehendem entwickelte Methode besitzt aber eine viel größere Tragweite. So können wir ohne weiteres den Satz aussprechen:

Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, daß sich um den Randpunkt P des Einheitskreises eine Umgebung abgrenzen läßt, so daß $f(z)$ in dem Durchschnitt U dieser Umgebung mit dem Einheitskreis regulär und das Integral $\iint_U |f'(z)|^2\,dx\,dy$ endlich ist, so fällt bezüglich des Einheitskreises im Punkt P der innere Häufungsbereich mit der Menge der Hauptpunkte zusammen[18a]).

[18a]) Es sei $q(w)$ das Abbildungsverhältnis bei einer konformen Abbildung der schlichten w-Ebene auf die schlichte Kugel, so genügt es, vorauszusetzen, daß $\iint_U |q(w)\frac{du}{dz}|^2\,dx\,dy$ endlich ist.

Für den Beweis ist es nur notwendig zu wissen, daß die Menge der Hauptpunkte abgeschlossen ist und daß mindestens ein Hauptpunkt existiert. Das eine ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Menge der Hauptpunkte als Gesamtheit der Punkte, die auf jedem gegen P gehenden Weg approximiert werden. Die Existenz mindestens eines Hauptpunktes erschließen wir, wie ich dies schon in [1]) getan, folgendermaßen: Ich betrachte die Querschnitte des Kreises, die auf den Kreisbögen $|z-P|=\varrho$ liegen. Die Ungleichung

$$(1)' \qquad \iint |f'(z)|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \cdot \iint \varrho\, d\varrho\, d\varphi \geqq \left(\int d\varrho \int |f'(z)|\varrho\, d\varphi\right)^2,$$

über die im Einheitskreis liegende Nachbarschaft r des Punktes P genommen, zeigt, daß in jeder Nähe von P derartige Kreisquerschnitte vorhanden sind, deren Bilder eine Länge besitzen, die unter einer vorgegebenen Grenze liegt. Ich kann mir eine Folge solcher Querschnitte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ herstellen, die gegen P konvergieren, während die Länge ihrer Bilder $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n, \ldots$ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Da jeder gegen P strebende Weg alle q_n von einem bestimmten durchsetzen muß, ist jeder Häufungspunkt der $\mathfrak{q}_n$, d. h. jeder Punkt, in dessen jeder Umgebung Punkte von unendlich vielen $\mathfrak{q}_n$ liegen — und solche gibt es —, Hauptpunkt. Aus der Endlichkeit von $\iint_U |f'(z)|^2\, dx\, dy$ folgt ferner, daß $\lim_{n=\infty} \mathfrak{B}_n = 0$.

Besteht die Menge der Hauptpunkte aus der ganzen Ebene, und dies ist möglich, wie das Beispiel von Absatz 21 zeigt, so ist der Satz selbstverständlich. Einige Worte haben wir nur noch über den Fall zu verlieren, daß der Punkt b, der zwar dem Häufungsbereich $H(P)$, doch nicht der Menge der Hauptpunkte angehört, der Punkt ∞ ist. Wir bringen dann diesen Punkt durch eine lineare Transformation in eine endliche Lage $\bar{b}$ der $\bar{w}$-Ebene und können dann ϱ so klein bestimmen, daß in dem Kreise $|\bar{w}-\bar{b}|<2\varrho$ die Ungleichheit $\left|\frac{d\bar{w}}{dw}\right|<1$ gilt. Bezeichnen wir die Teile von U, die den Punkten der $\bar{w}$-Ebene, für die $|\bar{w}-\bar{b}|<2\varrho$, entsprechen, mit V, so haben wir

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_V \left|\frac{d\bar{w}}{dz}\right|^2 dx\, dy &= \iint_V \left|\frac{d\bar{w}}{dw}\right|^2 \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\, dy \\ &\leqq \iint_V |f'(z)|^2\, dx\, dy \leqq \iint_U |f'(z)|^2\, dx\, dy \end{aligned} \right.$$

und daraus schließen wir wieder wie früher die zum Beweise nötigen Eigenschaften von ϑ_n.

Nach der Verallgemeinerung des Picardschen Theorems kann hier

wie in **9.** höchstens ein Konvergenzwert auftreten. *Der etwaige Konvergenzwert* ist dann ersichtlich *der einzige Hauptpunkt.* Umgekehrt folgt aus unserem Satze, *daß, wenn nur ein Hauptpunkt existiert, dieser Konvergenzwert ist.*

Sodann folgt aus dem Satze, da $\mathfrak{H}(P)$ zusammenhängend ist:

Die Menge der Hauptpunkte ist unter diesen Voraussetzungen ein Punkt oder ein Kontinuum[19]).

9. Insbesondere gilt der Satz:

Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, daß sich um den Randpunkt P des Einheitskreises eine Umgebung so abgrenzen läßt, daß $f(z)$ in dem Durchschnitt U dieser Umgebung mit dem Einheitskreis meromorph ist und daß jeder Wert von $f(z)$ in U höchstens N-mal[20]) *angenommen wird, so fällt bezüglich des Einheitskreises im Punkte P der innere Häufungsbereich mit der Menge der Hauptpunkte zusammen.*

Wird nämlich der Wert a N-mal angenommen, so gibt es eine kreisförmige Umgebung von a, die von den Bildern gewisser Umgebungen der dem Punkte a in U entsprechenden Punkten genau N-mal bedeckt werden. Verkleinere ich die Umgebung von P so, daß das betreffende $\bar{U}$ keinen Punkt dieser Umgebungen bedeckt, so läßt also das durch $f(z)$ gelieferte Bild von $\bar{U}$ ein Gebiet unbedeckt. Durch eine lineare Transformation werfe ich a nach ∞ und die entsprechende lineare Funktion $f^*(z)$ von $f(z)$ ist jetzt beschränkt und nimmt jeden Wert höchstens N-mal an. Daher ist $\int\int_{\bar{U}} |f^{*\prime}(z)|^2 \, du\, dv$ beschränkt, der Satz gilt daher für $f^*(z)$ und demnach auch für $f(z)$.

10. Über den Häufungsbereich $H(P)$ und daher auch über die Menge der Hauptpunkte in diesem Falle läßt sich noch aussagen:

Der Häufungsbereich $H(P)$ besteht aus einem Punkt oder einem nirgends dichten Kontinuum, falls $f(z)$ in U jeden Wert höchstens N-mal annimmt. Es braucht nur mehr nachgewiesen zu werden, daß die Menge nirgends dicht ist. Würde sie nämlich die volle Umgebung ϱ eines Punktes enthalten und werden die Werte der Umgebung ϱ in U höchstens $\bar{N}$-mal angenommen, wobei $\bar{N}$ so bestimmt ist, daß ein Wert a^* tatsächlich $\bar{N}$-mal angenommen wird, so kann ich wie oben eine Umgebung von P bestimmen, daß in ihr die Werte einer gewissen Umgebung von a^* nicht angenommen

---

[19]) Wenn man den Satz von **3.** beweist, schließt man auf diese Art auch bei der Abbildung eines schlichten Bereiches am einfachsten, daß die Menge der Hauptpunkte ein Kontinuum ist.

[20]) Wir denken uns N so bestimmt, daß tatsächlich ein Wert a N-mal angenommen wird.

werden. Daher kann wider die Voraussetzung a^* nicht dem Häufungsbereich von P angehören.

11. Die entwickelte Methode leistet aber noch bedeutend mehr. Es genügen z. B. auch dafür, daß der Nebenpunkt b dem inneren Häufungsbereich P nicht angehört, folgende Vorausetzungen:

Es läßt sich eine gegen P konvergierende Folge von Umgebungen von P: $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ angeben und eine Folge von Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \to 0, \ldots$ bestimmen, so daß sich für jeden Weg auf $\mathfrak{R}$, dessen entsprechender Weg in U_n einen Punkt, für den $|f(z) - b| < \sigma_n$, mit P verbindet, ein von ihm durchsetztes Rechteck mit dem Seitenverhältnis $< \frac{1}{n}$ [21]) finden läßt, so daß auf den beiden kürzeren Seiten Querschnitte $\sigma_{a,n}, \sigma_{b,n}$ von $\mathfrak{R}$ liegen, deren jeder P und den Anfangspunkt des Weges b_n trennt. Obendrein soll unser Rechteck einen schlichten Teilbereich ϑ_n [22]) von $\mathfrak{R}$ enthalten, dessen Berandung, soweit sie nicht der Berandung von $\mathfrak{R}$ angehört, durch Querschnitte auf den kürzeren Rechtecksseiten gebildet wird, unter denen immer $\sigma_{a,n}$, $\sigma_{b,n}$ auftreten. Der Berandung von ϑ_n, soweit sie der Berandung von $\mathfrak{R}$ angehört, sollen Teile des Einheitskreises auf einer Seite von P, nicht aber zugleich auf beiden, entsprechen.

Legen wir hier die $\mathfrak{u}$-Achse in eine kürzere, die $\mathfrak{v}$-Achse in eine längere Seite des Rechtecks, so haben wir Ungl. (10) zu benutzen

$$\overline{\iint}_{\vartheta_n} |F'(w)|^2 \, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} \cdot \iint_{\vartheta_n} d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} \geqq \left(\int_\alpha^\beta d\mathfrak{v} \int |F'(w)|\, d\mathfrak{u}\right)^2 \tag{10}$$

und erhalten entsprechend der Ungl. (5)

$$\overline{\iint}_{\vartheta_n^{**}} |F'(w)|^2 \, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} > \varkappa^2 n\, x_n^2 \text{ [23])} \tag{11}$$

und von hier aus gelangen wir wie in **6.** mit nochmaliger Verwendung von (10) zu dem erstrebten Widerspruch.

12. Die Entwicklung des letzten Absatzes gibt uns die Möglichkeit, durch Konstruktion entsprechender, einfach zusammenhängender Bereiche uns von gewissen Vorkommnissen zu überzeugen. So haben wir den Satz:

Sind H, h zwei beliebige Kontinua — bzw. Punkte —, von denen h in H enthalten ist, so läßt sich eine im Einheitskreis reguläre Funktion

---

[21]) Oder aber ein Rechteck, dessen Seiten die Längen d_n, d_n^2 besitzen, lim $d_n = 0$.

[22]) Durch diese Bezeichnung soll *nicht* gesagt werden, daß für alle diesbezüglichen Wege in U_n *ein* Rechteck bestimmt werden kann; dieses Rechteck und daher ϑ_n hängt vom Wege ab.

[23]) Bei Verwendung der in der Fußnote [21]) angegebenen Rechtecke

$$\iint > \frac{\varkappa^2}{d_n} x_n^2.$$

konstruieren, so daß im Punkte P der Häufungsbereich $H(P) = H$ während der innere Häufungsbereich $\mathfrak{H}(P)$ gleich der Menge der Haupt punkte $= h$ ist.

Ich kann annehmen, daß h den Nullpunkt O der w-Ebene ent hält, t_k sei die evtl. durch Stücke des Kreisrandes mit O zusammen hängend gemachte Teilmenge von h, die im Kreise $|w| \leqq 2^k$ liegt m_k sei die Gesamtheit der Punkte, die von t_k einen Abstand $> \frac{1}{2^{k-}}$ haben, und n_k die Menge der Punkte, die von m_k einen Abstand $> \frac{}{2}$ besitzen. Das zusammenhängende Gebiet n_k enthält t_k und ist von endlicher Zusammenhangszahl[24]), läßt sich daher durch endlich viele geradlinige Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich n_k^* verwandeln. Ich verbinde nun nacheinander die n_k^* zu einem einfach zusammenhängenden Bereich, indem ich in $n_{\varkappa-1}^*$ und in $n_\varkappa^*$ je einen neuen Einschnitt mache und den einen Rand des einen mit einem Rande des anderen durch einen geradlinig begrenzten Streifen S_k verbinde, der ein Rechteck von den Seitenlängen d_k, d_k^2 enthält, $\lim_{\varkappa=\infty} d_\varkappa = 0$, so daß die längeren Seiten der Berandung des Streifens angehören, während die kürzeren Querschnitte darstellen, die $n_{\varkappa-1}^*$ und $n_\varkappa^*$ trennen[25]). — Derartige Streifen will ich als normierte Verbindungsstreifen bezeichnen[26]). — Der Streifen S_k soll obendrein über der Menge $n_\varkappa$ liegen. Es sei weiter $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ eine abzählbare, überall dichte Menge von Punkten von h. Ich kann es stets durch zwei Einschnitte in $n_\varkappa^*$ erreichen, daß jeder Weg in $n_\varkappa^*$, der $S_\varkappa$ und $S_{\varkappa-1}$ verbindet, von P_k um weniger als $\frac{}{2}$ entfernt ist. Diesen auf die angegebene Art gewonnenen Bereich bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$. Bilden wir $\mathfrak{A}$ auf den Einheitskreis ab, so entsprechen den Punkten des Einheitskreises mit Ausnahme des Punktes Π je ein Punkt der Berandung von $\mathfrak{A}$, während der Häufungsbereich von Π gleich h ist. Wähle ich auf der Berandung von n_1^* einen festen Punkt, so kann ich dementsprechend einen rechten und linken Teil der Berandung von $\mathfrak{A}$ unterscheiden.

Schließlich stellen wir uns, wie wir uns aus h n_k^* verfertigten, aus N_k^* her. Den Bereich $\mathfrak{B}$ erhalten wir, indem wir N_k^* und n_k^* durch einen normierten Verbindungsstreifen $\bar{S}_k$ verbinden, den wir, da N_k n_k überdeckt

---

[24]) Vgl. I. 5.

[25]) An der Stelle würden wir auskommen, wenn der Streifen S_k ein entsprechendes Quadrat von der Seitenlänge d_k, $\lim d_k = 0$, enthielte.

[26]) Jeder „Streifen" ist selbstverständlich ein einfach zusammenhängendes Gebiet und schließt sich längs eines eines einzigen Randstückes an die eine und eben längs eines einzigen Randstückes an die andere der zu verbindenden Mengen.

ɔ einrichten können, daß er über der Nachbarschaft $\frac{1}{2^k}$ von n_k liegt und on einem Einschnitt, den wir an N_k^* anbringen, zur rechten oder zur nken Berandung von n_k^* führt. Bei der Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf en Einheitskreis entsprechen allen Punkten außer Π' je ein Punkt der Berandung von $\mathfrak{B}$, während im Punkte Π' die im Einheitskreis reguläre Abbildungsfunktion $w = f(z)$ H als Häufungsbereich, h als inneren Häufungsbereich und als Menge der Hauptpunkte hat.

13. *Sind r_1 und r_2 zwei Kontinua (bzw. Punkte), deren Durchschnitt as Kontinuum (bzw. den Punkt) h enthält, sind dann $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_n^{(1)}, \ldots$ ie Gebiete, die durch r_1, $\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \ldots, \gamma_m^{(2)}, \ldots$ die Gebiete, die durch r_2 n der Komplementärmenge bestimmt werden, so gibt es eine im Einheitsreis reguläre bzw. meromorphe Funktion, für die im Randpunkt Π r_1 zw. r_2 den rechten bzw. den linken Randteil, h den inneren Häufungsereich und die Menge der Hauptpunkte bilden, während der Häufungsereich H aus der Vereinigungsmenge von r_1, r_2 und den Gebieten $\gamma_{i_1}^{(1)}, \gamma_{i_2}^{(1)}, \ldots, \gamma_{j_1}^{(2)}, \gamma_{j_2}^{(2)}, \ldots$ besteht.*

Für den Beweis dieses Satzes haben wir nur die Bereiche $G_k^{(r)}$, $G_k^{(l)}$ zw. $\Gamma_k^{(r)}$, $\Gamma_k^{(l)}$ wie in **I. 9.** zu konstruieren und die $G_k^{(r)}$ ($\Gamma_k^{(r)}$) durch norierte Verbindungsstreifen $S_k^{(r)}$ an den rechten Rand, die $G_k^{(l)}$ ($\Gamma_k^{(l)}$) an en linken Rand des wie im vorigen Absatz konstruierten Teilbereichs $_k^*$ von $\mathfrak{A}$ anschließen. Wir achten noch dabei darauf, daß $S_k^{(r)}$ bzw. $S_k^{(l)}$ ber der Nachbarschaft $\frac{1}{2^k}$ von n_k liegt. Dies ist möglich, da r_1, r_2, h emeinsame Punkte haben.

14. Bevor wir weitergehen, wollen wir einen Hilfssatz ableiten:

Wird durch Querschnitte, deren Projektionen in den Berenzungsgeraden des Parallelstreifens Σ liegen, ein einfach usammenhängender Teilbereich ϑ von der Riemannschen Fläche $\mathfrak{B}$ abgetrennt[27]) und ist der Inhalt der Projektion von ϑ endich, so konvergiert das Bild jedes Einschnittes von ϑ, der egen einen Innenpunkt von Σ strebt, bei der konformen Abbilung von $\mathfrak{B}$ auf den Einheitskreis gegen einen Randpunkt.

Dazu bemerke ich zuerst: Sei q ein regulärer Punkt eines $\mathfrak{v}$-Querchnittes — so bezeichne ich einen Querschnitt, für den $\mathfrak{v} =$ konst., wobei , $\mathfrak{v}$ die rechtwinkligen Parallelkoordinaten eines Systems sind, dessen -Achse parallel der Begrenzung von Σ ist —, so läßt sich in jeder beliebigen Tähe des Punktes q auf $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{v}$-Querschnitt finden, dessen Bild ein Quer-

[27]) Einen derartigen Bereich bezeichnen wir kurz als Teilbereich von $\mathfrak{B}$ ber Σ.

schnitt des Kreises ist, der in beiden Richtungen konvergiert. Um $q = (u_0, v_0)$ läßt sich eine reguläre Umgebung ϱ auf $\mathfrak{B}$ herstellen. Wir betrachten in ihr die Strecke $S: u = u_0$, $|v - v_0| < \varrho$. Liegt q auf einer Begrenzungsgeraden von Σ, so nehme ich als S den offenen, über Σ liegenden Teil der durch die vorstehenden Ungleichungen bezeichneten Strecke. Durch jeden Punkt dieser Strecke läßt sich ein v-Querschnitt legen, und zwar nur einer, wenn auf ihm keiner der abzählbar vielen Windungspunkte von $\mathfrak{B}$ liegt. Liegt auf ihm eine Windungsstelle, so rechne ich von ihm nur die Gesamtheit der regulären Punkte, die auf ihm mit der Strecke S zusammenhängt. Man zeigt leicht, daß die Punktmenge D, die von der Gesamtheit der Punkte dieser Querschnitte gebildet wird, eine zusammenhängende offene Punktmenge auf $\mathfrak{B}$ ist, die die w-Ebene einfach überdeckt. Sie ist daher meßbar und ihr Maß ist kleiner als das Maß der Projektion von ϑ. Da

$$\iint_D |F'(w)|^2 du\, dv < \iint_{\mathfrak{B}} |F'(w)|^2 du\, dv = \pi,$$

so folgt daher aus Ungl. (1), daß $\int_{v_0-\varrho}^{v_0+\varrho} dv \int_{q(v)} |F'(w)|\, du$ endlich ist, und da $\int_{q(v)} |F'(w)|\, du$ die Länge des Bildes des Querschnittes $q(v)$ darstellt, so kann diese Länge nur in einer Nullmenge unendlich sein. Ist aber die Länge eines rektifizierbaren[28]) Querschnittes des Kreises endlich, so konvergiert er in beiden Richtungen gegen Randpunkte, von denen sich in unserem Falle leicht zeigen ließe, daß sie verschieden sind.

Σ' sei ein Parallelstreifen, dessen Begrenzungsgeraden im Innern von Σ liegen; Q ein Punkt von ϑ, der über Σ' liegt. Es sei nun σ ein begrenzender Querschnitt, der über der Grenzgeraden $v = a$ von Σ liegt. Ist $q = (u_0, a)$ ein regulärer Punkt dieses Querschnittes und ϱ der Radius einer regulären Kreisumgebung von q, so bilde ich mir einen σ und Q verbindenden Weg $\mathfrak{W}^*$, indem ich Q mit dem Punkte $u = u_0$, $v = a + \varrho^2$ durch $\mathfrak{W}$ ganz in ϑ verbinde und die Strecke $u = u_0$ $a < v < a +$ hinzufüge. Da $\mathfrak{W}$ ganz im Innern von ϑ liegt und in ϑ eine abgeschlossene Menge ist, so ist für $\mathfrak{W}$ $|v - a| > \eta$. Betrachte ich jetzt das zusammenhängende Teilgebiet von ϑ, das an σ grenzt und für das $|v - a| < \eta' <$ Die Grenze von diesem Teilgebiet enthält einen v-Querschnitt, für den $v = a + \eta'$ und der in ϑ σ und Q trennt. Dieser Querschnitt muß $\mathfrak{W}$ und daher die Strecke $u = u_0$, $a < v < a + \eta$ treffen. Daher gibt nach obigem immer in $\Sigma - \Sigma'$ gelegene Querschnitte, die Q und σ trennen

---

[28]) Wir bezeichnen einen Querschnitt als rektifizierbar, wenn jede innere zusammenhängende Teilmenge desselben rektifizierbar ist.

[29]) Durch entsprechende Orientierung des Koordinatensystems bewirke ich, daß dieser Punkt über Σ liegt.

nd deren Bild ein Querschnitt des Einheitskreises ist, der beiderseits egen Randpunkte konvergiert.

Ersetzen wir so nach und nach alle Querschnitte über den Begrenzungs-eraden von Σ durch derartige Querschnitte, so erhalten wir einen Teil-ereich von $\vartheta : \tilde{\vartheta}$, der Q enthält und der aus ϑ durch Querschnitte ent-teht, die über $\Sigma - \Sigma'$ liegen. Die Bilder dieser Querschnitte können n Innern des Einheitskreises keinen Häufungspunkt haben, d. h. es ann keinen Innenpunkt geben, in dessen Nähe Punkte von unendlich iel verschiedenen Querschnitten vorkommen. Nehme ich eine kreisförmige Umgebung eines regulären Punktes oder eines Windungspunktes, so scheidet ie sich bei Einführung eines der Querschnitte σ, die $\tilde{\vartheta}$ begrenzen, genau n zwei Teile, deren einer durch σ von Q getrennt wird; daher kann ede derartige Umgebung höchstens ein Querschnitt σ durchsetzen und so äßt sich zu jedem Bildpunkt eines Punktes von ϑ eine Umgebung an-eben, die nur vom Bilde eines σ-Querschnittes durchsetzt wird.

Daraus schließen wir, daß die Berandung des Bildgebietes von $\tilde{\vartheta}$ eine us Teilen des Einheitskreises und den Bildern der σ-Querschnitte be-tehende Jordankurve ist. Daher konvergiert nach dem Schwarzschen emma jedes Bild eines Einschnittes von $\tilde{\vartheta}$, der gegen einen Punkt c trebt, gegen einen Punkt dieser Jordankurve; liegt der Punkt c in Σ', o konvergiert das Bild des Einschnittes gegen einen Punkt des Einheits-reises. Da wir Σ' beliebig in Σ und Q beliebig in ϑ über Σ' wählen lurften, so ist hiermit der Beweis unseres Hilfssatzes erbracht.

Aus unseren Betrachtungen folgt sofort, wenn der Berandung von ϑ m Innern von Σ ein P entsprechender Punkt angehört, so gehören der Berandung von ϑ sowohl Punkte über Σ an, deren Bilder auf dem rechts, ls auch Punkte, deren Bilder auf dem links an P stoßenden Kreisbogen iegen.

15. Wir können jetzt folgendes aussagen:

Ist b ein Nebenpunkt des Häufungsbereiches von P, läßt sich dann ine Umgebung U von P und eine Folge von Nachbarschaften ϱ_N von b erstellen, daß jedem Weg, der im Einheitskreis in U einen Punkt, für len $|f(z) - b| < \varrho_N$ $\lim_{N=\infty} \varrho_N = 0$, mit P verbindet, auf der durch $w = f(z)$ elieferten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ über der w-Ebene ein Weg entspricht, er Σ in einem von abzählbarvielen Teilbereichen $\vartheta_n n > N$ von $\mathfrak{R}$ über Σ lurchsetzen muß[30]), liegen obendrein auf der Berandung von ϑ_n keine unkte, die der Berandung des einen der an P stoßenden Kreisbogen Λ_n

[30]) D. h. auf jedem dieser Wege durchläuft bei der wie vorher vorgenommenen estimmung des Koordinatensystemes v die Werte $\alpha < v < \beta$, wobei α, β den Grenz-eraden entsprechen.

angehören und ist $\lim_{n=\infty} \vartheta_n = 0$, so gehört b dem inneren Häufungsbereic
von P nicht an; Λ_n braucht nicht für alle n den gleichen der beide
an P stoßenden Kreisbogen zu bedeuten.

Wir können den Streifen Σ nach unserem Hilfssatze durch eine
inneren Parallelstreifen Σ' ersetzen, so daß die Bilder jedes $\mathfrak{v}$-Querschnitte
jedes der Bereiche ϑ_n' — und zwar sowohl der in Σ' als auch derer, di
auf der Berandung von Σ' die Bereiche ϑ_n' abgrenzen — beiderseits gege
Randpunkte des Kreises konvergieren, die von P verschieden sind. W
haben sodann von der Ungleichung (10) Gebrauch zu machen.

16. Im vorstehenden kann die Voraussetzung, daß $\lim_{n=\infty} \vartheta_n = 0$ durc
die geringere ersetzt werden, daß der Inhalt der Projektion von ϑ_n i
der w-Ebene mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Wenn wir die überflüssigen ϑ' weg
lassen, so trennt das Bild ϑ_n^* von ϑ_n' im Einheitskreis einen Punkt β
des Einheitskreises, dessen Bildpunkt in einer bestimmten Nachbarscha
des Punktes b liegt, von dem Randpunkt P. Ich verbinde β_n mit P i
Kreise etwa durch einen Kreisbogen, der durch keinen der abzählba
vielen Punkte geht, denen Windungsstellen des Bereiches $\mathfrak{R}$ entsprechen
Diesem Kreisbogen entspricht ein Weg $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{R}$, der in ϑ_n' analytisch
ist und von dem ein zusammenhängendes Stück $\mathfrak{W}$ alle analog der
Absatz 4 gebildeten $\sigma_{\gamma,n}$ durchsetzt. Gleichzeitig läßt sich eine Größe
so bestimmen, daß eine unverzweigte Nachbarschaft δ von $\mathfrak{W}$, die au
lauter regulären Punkten besteht, ebenfalls dem Bereiche ϑ_n angehör
Alle $\sigma_{\gamma,n}$ in ϑ_n' müssen daher länger als 2δ sein. Da $\overline{\mathfrak{W}}$ als analytisch
Kurve nur endlich viele relative Extreme bezüglich der u-Achse in der
ϑ_n durchsetzenden Stücke besitzt, so zerfällt die Menge der $\sigma_{\gamma,n}$ höchste
in endlich viele zusammenhängende Teilmengen M_i. Ist nämlich $\mathfrak{W}^*$ ei
Teilstück von $\mathfrak{W}$, das in ϑ_n' die über den beiden Grenzgeraden von Σ
liegenden $\sigma_{\alpha,n}$, $\sigma_{\beta,n}$ verbindet, so muß $\sigma_{\gamma,n}$ als Querschnitt von ϑ_n' a
$\mathfrak{v} = \gamma$, der $\sigma_{\alpha,n}$, $\sigma_{\beta,n}$ trennt und der Begrenzung des an $\sigma_{\alpha,n}$ grenze
den Teilgebietes, für das $\mathfrak{v} < \gamma$, angehört, $\mathfrak{W}^*$ durchsetzen. Sind nu
$l_1, l_2, \ldots, l_m$ die endlich vielen, in der Richtung von $\sigma_{\alpha,n}$ nach $\sigma_{\beta,n}$ au
einanderfolgenden, bezüglich $\mathfrak{v}$ monotonen Teilstücke von $\mathfrak{W}^*$ und treffe
$\sigma_{\gamma_1,n}$ und $\sigma_{\gamma_2,n}$ $(\gamma_1 < \gamma_2)$ l_i, so schneiden alle $\sigma_{\gamma,n}$ für $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ d
Stück l_i, wie aus ihrer Definition folgt. Für jede größte zusamme
hängende Menge M_j der $\sigma_{\gamma,n}$ gilt $\gamma^* < \gamma \leqq \gamma^{**}$. Lasse ich $\sigma_{\gamma^{**},n}$ weg u
rechne ich von den abzählbarvielen Querschnitten, die durch Windung
punkt von $\mathfrak{R}$ gehen, nur die offene zusammenhängende Teilmenge d
regulären Punkte, die den Schnittpunkt mit l_i enthält, so erhalten w
eine offene Punktmenge, die die w-Ebene einfach überdeckt. Sie entste

us M_i durch Entfernung einer Nullmenge. Daher ist die Gesamtheit der unkte, die den $\sigma_{\gamma,n}$ angehören, eine meßbare Punktmenge ϑ_n^0, und da e die w-Ebene nur einfach überdeckt, ist ihr Maß kleiner als das Maß er Projektion von ϑ_n und geht dab' mit $\frac{1}{n}$ gegen Null. Die im Beeise des in **15.** ausgesprochenen Satzes auftretenden Teilmengen von ϑ_n' nd aber derartige ϑ_n^0[31]).

17. Die vorstehenden Sätze geben Anlaß zu einer Reihe von Folgeungen:

Ist der Häufungsbereich H des Punktes P beschränkt, besitzt H im Parallelstreifen Σ das Maß Null und liegt schließlich in Σ kein Punkt von r_2, so liegt der innere Häufungsbereich ganz auf der Seite des Parallelstreifens, auf der die Menge r_2 liegt. Der Begrenzungsgeraden on Σ auf dieser Seite können wohl Punkte von $\mathfrak{H}(P)$ angehören.

Wir ersetzen zuerst den Einheitskreis durch eine in ihm liegende geschlossene Jordankurve $\mathfrak{W}$, die im Punkte P den Einheitskreis berührt nd deren Innengebiet im Punkte P das gleiche r_1, r_2, H, $\mathfrak{H}$ besitzt wie er Einheitskreis[32]). Eine derartige Kurve läßt sich nach den Ausführungen von **I. 9.** stets herstellen. Die dem Innengebiet G entsprechende Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$, ein Teilgebiet der dem Einheitskreis entsprechenden Fläche $\mathfrak{R}$, ist dann so beschaffen, daß jedem gegen einen Punkt onvergierenden Einschnitt von $\mathfrak{R}^*$ ein Einschnitt von G entspricht, der egen einen Punkt von $\mathfrak{W}$ konvergiert.

Es gibt höchstens einen Konvergenzwert c von P. Liegt dieser in Σ, o gehört er einem Teilgebiet ϑ von $\mathfrak{R}^*$ über Σ an. Die Berandung on ϑ müßte in jeder Nähe von c, wie man wie in **9.** schließt, Punkte nthalten, denen auf $\mathfrak{W}$ Punkte rechts und links von P entsprächen; müßte daher r_1 und r_2 angehören wider die Voraussetzung.

Es sei nun b ein Punkt von H, der rechts von der Begrenzungsgeraden S on Σ liegt, während die Punkte von r_2 auf S oder links von S liegen. ch schalte dann einen inneren Parallelstreifen Σ' von Σ von der Breite 2δ wischen S und b. Für diesen sind die Voraussetzungen von **15. 16.** erüllt. Denn die abzählbarvielen Teilgebiete ϑ_n von $\mathfrak{R}^*$, die über Σ' liegen, nd so beschaffen, daß das Bild jedes einzelnen einen von Null verschiedenen bstand von P besitzt. Wir wollen hierbei nur solche Teilgebiete zählen, ie über beiden Grenzgeraden von Σ' begrenzende Querschnitte besitzen.

[31]) Infolge dieser Betrachtung können wir die in den Beweisen von **6. 11. 15.** uftretenden oberen und unteren Integrale der Ungleichungen durch Integrale ersetzen.

[32]) Diese Bemerkung können wir auch statt des Hilfssatzes von **14.** zum Beeise von **15. 16.** verwerten.

Nehme ich aus jedem dieser Teilbereiche einen Punkt $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ so müssen ihre Bilder $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ gegen P gehen. Würden sie nämlich einen Häufungspunkt $\mathfrak{A}$ in oder auf $\mathfrak{W}$ außer P besitzen, so würde sein entsprechender Punkt A auf $\mathfrak{R}$ ein regulärer Punkt oder eine Windungsstelle sein. Jede Umgebung von A enthält Stücke von unendlich vielen ϑ_n. Man sieht also, daß wenn ich η kleiner als δ und kleiner als den Radius der größten kreisartigen Umgebung U von A auf $\mathfrak{R}$ wähle unendlich viele Teilgebiete ϑ_n sowohl Punkte in U enthalten, für die $|w - A| = \eta$, und Punkte, für die $|w - A| = \frac{\eta}{2}$. Die Kurve $\mathfrak{W}$, die in U eine Jordankurve ist, müßte daher, wie leicht ersichtlich ist, unendlich viele Stücke enthalten, die in U von der Kurve $|w - A| = \eta$ zur Kurve $|w - A| = \frac{\eta}{2}$ führt, und dies ist mit dem Charakter der Jordankurve unverträglich.

Daraus folgt, daß das Bild von ϑ_n in der Umgebung η_n von P enthalten ist, $\lim_{n=\infty} \eta_n = 0$. Es gibt daher nur endlich viele ϑ_n, die Punkte von der r_2 entsprechenden an P stoßenden Seite A von $\mathfrak{W}$ in ihrer Berandung enthalten. Ich wähle jetzt die Umgebung ε von P so klein, daß diese ϑ_n außerhalb dieser Umgebung liegen. Ich kann nun weiter $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ klein wählen, daß alle Punkte von A, für die $|z - P| < \varepsilon_1 \leqq \varepsilon$ außer Σ und zwar links davon liegen, denn die Punkte von r_2 liegen links von Σ und der Abstand von r_2 und Σ' ist von Null verschieden. Nehme ich nun einen Punkt β_n, dessen Bildpunkt sich in der außer Σ' gelegenen Umgebung $\frac{1}{2^n}$ des Punktes b projiziert, in der Umgebung U_n: $\frac{\varepsilon_1}{n}$ des Punktes P. Verbinde ich β_n in U_n und G mit einem Punkte λ_n von A, so wird der entsprechende Weg auf $\mathfrak{R}^*$ ein Gebiet ϑ_{i_n} durchsetzen müssen, dessen Bild λ_n und β_n und daher auch P und β_n trennt. Da die Indizes der ϑ_n, deren Bilder mit U_n Punkte gemein haben, über N_n, $\lim_{n=\infty} N_n = \infty$ liegen müssen, geht i_n mit n gegen unendlich.

Da weiter der Inhalt von dem in Σ' liegenden Teil von H größer höchstens gleich ist der oberen Unbestimmtheitsgrenze der Inhalte der Projektionen von ϑ_n, wenn n gegen unendlich geht, so folgt aus unseren Annahmen, daß der Inhalt der Projektion von ϑ_n mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Wir können daher den Satz von **15. 16.** anwenden und erkennen, daß dem inneren Häufungbereich von P nicht angehört.

18. Wir können den Satz von **15. 16.** sofort dahin ausdehnen, daß wir den Parallelstreifen durch ein endliches oder unendliches ringförmiges Gebiet R ersetzen, das von zwei geschlossenen Jordankurven begrenzt wird, die einen von Null verschiedenen Abstand haben. Für den Beweis

mache ich R zuerst durch eine lineare Transformation beschränkt. Gilt dafür der Satz, so gilt er auch für das ursprüngliche Gebiet. Das beschränkte Ringgebiet der w-Ebene bilde ich aber auf einen konzentrischen Kreisring R^* der w'-Ebene ab, wobei darauf zu achten ist, daß in jedem mit R^* konzentrischen Kreisring R^{**}, dessen Begrenzungskreise im Innern von R^* liegen, die Beziehung gilt

$$M(R^{**}) > \left|\frac{dw'}{dw}\right| > m(R^{**}) > 0.$$

Da die konzentrischen Kreise, die in R^* in ihrer ganzen Länge dem übertragenen Häufungsbereich angehören, eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge bilden, so läßt sich in jedem in R^* enthaltenen konzentrischen Kreisring R^{**} ein konzentrischer Kreisring R^{***} finden, der im Innern und am Rande keinen konzentrischen Kreis enthält, der in seiner ganzen Länge dem Häufungsbereich angehört.

Dadurch sind wir nun in der Lage, den Satz von **17.** folgendermaßen abzuändern:

Läßt sich ein ringförmiges Gebiet R finden, das von zwei geschlossenen Jordankurven begrenzt wird, die einen Abstand ungleich Null besitzen und besitzt in ihm der Häufungsbereich des Punktes P das Maß Null, so ist, falls R keinen Punkt von r_2 enthält, der innere Häufungsbereich eine Teilmenge des abgeschlossen gemachten Komplementärgebietes von R, das auch r_2 enthält.

19. Weiter gilt der Satz:

Ist in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ das Maß von $H(P)$ Null, so fällt in ihm der innere Häufungsbereich $\mathfrak{H}(P)$ mit der Menge der Hauptpunkte zusammen.

Besteht der innere Häufungsbereich aus einem Punkt, so ist der Satz selbstverständlich. Sonst können wir um den Punkt b des inneren Häufungsbereiches in jeder Umgebung von b einen konzentrischen Kreisring R in $\mathfrak{G}$ finden, so daß in dem den Punkt ∞ enthaltenden Komplementärgebiet des Kreisringes Punkte des inneren Häufungsbereiches enthalten sind, daß kein konzentrischer Kreis in R oder von der Berandung von R ganz dem Häufungsbereich H angehört und daß der möglicherweise vorhandene Konvergenzwert nicht in R oder auf seiner Berandung liegt.

Wir ersetzen wieder den Einheitskreis wie in **17.** durch eine den Kreis berührende Jordankurve mit gleichem r_1, r_2, H, $\mathfrak{H}$. Mit ϑ_k sei dann die Folge der zusammenhängenden Teilgebiete von $\mathfrak{R}^*$ über R bezeichnet, deren jedes begrenzende Querschnitte über beiden Grenzkreisen von R besitzt, so zeigen wir wie in **17.**, daß für jeden Punkt Q_k des Gebietes ϑ_k die Beziehung besteht,

(12) $$H_k > |Q_k^* - P| > \eta_k,$$

wobei Q_k^* der Bildpunkt von Q_k ist und H_k, η_k mit $\frac{1}{k}$ gegen Null geht. Dabei hat die Projektion des Gebietes ϑ_k ein Maß, das mit $\frac{1}{k}$ gegen Null geht.

Ich habe nun zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder kommen unendlich viele ϑ_k vor, die von der einen an P stoßenden Seite Λ_1 von $\mathfrak{W}$ an die andere Λ_2 reichen. In einem derartigen ϑ_k gibt es also Randpunkte $\mathfrak{r}_1$, die Punkten von Λ_1, und Randpunkte $\mathfrak{r}_2$, die Punkten Λ_2 entsprechen. Für jeden Punkt $\mathfrak{r}_1$ bestimme ich nun die mit $\mathfrak{r}_1$ zusammenhängende größte Teilmenge von Punkten des Bildgebietes von ϑ_k, für die $|f(z) - \mathfrak{r}_1| < \varkappa$. Die Vereinigungsmenge V der Bildpunkte dieser Mengen für alle $\mathfrak{r}_1$ bildet eine offene Teilmenge von ϑ_k, deren jeglicher Punkt mit einem Punkt $\mathfrak{r}_1$ durch einen ganz im Kreise $|w - \mathfrak{r}_1| < \varkappa$ sich projizierenden Weg in V verbunden werden kann. Läge nun kein Punkt $\mathfrak{r}$ auf der Begrenzung von V, so müßte, da V dann ja nicht mit ϑ_k zusammenfällt, ein innerer Punkt A von ϑ_k der Begrenzung von V angehören; sei B der nächste Punkt $\mathfrak{r}_1$; dann wird das Kreisbogenzweieck $|w - A| < \varkappa$, $|w - B| < \varkappa$, soweit es im Kreisring R liegt, ganz der Projektion von ϑ_k angehören. Wähle ich $2\varkappa$ kleiner als die Breite von R, so wird also die Projektion von ϑ_k größer sein müssen als $\frac{\varkappa^2}{4}\sqrt{3}$. Da das Maß dieser Projektion mit $\frac{1}{k}$ gegen Null geht, so sehen wir, daß es in ϑ_k für $k > k_\varkappa$ einen Querschnitt gibt, dessen Projektion in einem Kreis mit dem Radius $\varkappa$ liegt und dessen Bild Λ_1 mit Λ_2 verbindet. Wir können uns so eine Folge von Λ_1 mit Λ_2 verbindenden Querschnitten herstellen, die gegen P konvergieren, deren entsprechende Querschnitte $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ über R in Kreisen liegen, deren Radius mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Da jeder Weg, dessen Bild gegen P geht, diese Querschnitte von einem bestimmten an durchsetzen muß, so sind die in R oder auf dessen Rande stets vorhandenen Häufungspunkte der q_n Hauptpunkte.

Ist aber die Anzahl der ϑ_k endlich, die Λ_1 und Λ_2 verbinden, so grenzt an das Bild eines von ihnen ein zusammenhängendes Teilgebiet des Innern von $\mathfrak{W}$, das den in $\mathfrak{W}$ gelegenen, mit P zusammenhängenden Teil einer bestimmten Umgebung von P enthält und dem kein derartiges ϑ_k mehr angehört. Die Bilder der ϑ_k, die in diesem Teilgebiet liegen, werden von Querschnitten begrenzt, die für jedes einzelne ϑ_k entweder in Λ_1 oder in Λ_2 münden. Unter den Komplementärgebieten der Bilder der ϑ_k : ϑ_k^* ist, wie man leicht zeigt, ein und nur eines g^0 enthalten, das (einfach) zusammenhängend ist und in jede Nähe von P kommt. Infolge

der Konstruktion müßte der diesem Teilgebiet entsprechende Teil von $\mathfrak{R}^*$ eines der durch den Kreisring bestimmten Komplementärgebiete: G_1 — das von K_1 begrenzt wird — freilassen. Nehme ich irgendeinen Punkt c her. dessen Projektion über diesem Komplementärgebiet liegt und dessen Bild γ in g liegt; ich bilde nun das größte, mit c zusammenhängende Gebiet Γ von $\mathfrak{R}^*$, das keinen Punkt enthält, dem ein Punkt von g^0 entspricht. Da das Gebiet $\tilde{g}^0$, das auf $\mathfrak{R}^*$ g^0 entspricht, auf $\mathfrak{R}^*$ von Querschnitten begrenzt wird, die über K_2, dem Grenzkreis des zweiten Komplementärgebietes G_2 von $\mathfrak{R}$ liegen, so grenzt Γ längs eines solchen Querschnittes q an $\tilde{g}^0$. Das Bild von Γ wird daher durch jenes Gebiet gegeben, das von $\mathfrak{W}$ und dem Bilde q^* dieses Querschnittes begrenzt und das in seiner Berandung P nicht enthält. q trennt hiermit auch P und γ. In Γ können nach der Ungleichung (12) nur die Bilder von endlich vielen ϑ_k liegen. Ich bilde jetzt das größte mit c zusammenhängende Teilgebiet Γ', das keine Punkte enthält, die über G_2 liegen. Entweder fällt dieses Gebiet mit Γ zusammen. Dann durchsetzt jeder Weg, dessen Bild γ und P verbindet, in dem an q stoßenden Bereich ϑ_k den Kreisring R in seiner Breite. Sonst aber gibt es einen über K_2 liegenden Querschnitt, der c und q trennt und der Begrenzung von Γ' angehört. Dann besitzt der an diesen Querschnitt stoßende Bereich ϑ_k jene Eigenschaft. Da dieses ϑ_k Punkte enthält, deren Bilder in dem mit P zusammenhängenden Teil einer Nachbarschaft ε von P liegen, die γ nicht mehr enthält, so geht nach (12) $\frac{1}{k}$ mit $|\gamma - P|$ gegen Null. Da also die Voraussetzungen von **15.**, **16.**, **18.** erfüllt sind, so könnte entgegen der Konstruktion von R kein Punkt von G_1 dem inneren Häufungsbereich angehören.

Wir haben daher immer den ersten Fall unserer Fallunterscheidung. Da in jedem Kreisring R Hauptpunkte liegen, da ich R in jeder Umgebung von P wählen kann und da die Menge der Hauptpunkte abgeschlossen ist, so muß b selbst Hauptpunkt sein, und hiermit ist der am Anfang dieses Satzes ausgesprochene Satz bewiesen.

20. Eine unmittelbare Folgerung von **19.** ist der Satz:

Besitzt der Häufungsbereich H eines Punktes das Maß Null, so fällt der innere Häufungsbereich mit der Menge der Hauptpunkte zusammen und wird von einem Punkt oder einem Kontinuum gebildet. Ist nur ein Hauptpunkt vorhanden, so ist er Konvergenzwert.

Für diesen Fall sowie für **3.**, **8.**, **9.** ist damit auch die Existenz eines Weges nachgewiesen, der nur die Hauptpunkte approximiert.

Ich will darauf verzichten, hier noch kompliziertere Sätze aufzustellen, da durch das im vorstehenden Gesagte die von mir angewandte Unter-

suchungsmethode wohl hinlänglich auseinandergesetzt wird. Ich will nun ein Beispiel noch erwähnen. $H(P)$ möge aus den Punkten bestehen $2 \geqq |w| \geqq 1$; $|u| < 1$, $v = 0$. Ich weiß, daß die Punkte $v = 0$, $1 > u > 0$ nicht r_1, die Punkte $v = 0$, $0 > u > 1$ nicht r_2 angehören; der Punkt $u = 0$, $v = 0$ möge dem inneren Häufungsbereich angehören. — Derartige Funktionen lassen sich leicht konstruieren, sogar so, daß $H(P)$ gleichzeitig der Wertebereich der Funktion im Punkte P ist. — Aus unseren Sätzen folgt sofort, daß der innere Häufungsbereich nur vom Punkte (0, 0) gebildet wird und daß dieser Punkt gleichzeitig Hauptpunkt und Konvergenzwert ist.

21. Am Schlusse dieses Abschnittes will ich noch durch Konstruktion der entsprechenden Riemannschen Fläche das in 8. versprochene Beispiel einer im Einheitskreis analytischen Funktion geben, für die $\iint |f'(z)|^2 \, dx\,dy$ endlich ist, bezüglich der aber doch der Häufungsbereich des Randpunktes P die ganze Ebene überdeckt.

Ich nehme eine abzählbare Folge im Endlichen gelegener Punkte, die in der w-Ebene überall dicht liegen, $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$; λ_i sei eine Größe, die kleiner ist als $\frac{1}{2^{i+2}}$ und als die Hälften der Entfernungen von P_i und P_{i-1} sowie von P_i und P_{i+1}. Das Stück W_i der zweiblättrigen Windungsfläche von $\sqrt{w - P_i}$ um P_i, für das $|w - P_i| < \lambda_i$, hat daher einen Inhalt $2\lambda_i^2 \cdot \pi < \frac{2\pi}{2^{2i+4}} < \frac{1}{4^i}$ $(i \geqq 1)$. W_i hat von W_{i+1} einen von Null verschiedenen Abstand. Ich stelle mir nun eine einfach zusammenhängende Fläche her, indem ich das obere Blatt von W_i mit dem unteren Blatt von W_{i+1} durch einen schlichten, von zwei parallelen Geraden begrenzten normierten Verbindungsstreifen verbinde, dessen Mittellinie auf der Geraden $P_i P_{i+1}$ liegt, dessen Breite kleiner als λ_i, λ_{i+1} ist und dessen Inhalt $< \frac{1}{2^i}$ ist.

Die einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die wir so bekommen, hat als offene Punktmenge ein Maß $< \sum \frac{1}{4^i} + \sum \frac{1}{2^i} = \frac{3}{4}$. Die Funktion, die diese Fläche auf den Einheitskreis abbildet, ist die gewünschte Funktion[33]).

---

[33]) Ich möchte die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, die Aufmerksamkeit der Funktionentheoretiker auf die schöne Arbeit von E. Lindelöf, Memoire sur certaines inégalités dans la theorie des fonctions et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta Soc. Sc. Fen. Bd. XXXV, Nr. 7, 1908, hinzulenken, deren reiche Resultate noch zu wenig bekannt

III. Das Verhalten der Abbildungsfunktionen am Rande[33a]).

1. Bevor ich in die Untersuchung des Verhaltens der Abbildungsunktionen am Rande eingehe, will ich an einen bekannten Satz[34]) über das Poissonsche Integral erinnern: Sei T die orientierte Tangente im Punkte Π des Einheitskreises, den ich mit dem positiven Umlaufungssinn begabe, dann gebe ich den aus dem Innern des Einheitskreises gegen Π strebenden Strahlen den Durchlaufungssinn vom Innern gegen Π und sage von einer Kurve, sie strebe unter dem Winkel α gegen Π, wenn ihre orientierte Tangente in Π mit T den Winkel $\alpha\,(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ einschließt. Wir können dann sagen:

Ist $f(\varphi)$ im Punkte $\Pi = (1, \Phi)$ stetig, so konvergiert

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi}^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi \tag{13}$$

auf jedem gegen Π strebenden Weg des Einheitskreises gleichmäßig gegen $f(\Phi)$.

Besitzt hingegen $f(\varphi)$ im Punkte Π halbseitige Grenzwerte, die wir kurz mit $f(\Phi^-)$, $f(\Phi^+)$ bezeichnen, so konvergiert $f(r, \varphi)$ auf jedem gegen Π unter dem Winkel α strebenden Weg des Einheitskreises gegen den Wert $\frac{1}{\pi}\{(\pi - \alpha) f(\Phi^-) + \alpha f(\Phi^+)\}$, und zwar ist die Konvergenz auf der Gesamtheit der nach Π strebenden Strahlen gleichmäßig.

Die letzte Bemerkung ermöglicht es, das Verhalten von $f(r, \varphi)$ auf Wegen zu beurteilen, die gegen Π streben, — jedoch nicht unter einem bestimmten Winkel —, und ihre Unbestimmtheitsgrenzen auf diesem Wege zu beurteilen.

2. Den vorstehenden Satz können wir jetzt in folgender Form erweitern:

Bezeichnen wir die Unbestimmtheitsgrenzen von $f(\varphi)$ im Punkt Π mit $\underline{f}(\Phi^-)$, $\bar{f}(\Phi^-)$, $\underline{f}(\Phi^+)$, $\bar{f}(\Phi^+)$, so liegen die Unbestimmtheitsgrenzen von $\bar{f}(r, \varphi)$ auf jedem gegen Π unter dem Winkel α strebenden Weg des Einheitskreises zwischen den Grenzen

---

zu sein scheinen. Lindelöf kommt in dieser Arbeit, von der ich selbst erst nachträglich Kenntnis genommen habe, auch zu Sätzen, die in einem gewissen Zusammenhang mit den Resultaten des vorstehenden Kapitels stehen.

[33a]) Man vergleiche, P. Painlévé, Sur la théorie de la représentation conforme, C. R. CXII (1891), S. 653–657; L. Lichtenstein, Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken, Journal f. Math., 140 (1911), S. 100–119.

[34]) Vgl. H. A. Schwarz, Ges. math. Abhandl., II. Bd., S. 175 ff., S. 360.

$l = \frac{1}{\pi}((\pi - \alpha)\underline{f}(\Phi^-) + \alpha \underline{f}(\Phi^+))$ und $L = \frac{1}{\pi}((\pi - \alpha)\bar{f}(\Phi^-) + \alpha \bar{f}(\Phi^+))$,

und zwar läßt sich für alle gegen Π strebenden Strahlen zu jedem ε gleichmäßig ein δ bestimmen, so daß in der Umgebung δ von Π der Wert von $f(r, \varphi)$ zwischen $L + \varepsilon$ und $l - \varepsilon$ liegt. Der Satz gilt noch, wenn bei der Bestimmung der Unbestimmtheitsgrenzen von den Werten von $f(\varphi)$ in einer festen Nullmenge abgesehen wird, in der $f(\varphi)$ ganz nicht definiert zu sein braucht.

Der Zweig der Funktion $-\operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) + \Phi + \frac{\pi}{2}$[35]), der im Null-punkt den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt, ist im Einheitskreis mit Einschluß der Be-randung außer dem Punkte $\Pi = (x_0, y_0)$ harmonisch. Er nimmt auf dem unter den Winkel α gegen Π strebenden Strahl den Wert α an. Bezeichnen wir ihn mit $\chi(r, \varphi)$ bzw. auf dem Einheitskreis mit $\chi(\varphi)$ — es ist dabei $\chi(\Phi^-) = 0$, $\chi(\Phi^+) = \pi$ —, so haben wir

$$(14) \quad f(r, \varphi) - \bar{f}(\Phi^-) - \frac{1}{\pi}(\bar{f}(\Phi^+) - \bar{f}(\Phi^-))\chi(r, \varphi) - \varepsilon$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\psi) - \bar{f}(\Phi^-) - \frac{1}{\pi}(\bar{f}(\Phi^+) - \bar{f}(\Phi^-))\chi(\psi) - \varepsilon]\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2}d\psi$$

Nun läßt sich eine Umgebung des Punktes Π auf dem Einheitskreis finden, in der $[f(\psi) - \bar{f}(\Phi^-) - (\bar{f}(\Phi^+) - \bar{f}(\Phi^-))\chi(\psi) - \varepsilon]$ negativ, ja in der sie kleiner als $-\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Daher gibt es nach den Eigenschaften des Poissonschen Integrals eine Umgebung δ_1 des Punktes Π, so daß in dieser Umgebung im Einheitskreis (sowie auf seiner Berandung) die linke Seite von **14.** negativ ist, d. h.

$$(15) \qquad f(r, \varphi) < \frac{1}{\pi}(\bar{f}(\Phi^+) - \bar{f}(\Phi^-))\chi(r, \varphi) + \bar{f}(\Phi^-) + \varepsilon.$$

Ebenso weist man eine Umgebung δ_2 des Punktes Π nach, so daß im Einheitskreis und seiner Berandung die Ungleichung besteht

$$(16) \qquad f(r, \varphi) > \frac{1}{\pi}(\underline{f}(\Phi^+) - \underline{f}(\Phi^-))\chi(r, \varphi) + \underline{f}(\Phi^-) - \varepsilon$$

und aus diesen beiden Ungleichungen folgt sofort obiger Satz.

3. Es sei nun $w = f(z)$ eine im Einheitskreis meromorphe Funktion, $\mathfrak{R}$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Es soll möglich sein, von $\mathfrak{R}$ durch einen Jordanquerschnitt q, der beiderseits gegen Punkte strebt, deren Projektionen nicht zusammenfallen, ein Teilgebiet $\mathfrak{B}$ abzugrenzen, das die w-Ebene nur einfach bedeckt. Wir können voraussetzen, daß $\mathfrak{R}$

[35]) Das Koordinatensystem ist so gelegt, daß für die positive x-Achse $\varphi = 0$.

beschränkt sei. Der Berandung von $\mathfrak{B}$, soweit sie nicht q angehört, entspricht hierbei ein Kreisbogen, und zwar gelten für die Randbeziehung, worauf ich schon in [1]) hingewiesen habe, die Gesetze, die Carathéodory und Koebe für die Randzuordnung schlichter Bereiche auf den Einheitskreis aufgestellt haben. Um dies kurz zu zeigen, bilden wir $\mathfrak{B}$ konform auf einen Halbkreis vom Radius 1 in der Z-Ebene ab, wobei wir dem Querschnitt q den begrenzenden Halbkreis entsprechen lassen, dessen Mittelpunkt O ist. Dadurch wird auch eine konforme Abbildung des dem Bereich $\mathfrak{B}$ entsprechenden Teilgebietes B auf den Halbkreis K^* geliefert. Den Querschnitten von K^*, die auf den Kreisen $|Z-O|=\varrho\,(1>\varrho>0)$ liegen, entsprechen Querschnitte von B, und zwar ist die Menge der ϱ, denen Querschnitte von unendlicher Länge entsprechen, eine Nullmenge, wie aus der Ungleichung $(1)'$ von **II. 8.** gefolgert wird. Ist daher p irgendein Innenpunkt des geradlinigen Begrenzungsteiles g von K^*, so kann ich einen Querschnitt $|Z-O|=\bar{\varrho}$ so wählen, daß $\bar{\varrho}>|p-O|$ und daß diesem Querschnitt ein Querschnitt $\varkappa$ von B entspricht, der endliche Länge besitzt und daher beiderseits gegen Punkte des Einheitskreises konvergiert. Das zwischen den beiden Punkten gelegene Kreisstück wird auf jenen Teil von g bezogen, für den $|Z-O|<\bar{\varrho}$, und zwar ist in diesem offenen Stück die Abbildungsfunktion analytisch. Wir ersehen daher: die Abbildungsfunktion von K^* auf B ist im offenen Stück g analytisch und liefert die Abbildung dieses Stückes auf einen offenen Bogen k des Einheitskreises. Da nun für die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf K^* die oben erwähnten Gesetze gelten, so ist unsere Behauptung erwiesen. Dabei ist allerdings darauf zu achten, daß hierdurch nicht nachgewiesen ist, daß der Querschnitt q gegen Punkte des Einheitskreises konvergiert. Es ist offen gelassen, ob nicht den den Endpunkten von q zugehörigen Primenden kein Kreispunkt, sondern ein Kreisbogen entspricht.

4. Wollen wir daher das Verhalten von $f(z)$ in der Umgebung eines Randpunktes Π untersuchen, der im Innern des Kreisbogens $\varkappa$ liegt, so bilden wir $\mathfrak{B}$ durch $w=\varphi(\zeta)$ auf den Einheitskreis der ζ-Ebene ab. Dadurch wird auch B auf den Einheitskreis abgebildet, wobei dem Punkte Π ein Punkt Q entspricht. Da in der Umgebung von Π bzw. von Q ζ sich als analytische Funktion von z und z sich als analytische Funktion von ζ darstellt, so können wir uns darauf beschränken, das Verhalten von $\varphi(\zeta)$ in der Umgebung von Q zu untersuchen. *Wir brauchen also nur das Verhalten der Abbildungsfunktionen schlichter Bereiche am Rande des Einheitskreises zu untersuchen.*

5. Wir legen den Wert der Funktion $\operatorname{arctg}\frac{\eta(P)-\eta(Q)}{\xi(P)-\xi(Q)}$ in einem Innenpunkt Q fest; P ist ein erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{B}$. Da kein ge-

schlossener Weg in $\mathfrak{B}$ den Punkt P umschließen kann, so ist diese Funktion $\bar{\chi}(P, Q)$ in $\mathfrak{B}$ eindeutig. Sie ist nichts anderes als eine Bestimmung des Imaginärteiles von $\log(z_Q - z_P)$. $\bar{\chi}(P, Q)$ ist in den Punkten von $\mathfrak{B}$ stetig, obendrein aber auch in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$, die so beschaffen sind, daß in ihrer Nähe nicht zwei Punkte Q_1, Q_2 in $\mathfrak{B}$ gefunden werden können, die sich derart in $\mathfrak{B}$ durch einen Weg $\mathfrak{w}$ verbinden lassen, daß $\mathfrak{w}$ zusammen mit der Strecke $Q_1 Q_2$ einen geschlossenen Weg gibt, der P einschließt.

Ist die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ in einer gewissen Umgebung des Punktes P eine Jordankurve, so ist auf dieser durch die vorstehende Festsetzung $\bar{\chi}(P, Q)$ als eindeutige, mit Ausnahme des Punktes P stetige Funktion erklärt. Im Punkte P erhalten wir die vier Unbestimmtheitsgrenzen o^+, u^+, o^-, u^- [36]). Zwischen ihnen bestehen, wie man sofort zeigt, die Beziehungen $o^- > o^+ > u^+$, $o^- > u^- > u^+$.

Uns interessiert vor allem der Fall, daß es einen an P stoßenden Winkelraum des Gebietes $\mathfrak{B}$ gibt. In diesem Falle läßt sich ein von P ins Innere gehender Strahl ziehen. Hat auf ihm $\bar{\chi}(P, Q)$ den Wert ν, so ist auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ in entsprechender Nähe von P für Punkte vor P $\nu + 2\pi > \chi > \nu$, für Punkte nach P $\nu > \chi > \nu - 2\pi$. Daraus folgt

$$\nu - 2\pi < u^+ < o^+ < \nu < u^- < o^- < \nu + 2\pi. \tag{17}$$

Der durch die Halbstrahlen $u^- - \varepsilon$ und $o^+ + \varepsilon$ eingeschlossene Winkelraum besteht in der Umgebung von P aus lauter Punkten von $\mathfrak{B}$. Da ich den Halbstrahl ν irgendwie aus einem Winkelraum wählen kann, so verschärfen sich die Ungleichungen (17) zu

$$u^- - 2\pi \leqq u^+ < o^+ < u^- < o^- < o^+ + 2\pi. \tag{18}$$

Ist $o^+ = u^+$, so sprechen wir von einer rechten Tangente, ist $o^- = u^-$, so sprechen wir von einer linken Tangente. Hat P eine rechte und eine linke Tangente und ist $o^+ = o^- - \pi$, so sagen wir: die Begrenzung besitzt in P eine Tangente. Ist in P eine rechte und eine linke Tangente vorhanden, und ist $o^+ = o^- - \alpha$, so sagen wir: die Begrenzung hat in P eine Ecke von der Öffnung α.

6. Die Begriffsbildungen von **5.** lassen sich unmittelbar auf den Fall einer allgemeinen Begrenzung übertragen. Die erreichbaren Punkte [37]) sind ja zyklisch geordnet, und auf jedem Weg, der gegen einen be-

---

[36]) Wir wollen hier die Bezeichnung wie in der Geraden einführen und von o^-, u^-, linksseitig, ... in Hinblick auf t sprechen, wobei den wachsenden t der positive Umlaufssinn der Kurve entspricht.

[37]) Ein und derselbe Punkt der Ebene kann verschiedene erreichbare Punkte darstellen. Die Menge dieser kann die Mächtigkeit des Kontinuums haben.

timmten dieser Punkte konvergiert, strebt $\bar{\chi}(P,Q)$ gegen ein und denselben Wert, falls dieser erreichbare Punkt auch als Punkt der Ebene von P verschieden ist. Wir können daher von einem rechtsseitigen bzw. inksseitigen Herangehen an P sprechen und können, indem wir die Werte von $\bar{\chi}(P,Q)$ nur in den erreichbaren Punkten betrachten, die auch in der Ebene von P verschieden sind, die Unbestimmtheitsgrenzen o^+, u^+, o^-, u^- definieren. Genauer, wir nehmen eine Folge von Querschnitten her, die auf Kreisbögen um P liegen, deren Radien mit $\frac{1}{n}$ gegen Null gehen, und die so beschaffen sind, daß die von ihnen bestimmten Gebiete $\mathfrak{B}_i$: $\mathfrak{B}_1 > \mathfrak{B}_2 > \ldots > \mathfrak{B}_n > \ldots$, gegen den erreichbaren Punkt P konvergieren. In $\mathfrak{B}_n$ bestimmen wir z. B. die obere Grenze $O_n^{(r)}$ und die untere Grenze $U_n^{(r)}$ der Werte, die $\bar{\chi}(P,Q)$ in den erreichbaren, von P verschieden gelegenen Punkten des $\mathfrak{B}_n$ angehörenden Teiles der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ annimmt, die nach P liegen. o^+ ist die untere Grenze der $O_n^{(r)}$, u^+ die obere Grenze der $U_n^{(r)}$.

Wir sprechen wie oben auch hier von rechter, linker Tangente, von Tangente schlechtweg in den erreichbaren Punkten der Berandung. Zu den Punkten, in denen die Berandung eine Tangente besitzt, können sehr wohl Primenden gehören, die aus einem Kontinuum bestehen, das allerdings in diesem Falle aus einem Geradenstück besteht. Nehme ich z. B. als Bereich $\mathfrak{B}$ den Bereich her, dem ich aus dem Rechteck mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$ die Einschnitte anbringe, die auf den Geraden $y=\frac{1}{n}$ liegen und von der Berandung des Rechtecks zu dem auf diesen Geraden nächstgelegenen Punkte der Parabel $y=x^2$ führen. In diesem Falle hat die Berandung von $\mathfrak{B}$ im Punkte $(0,0)$ eine Tangente.

Sind die Zahlen o^+, u^+, o^-, u^- endlich — diesen Fall wollen wir allein weiter betrachten —, so läßt sich durch einen Kreisbogen um P ein den erreichbaren Punkt P in seiner Berandung enthaltendes Teilgebiet $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ abgrenzen, in dem $\bar{\chi}(P,Q)$ beschränkt ist. Für die Untersuchung des Verhaltens der Abbildungsfunktion im erreichbaren Punkte P können und wollen wir im folgenden $\mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{B}}$ ersetzen und die Abbildung von $\overline{\mathfrak{B}}$ auf den Einheitskreis betrachten.

7. Bilden wir $\overline{\mathfrak{B}}$ auf den Einheitskreis ab, so wird hierbei $\bar{\chi}(P,Q)$ in eine im Innern des Einheitskreises stetige beschränkte harmonische Funktion $\chi^*(r,\varphi)$ übergehen. Wir haben daher

$$19)\quad \chi^*(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi^*(R,\psi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2+2Rr\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\psi \qquad (1>R>r).$$

Nun konvergiert die Funktion, die die Abbildung des Einheitskreises her-stellt, auf den Radien für alle φ mit Ausnahme einer Nullmenge gegen einen bestimmten Wert — einen erreichbaren Punkt —, wie man mittels eines Fatouschen Satzes oder mittels der Ungl. (1) folgert, und da diese Konvergenz nach dem Satze **II. 3.** für jeden Punkt stattfindet, dem ein erreichbarer Punkt entspricht, so konvergiert $\chi^*(R, \psi)$ für fast alle ψ — nämlich für alle ψ, so daß dem Punkte $(1, \psi)$ ein erreichbarer Punkt entspricht, der von P verschieden liegt[38]) — gegen einen bestimmten Wert $\chi^*(1, \psi)$, dem den betreffenden erreichbaren Punkt entsprechenden Wert $\bar{\chi}(P, Q)$. Wir haben daher, da $\chi^*(R, \psi)$ beschränkt ist,

$$(20) \qquad \chi^*(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^*(1, \psi) \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi \qquad (r < 1)$$

Beachten wir, daß der Berandung von $\mathfrak{B}_n$, soweit sie der Berandung von $\overline{\mathfrak{B}}$ zugehört, ein Kreisbogen entspricht, der das Bild $\overline{P}$ des erreichbaren Punktes P im Innern enthält, und daß die Länge dieser Kreisbogen mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht, so schließen wir: Es hat $\chi^*(1, \psi)$ im Punkte $\overline{P} = \psi^0$ dieselben Unbestimmtheitsgrenzen o^+, u^+, o^-, u^- wie $\bar{\chi}(P, Q)$ im Punkte P, wenn wir bei ihrer Bestimmung die Nullmenge der ψ nicht berücksichtigen, denen keine erreichbaren Punkte entsprechen, bzw. deren entsprechende Punkte mit P zusammenfallen.

8. Beachten wir, daß $\chi^*(r, \varphi)$ die Richtung des Halbstrahles angibt, der den Bildpunkt Q des Punktes (r, φ) mit P verbindet, so können wir also auf Grund des in **2.** ausgesprochenen Satzes sagen:

Läßt sich von einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ durch einen Querschnitt q ein schlichter Teilbereich $\mathfrak{B}$ abgrenzen, und sind in einem Randpunkt P von $\mathfrak{R}$, der ein erreichbarer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist und nicht mit den Endpunkten von q zusammenfällt, die nach **5. 6.** *bestimmten Richtungsgrenzen der Berandung rechts und links von P: o^+, u^+, o^-, u^- endlich, so verläuft das Bild des gegebenen Bildpunkt Π von P (bei der Abbildung von R auf den Einheitskreis der ζ-Ebene) unter dem Winkel α strebenden Strahles für $|\zeta - \pi| < \delta$ in dem zwischen den Strahlen*

$$(21) \quad \frac{1}{\pi}((\pi - \alpha)o^- + \alpha o^+) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}((\pi - \alpha)u^- + \alpha u^+) - \varepsilon$$

gelegenen Winkelraum, und zwar läßt sich δ für die Gesamtheit der Strahlen zu jedem ε gleichmäßig bestimmen.

---

[38]) In [1]) habe ich nachgewiesen, daß die ψ-Werte, deren erreichbare Bildpunkte mit P zusammenfallen, eine Nullmenge bilden.

Daher liegt auch das Bild jedes gegen Π unter dem Winkel α strebenden Weges schließlich in jedem dieser Winkelräume.

Insbesondere folgt daraus: *Besitzt die Berandung von $\mathfrak{R}$ in P eine Tangente oder eine Ecke, so besitzen die Bilder aller im Einheitskreis gegen Π unter dem Winkel α strebenden Wege in P eine einseitige Tangente im weiteren Sinne (nach* **6.**), *bzw. für $\alpha \neq 0, \neq \pi$ nach dem Satze von* **I. 3.** *eine einseitige Tangente im gewöhnlichen Sinn. Umgekehrt entspricht dann jedem Wege in $\mathfrak{R}$, der in dem erreichbaren Punkte P mit einer bestimmten Tangente im gewöhnlichen Sinne mündet, ein Weg, der gegen Π mit einer bestimmten Tangente im gewöhnlichen Sinne einmündet.*

Mit Beachtung dieser Umstände können wir sagen:

Besitzt die Berandung von $\mathfrak{R}$ in P eine Tangente, so ist die Abbildung in P winkeltreu, besitzt sie eine Ecke, so ist die Abbildung winkelproportional.

Wir wollen hier nur noch eine Folgerung formulieren:

Ist $u^- > o^+$, d. h. gibt es einen an P heranreichenden inneren Winkelraum und ist $\mathfrak{w}$ ein Weg, der in einem solchen gegen P konvergiert und in P eine einseitige Tangente besitzt von der Richtung λ: $u^- > \lambda > o^+$, so entspricht $\mathfrak{w}$ ein Weg im Kreise, der gegen Π konvergiert und in genügender Nähe von Π in dem Winkelraum liegt:

22) $$\frac{\pi(o^- - \lambda)}{o^- - o^+} + \varepsilon > \alpha > \frac{\pi(u^- - \lambda)}{u^- - u^+} - \varepsilon.$$

ε kann hierbei beliebig klein gewählt werden.

9. Die im vorstehenden angegebenen Grenzen sind natürlich nicht die im einzelnen Falle genauesten und es lassen sich in umfassenden Fällen genauere Grenzen festlegen. Ich will hier nur ein Beispiel anführen:

Ich nehme als Bereich $\mathfrak{B}$ das Rechteck $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, das ich mit den Einschnitten versehe

$$u = \frac{1}{n}, \qquad -1 < v \leqq 0.$$

Betrachte ich den Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, den ich erhalte, wenn ich die Punkte unter der Kurve $y = x^2 lx$ weglasse, so entspricht $\mathfrak{B}^*$ bei der Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf den Einheitskreis ein Teilgebiet K^*, das von einer Jordankurve begrenzt wird, die den Einheitskreis in dem Punkte Π berührt, der dem Punkte $P = (0, 0)$ entspricht. Betrachte ich nämlich den $\mathfrak{B}^*$ begrenzenden Querschnitt q_n im Streifen $\frac{1}{n} < u < \frac{1}{n-1}$, $-1 < v \leqq 0$, so ist für q_n, wenn $\frac{1}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{e}}$, also wenn $n \geqq 3$,

$$v \leqq -\frac{1}{n^2} l(n).$$

Zwischen diesen Querschnitt und die Punkte des Quadrates $[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)]$ schiebt sich ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnis $\frac{n-1}{n} l(n)$ stehen und dessen längere Seiten der Begrenzung von $\mathfrak{B}^*$ angehören (normierte Verbindungsstreifen). Nehme ich irgendeine Folge von Punkten $b_1, \ldots, b_n, \ldots, b_n$ auf q_n, so liegen die Bildpunkte $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ nach den Betrachtungen von **II.** von einem bestimmten nur von ε, nicht aber von der Folge der b abhängigen n außer dem Winkelraum $\pi - \varepsilon > \alpha > \varepsilon$, der an Π stößt.

Nun besitzt $\mathfrak{B}^*$ im Punkte P eine Ecke von der Öffnung $\frac{\pi}{2}$. Die Abbildung von $\mathfrak{B}^*$ auf K^* ist daher im Punkte Π mit dem Faktor 2 winkelproportional, und zwar in dem durch **2.** und **8.** festgelegten Sinne gleichmäßig. Ich kann daher sagen, daß die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf den Einheitskreis in gewissem Sinne für die inneren Winkelräume, die an Π stoßen, winkelproportional ist mit dem Faktor 2, doch gilt diese Beziehung nicht mehr gleichmäßig für alle Winkelräume zugleich, sondern nur für jeden für sich.

10. Die Voraussetzungen des Satzes **8.** lassen sich noch so verallgemeinern, daß das betreffende abgegrenzte Teilgebiet $\mathfrak{B}$ die Ebene höchstens N-mal überdeckt oder daß der Inhalt des abgegrenzten Gebietes, möglicherweise nach vorheriger Ausführung einer linearen Transformation, endlich ist. Im zweiten Falle müssen wir besonders voraussetzen, daß über dem Punkte, in den sich der erreichbare Punkt P projiziert, nicht unendlich viel Innenpunkte von $\mathfrak{B}$ liegen. Wir gehen jedenfalls zuerst mittels eines passenden Querschnittes zu einem Teilgebiet von $\mathfrak{B}$ über, das den Punkt P und den Punkt ∞ nicht überdeckt.

11. Die angewandte Methode läßt sich aber auf die Untersuchung der Abbildung noch in vielen anderen Fällen anwenden. Ich will hier auch nur ein Beispiel geben:

$\mathfrak{B}$ bestehe einmal aus der unteren Hälfte des Einheitskreises; an ihn schließe ich mittels der Streifen

$$0 < v < 1;\ \frac{1}{n} < u < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \text{ für } n \geqq 2, \text{ bzw. } \frac{1}{n} > u > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \text{ für } n \leqq -2$$

die längs eines Einschnittes $v = 1;\ \left|u - \frac{1}{n}\right| < \left|\frac{1}{2n}\right|$ aufgeschnittene Windungsfläche von $\log\left(\frac{w - \frac{1}{2n} - i}{w - n}\right)$. Für die Abbildung der so erhaltenen Riemannschen Fläche auf den Einheitskreis ist in den dem Punkt $P = (0, 0)$ entsprechenden Punkt Π $\mathfrak{H}(\Pi) = P$, während $H = r_1 = r$ gleich dem Wertebereich im Punkte Π ist, der aus der gesamten Ebene

besteht. Der einfach zusammenhängende Teil von $\mathfrak{B}$, der unter der Parabel $v = u^2$ liegt und dessen Berandung P enthält, wird auf ein Teilgebiet des Einheitskreises abgebildet, dessen begrenzende Jordankurve den Einheitskreis im Punkte Π berührt. Daher wird der an Π stoßende Winkelraum $\varepsilon < \alpha < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ gleichmäßig winkeltreu einem Winkelraum derselben Öffnung zugeordnet, der an P stößt; doch ist diese Beziehung nicht für alle ε mehr gleichmäßig.

IV. Zwei Sternsätze und verwandtes.

1. In meiner Arbeit [1]) habe ich den Satz nachgewiesen:

Jeder Stern einer im Endlichen meromorphen Funktion bedeckt die ganze Ebene mit Ausnahme einer Nullmenge.

Dazu ist einmal zu bemerken, daß der Satz z. B. auch gilt, wenn ich den Stern mit Hilfe eines Kreisbüschels statt eines Geradenbüschels bilde; dann gilt der Satz auch für mehrblättrige Sterne, die von einem Windungspunkte ausgehen.

Diesen Satz können wir sofort folgendermaßen verallgemeinern:

Ist $w = f(z)$ in dem schlichten Gebiet G eindeutig und in G sowie in allen seinen Randpunkten mit Ausnahme einer endlichen Zahl von singulären Punkten meromorph [39]), *so werden von den Strahlen irgendeines Sternes, der dem Riemannschen Bereiche über der w-Ebene angehört, der dem Gebiet G entspricht, höchstens die Strahlen einer Nullmenge im Endlichen von Konvergenzwerten jener singulären Punkte begrenzt.*

D. h. wenn ein Strahl nicht bis zu seinem Endpunkt dem Sterne angehört, so wird er von einem Verzweigungspunkt oder von einem Punkte begrenzt, der einem Randpunkte des Gebietes G entspricht. Unter diesen Strahlen gibt es nur eine Nullmenge, deren Endpunkte einen jener endlich vielen singulären Punkte besitzen. Dazu sei bemerkt, daß infolge unserer Voraussetzung über die Berandung $f(z)$ auf allen Strahlen gegen bestimmte Werte konvergiert.

Es sei bemerkt, daß G keineswegs einfach zusammenhängend zu sein braucht. Der Satz gilt wiederum für Kreisbüschelsterne und mehrblättrige Sterne, die von einem Windungspunkt ausgehen.

2. Der Beweis dieses Satzes ist dem Beweis des oben angeführten Satzes aus [1]) ganz analog. Ich will ihn hier kurz skizzieren, wobei es ausreicht, den Fall eines singulären Punktes zu behandeln.

Ich nehme irgendeinen Stern, dessen Mittelpunkt sich in $w = w_0$ pro-

[39]) Man beachte dazu die Bemerkung in **V. 1.** auf S. 287 und in **V. 3.** auf S. 289.

jiziert; durch eine lineare Transformation $\overline{w} = \frac{1}{w - w_0}$ werfe ich diesen Punkt ins Unendliche und spreche von einem Stern um den Punkt ∞, dessen Strahlen gegen den Gegenpunkt Null zielen. Die Punkte $|\overline{w}| \geqq R$ sollen Innenpunkte des Sternes sein. Ein solches R läßt sich stets finden. Wir betrachten nun jenen Teil T_r des Sternes, für den $R > |\overline{w}| > r > 0$. B_r sei sein Bild in G. Wir können annehmen, daß der singuläre Punkt P im Endlichen liegt; nötigenfalls erreichen wir dies durch eine lineare Transformation. Das Bildgebiet der Punkte des Sternes, für das $|\overline{w}| \geqq R$, besitzt von P einen von Null verschiedenen endlichen Abstand $2\varrho_0$. Die Querschnitte von B_r, die auf dem Kreise $|z - P| = \varrho_1 \leqq \varrho_0$ liegen, trennen in ihrer Gesamtheit in B_r das Bild des Sternmittelpunktes von P. Nun haben wir

$$(23) \qquad \iint_{B_{r,\varrho_1}} \left|\frac{d\overline{w}}{dz}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \cdot \iint_{B_{r,\varrho_1}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi \geqq \int_0^{\varrho_1} d\varrho \int_{k_\varrho} \left|\frac{d\overline{w}}{dz}\right| \varrho\, d\varphi.$$

wobei B_{r,ϱ_1} den in B_r gelegenen Teil des Kreises $|z - P| < \varrho_1$ bezeichnet, während unter k_ϱ die auf dem Kreise $|z - P| = \varrho$ gelegenen Querschnitte von B_r zu verstehen sind. Da $\iint_{B_{r,\varrho_1}} \left|\frac{d\overline{w}}{dz}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi$ mit ϱ_1 gegen Null geht, ist die untere Grenze der Länge der den Querschnitten k_ϱ entsprechenden Querschnitte des Sternes gleich Null. Da aber jeder Strahl der für $r > 0$ von einem P entsprechenden Konvergenzwert begrenzt wird, diese Querschnitte durchsetzen muß, so bilden diese Strahlen für ein bestimmtes r eine Nullmenge, und da ich r beliebig klein wählen kann, ist somit unser Satz erwiesen.

Der Satz läßt sich auch leicht auf nicht schlichte Bereiche G übertragen, doch gehen wir hier nicht darauf ein.

3. Der im vorstehenden bewiesene Satz ist von sehr großer Tragweite und vielfältiger Anwendbarkeit. So werden wir in V. hieraus die Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems folgern. So wollen wir, wenn es auch nicht unbedingt nötig hierzu wäre, den Satz zu dem Nachweise der Tatsache benutzen, daß es keine im Einheitskreis meromorphe Funktion gibt, bezüglich der der Häufungsbereich des Randpunktes I etwa aus den Punkten $|w| \leqq 1$ besteht, während r_1 aus der oberen Hälfte der Peripherie, r_2 aus der unteren Hälfte besteht. Ich ersetze zuerst den Einheitskreis durch eine seine Peripherie im Punkte Π berührende Jordankurve $\mathfrak{B}$, innerhalb und auf der $f(z)$ mit Ausnahme des Punktes Π regulär ist und die bezüglich $f(z)$ die gleichen Größen H, r_1, r_2 besitzt wie der Einheitskreis. Nach der Verallgemeinerung des Picardschen Theorems müßte dann jeder Wert $|w| < 1$ innerhalb $\mathfrak{B}$ mit Ausnahme eines einzigen

unendlich oft angenommen werden[40]). Ich wähle einen Punkt w_0 in der Nähe $\frac{1}{4}$ des Nullpunktes, über dem kein Verzweigungspunkt liegt und der von dem etwa vorhandenen Ausnahmewert verschieden ist. Ich bilde nun zu den unendlich vielen über w_0 liegenden regulären Punkten der zu $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{W}$ gehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}^*$ die zugehörigen Sterne. Da in jedem Sterne die Strahlen, die von einem Verzweigungspunkt, bzw. von einem Konvergenzwert von Π begrenzt werden, eine Nullmenge bilden, und da abzählbarviele Nullmengen wieder eine Nullmenge geben, so läßt sich eine durch w_0 gehende Gerade g finden, deren Neigungswinkel gegen die u-Achse beliebig wenig von $\frac{\Pi}{2}$, z. B. um weniger als $\frac{\Pi}{6}$ verschieden ist, so daß in jedem Sterne jeder der beiden über dieser Geraden liegenden Sternstrahlen von Punkten begrenzt wird, deren Bilder auf $\mathfrak{W}$ liegen und von Π verschieden sind. Wir erhalten auf diese Art unendlich viele Querschnitte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ von $\mathfrak{R}^*$, deren Bilder $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ Querschnitte des Innengebietes von $\mathfrak{W}$ sind, deren Endpunkte von Π verschieden sind. Da die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, von denen a_n auf q_n liegt und für die $f(a_n) = w_0$, gegen den Punkt Π konvergieren, so schließen wir, daß die q_n von einem bestimmten n: $\bar{n}$ ab in der Nachbarschaft ϱ des Punktes Π liegen: denn ist b ein Punkt innerhalb oder auf $\mathfrak{W}$, so läßt sich auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, die zu $f(z)$ im Einheitskreis gehört, um den Bildpunkt $\bar{b}$ eine kreisförmige Umgebung oder ein kreisförmig begrenztes Stück einer N-blättrigen Windungsfläche um $\bar{b}$ angeben; in diese kann aber nur ein, bzw. N Querschnitte $\mathfrak{q}$ eindringen.

Die Nachbarschaft ϱ wähle ich nun so klein, daß auf den rechts von Π gelegenen Teilen von $\mathfrak{W}$, für die $|z - \Pi| < \varrho$ $f(z)$ Werte annimmt, die sich von r_1 um weniger als $\varepsilon < \frac{1}{4}$ unterscheiden, während auf den links von Π gelegenen Teilen von $\mathfrak{W}$, für die $|z - \Pi| < \varrho$ $f(z)$ Werte annimmt, die sich von r_2 um weniger als ε unterscheiden. Dann muß von $\bar{n}$ an der eine Endpunkt eines q_n rechts von Π, der andere links von Π auf $\mathfrak{W}$ liegen. Ich kann es nun durch eine Umbezeichnung erreichen, daß von einem bestimmten n ab alle q_n diese Eigenschaft haben, q_{n-1} durch q_n von q_{n+1} getrennt wird und zwischen q_n und q_{n+1} kein Querschnitt q mehr liegt.

Ich betrachte jetzt das Teilgebiet Γ, das zwischen q_n und q_{n+1} liegt. Auf $\mathfrak{R}^*$ entspricht ihm ein Gebiet $\bar{\Gamma}$, das außer von zwei Begrenzungsstücken, die dem Bilde von $\mathfrak{W}$ angehören, von $\mathfrak{q}_n$ und $\mathfrak{q}_{n+1}$ begrenzt wird. Umlaufen wir das Gebiet, so wird die Gerade g in den über ihr

[40]) Hätte $f(z)$ zwei Ausnahmewerte innerhalb $|w| < 1$, so würde jeder Wert außerhalb unendlich oft überdeckt, würde also H angehören, bzw. $f(z)$ könnte nicht regulär sein innerhalb $\mathfrak{W}$.

liegenden Querschnitten q_n und q_{n+1} in entgegengesetzter Richtung durch laufen. Daher liegen die an q_n und q_{n+1} anschließenden Teile des Ge bietes $\bar{\Gamma}$ auf verschiedenen Seiten von g. Da durch die Gesamtheit de Querschnitte von $\bar{\Gamma}$, die über g liegen, q_n und q_{n+1} getrennt werden, s muß es also mindestens einen Querschnitt geben, der q_n und q_{n+1} trennt Da dessen Bild einen Endpunkt rechts von Π, den andern links von Π besitzen müßte, so müßte der Querschnitt den Punkt w_0 von g über decken; dann müßte aber der Querschnitt unter den q_n vorkommen wider die Voraussetzung, daß zwischen q_n und q_{n+1} kein Querschnitt mehr vorkommen solle, womit unsre Behauptung erwiesen ist.

Dieser Gedankengang liefert uns den Beweis des Satzes:

Enthält die orientierte Gerade eine möglicherweise durchs Unendliche sich erstreckende Strecke S, die $H(P)$ angehört, und gehört ihr Anfangspunkt r_1, ihr Endpunkt r_2 an, während in ihr kein Punkt von r_1 und r_2 liegt, so liegt auf g entweder ein Punkt, der r_1 und r_2 zugleich angehört, oder eine Strecke $\bar{S}$, die $H(P)$ angehört, mit S höchstens die Endpunkte gemein hat, in ihrem Innern keinen Punkt von r_1 und r_2 enthält, deren Anfangspunkt aber r_2, deren Endpunkt r_1 angehört. $\bar{S}$ erstreckt sich möglicherweise durch Unendliche.

So z. B. ist es auch unmöglich, daß r_1 vom Kreise $|w-1|=2$ r_2 vom Kreise $|w+1|=2$ gebildet wird, während H aus den beiden abgeschlossenen Teilgebieten gebildet wird, die von diesen beiden Kreisen begrenzt werden und 0 und ∞ nicht enthalten.

4. Wir können ferner durch entsprechende Verwertung unsrer Ungleichung auch den Schluß ziehen:

Ist $w=f(z)$ in dem schlichten Gebiete G eindeutig und meromorph, so werden von den Strahlen irgendeines Sternes, der dem Riemannschen Bereiche über der w-Ebene angehört, der dem Gebiet G entspricht, sofern sie vor dem Gegenpunkt des Sternmittelpunktes begrenzt sind, nur eine Nullmenge Bilder besitzen, die gegen keinen Punkt konvergieren.

Wir führen wieder eine neue Veränderliche $\bar{w}$ wie in 2. ein, so daß der Mittelpunkt des Sternes ins Unendliche verlegt wird. Wir können annehmen, daß das Bild des Sternes S^* in der z-Ebene ein Kontinuum unbedeckt läßt, denn sonst müßte die zu G gehörige Riemannsche Fläche aus der punktierten oder nichtpunktierten Vollebene bestehen und der Satz ist selbstverständlich. Dann erreichen wir es aber mittels einer linearen Transformation oder einer Quadratwurzeloperation, daß das Bild des Sternes in der $\bar{z}$-Ebene schlicht und beschränkt ist. Daher ist $\iint_{\bar{S}_{R,r}} \left|\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi$ endlich, wenn $\bar{S}_{R,r}$ jenen Teil des Sternes über de

$\overline{w}$-Ebene bezeichnet, für den $R > |\overline{w}| > r$. Hierbei bestimmen wir R wie in **2.** Nun ist

$$24) \quad \iint_{\overline{S}_{R,r}} \left|\frac{dz}{d\overline{w}}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \cdot \iint_{\overline{S}_{R,r}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi \geqq \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\overline{S}_{R,r}} \left|\frac{d\overline{z}}{d\overline{w}}\right| \varrho\, d\varrho\right)^2$$

$$\geqq r^2 \left(\int_0^{3\pi} d\varphi \int_{\overline{S}_{R,r}} \left|\frac{d\overline{z}}{d\overline{w}}\right| d\varrho\right)^2.$$

Daraus folgt aber, daß nur für eine Nullmenge von φ das Integral $\int_{\overline{S}_{R,r}} \left|\frac{d\overline{z}}{dw}\right| d\varrho$, erstreckt über den dem Werte φ entsprechenden Sternstrahl zwischen R und r den Wert unendlich besitzt und hiermit ist unser Satz erwiesen.

5. Umgekehrt läßt sich aus (24) in Verbindung mit **II. 3., 9.** für Funktionen, die einen schlichten oder die z-Ebene n-fach überdeckenden Bereich auf den Einheitskreis der w-Ebene abbilden, der Fatousche Satz schließen, daß die Funktion $\varphi(w)$ für fast alle Randpunkte gegen einen bestimmten Wert konvergiert, und zwar auf jedem den Einheitskreis im weiteren Sinne nicht berührenden Wege. Dieser Schluß folgt auch dann, wenn der Riemannsche Bereich endlichen Inhalt besitzt. Wir haben einfach

$$\iint_E \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \cdot \iint_E \varrho\, d\varrho\, d\varphi = 2\pi \iint_E \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \geqq$$

$$\geqq \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left|\frac{dz}{dw}\right| \varrho\, d\varrho\right)^2.$$

Daher ist $\int_0^1 \left|\frac{dz}{dw}\right| \varrho\, d\varrho > \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{dz}{dw}\right| d\varrho$ nur für eine Nullmenge von φ unendlich, d. h. die Bilder von fast allen Strahlen müssen konvergieren. Mit Benutzung von **II. 9.** ergibt sich daher der Satz:

Ist $f(z)$ längs einer analytischen Kurve K auf einer Seite definiert und läßt sich eine Umgebung abgrenzen, so daß $\iint |f'(z)|^2\, dx\, dy$, über diese Umgebung erstreckt, endlich ist, so konvergiert $f(z)$ in allen Punkten von K mit Ausnahme einer Nullmenge gegen einen bestimmten Wert für jeden Weg, der K in weiterem Sinne nicht berührt.

Statt der Endlichkeit von $\iint |f'(z)|^2\, dx\, dy$ genügt es auch, wenn $\iint |\varphi'(z)|^2\, dx\, dy$ endlich ist, wobei $\varphi(z)$ eine lineare Transformierte von $f(z)$ oder z. B. eine in dieser Umgebung eindeutige, durch eine Quadratwurzeloperation aus $f(z)$ entstehende Funktion ist.

Der Satz ist keineswegs eine Folgerung des Fatouschen Satzes, denn unter der angegebenen Voraussetzung braucht $f(z)$ kein Kontinuum auszulassen. Wir können z. B. das Beispiel von **II. 21.** so umgestalten, daß der Wertebereich der Abbildungsfunktion im Punkte P die Punkte P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$, sowie sämtliche Strecken $\overline{P_i P_k}$ enthält. Ich bringe einfach vor Konstruktion die Punkte P_i in eine bestimmte Reihenfolge:

$$\underbrace{P_1 P_2}_{(1,2)} \underbrace{P_1 P_2 P_3}_{(1,2,3)} \underbrace{P_1 P_2 P_3 P_4 P_3 P_3 P_1 P_4 P_1}_{(1,2,3,4)} \ldots,$$

indem wir die Gruppen $(1, 2, 3, \ldots, n)$ aneinanderfügen, deren jede mit P_1 beginnt und mit P_1 schließt[41]) und so beschaffen ist, daß in ihr auf P_i mindestens einmal P_k oder auf P_k mindestens einmal P_i folgt $(i, k \leqq n)$. In dieser Reihenfolge bezeichnen wir die Punkte P_i als $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ und von dieser Anordnung ausgehend konstruieren wir uns den entsprechenden Riemannschen Bereich. In diesem Falle enthält jedes Kontinuum Punkte des Wertebereichs.

6. Zum Schlusse will ich noch eine übrigens aus meiner ersten Arbeit[1]) unmittelbar hervorgehende Verschärfung eines von Iversen in II.[3]) S. 16 bewiesenen Satzes angeben:

Wenn $f(z)$ im Innern und am Rande eines Gebietes Γ mit Ausnahme des Randpunktes P meromorph ist und wenn durch $w = f(z)$ den Randpunkten Punkte einer geschlossenen analytischen doppelpunktfreien Kurve k[42]) *entsprechen, während jedem Innenpunkt des Gebietes ein Punkt innerhalb k entspricht, so fällt $H(P)$ entweder mit dem abgeschlossen gemachten Innengebiet $\overline{K}$ von k zusammen oder besteht aus einer linearen Nullmenge von k.*

Fällt $H(P)$ nicht mit $\overline{K}$ zusammen, so kann nach dem verallgemeinerten Picardschen Theorem[43]) kein Innenpunkt von K $H(P)$ angehören. Ist G ein ganz im Innern von k gelegenes Gebiet, so kann es, wie wir mit Iversen schließen, in T nur eine endliche Anzahl von Bildern von G geben, die von P eine von Null verschiedene Entfernung haben. Da in diesen Bildern $f(z)$ meromorph ist, wird jeder Punkt von G in Γ gleich oft angenommen. Da ich G ganz beliebig wählen konnte, so folgt, daß die Γ entsprechende Riemannsche Fläche das Innengebiet von k genau n-mal überdeckt.

Die Punkte von k, die $H(P)$ angehören, liegen in jenen Stücken von k, die von den Bildern der auf dem Kreise $|z - P| = \varrho$ gelegenen

[41]) Beim Aneinanderfügen unterdrücken wir das erste P_1 jeder Gruppe.
[42]) Es würde genügen, eine rektifizierbare Jordankurve vorauszusetzen.
[43]) S. V.

Querschnitte ausgeschnitten werden; da auf jenen Querschnitten mit Einschluß der Endpunkte $f(z)$ meromorph sind, ist das Bild jedes solchen Querschnitts ein Querschnitt q_ϱ des Innengebietes von k, der beiderseits gegen Punkte von k konvergiert. Die untere Grenze für $\varrho \to 0$ der Längen aller q_ϱ für ein bestimmtes ϱ ist aber, wie man aus der Ungl. $(1')$ schließt, Null und daher ist $H(P)$ eine lineare Nullmenge.

V. Die Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems.

1. Der in **IV. 1.** ausgesprochene Satz gestattet es uns, in einfacher Weise die Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems, wie sie von Lindelöf und Iversen und unabhängig davon und etwas weitergehend von mir aufgestellt wurden, zu beweisen. Und zwar werden wir noch zu weitergehenden Resultaten gelangen. Wir formulieren zwei Voraussetzungen:

Voraussetzung (A): $f(z)$ sei innerhalb der Jordankurve $\mathfrak{W}$ meromorph. In diesem Falle bezeichnen wir als Häufungsbereich h der Berandung $\mathfrak{W}$ im Punkte P bezüglich $f(z)$ die Vereinigungsmenge von r_1 und r_2.

Voraussetzung (B): $f(z)$ sei im Gebiete G und in dessen Randpunkten meromorph mit Ausnahme des Randpunktes P.

Dies ist dabei so zu verstehen: Ist c irgendein Randpunkt, der von P verschieden ist, so nimmt $f(z)$ in einer gewissen Umgebung von c Werte an, die ein und demselben Element von $f(z)$ im Punkte c zukommen. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, daß auf jedem Kreis $|z - P| = \mathfrak{r}$, der durch keinen der Pole von $f(z)$ geht, in der abgeschlossenen Punktmenge, die G und seine Berandung mit diesem Kreise gemein haben, $f(z)$ stetig ist.

Hier definieren wir den Häufungsbereich h der Berandung des Gebietes G im Punkte P folgendermaßen: Wir machen die Bilder der Randpunkte von G, für die $\varrho > |z - P| > 0$ abgeschlossen, und bilden den Durchschnitt dieser Mengen $\overline{M}_\varrho$. Die so erhaltene Menge h ist abgeschlossen. Sie braucht nicht zusammenhängend zu sein.

$H(P)$ braucht gleichfalls nicht zusammenhängend zu sein; jeder Punkt aber, der keinem Teilkontinuum von H angehört, gehört h an; ferner jedes größte Teilkontinuum von H enthält auch Punkte von h. Dies folgt unmittelbar, wenn wir $H(P)$ durch Grenzübergang bilden, indem wir die Werte, die $f(z)$ in G für $|z - P| < \varrho$ annimmt, abgeschlossen machen und dann mit ϱ zur Grenze Null übergehen.

Im Falle der Voraussetzung (A) ersetze ich für den Beweis nach **I. 7.** $\mathfrak{W}$ durch einen in $\mathfrak{W}$ liegenden Jordanweg, der mit $\mathfrak{W}$ nur den Punkt P gemein hat, auf dem $f(z)$ mit Ausnahme des Punktes P meromorph ist

und der im Punkte P dieselben Größen H, r_1, r_2 besitzt wie $\mathfrak{W}$. Sein Innengebiet bezeichne ich mit G.

2. *Genügt $f(z)$ der Voraussetzung* (A) *bzw. der Voraussetzung* (B) *und enthält $H(P)$ einen Punkt eines der von $h(P)$ bestimmten Komplementärgebiete γ, so enthält $H(P)$ jeden Punkt dieses Gebietes γ; alle Punkte von γ mit Ausnahme einer Nullmenge werden in G unendlich oft angenommen.*

Sei p ein Punkt von H in γ, σ sein Abstand von h. Ich wähle dann ϱ so, daß für die Randpunkte von G, für die $\varrho > |z-P| > 0$, $f(z)$ in der Nachbarschaft $\frac{\sigma}{3}$ von h liegt und daß für keinen der abzählbar vielen Nullpunkte und Pole von $f(z)-p$ auf G und seinen Randpunkten $|z-P| = \varrho$. Dann besitzt $|f(z)-p|$ auf den Randpunkten der Gebiete, die den Durchschnitt Γ von G mit dem Kreise $|z-P| < \varrho$ bilden, eine von Null verschiedene untere Grenze τ. — Es tut der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir p als endlich voraussetzen.

Nimmt $f(z)$ in Γ^*, das ich aus Γ durch Ausscheidung der abzählbar vielen Nullstellen von $f'(z)$ erhalte, einen Wert aus $|w-p| < \tau$ n-mal an, so nimmt sie jeden Wert aus $|w-p| < \tau$ mit Ausnahme einer Nullmenge mindestens n-mal an; sei w_0 nämlich ein Wert, der in Γ^* n-mal angenommen wird, so liegen über ihm genau n reguläre Elemente. Bilde ich dann die zu ihnen in R^* gehörigen Sterne, so überdecken sie nach IV. 1. den ganzen Kreis mit Ausnahme einer Nullmenge n-mal.

Würde daher $f(z)$ jeden Wert w aus K: $|w-p| < \tau$ in Γ^* nur endlich oft annehmen, so gäbe es eine Zahl N, daß $f(z)$ keinen Wert aus $|w-p| < \tau$ mehr als N-mal, hingegen jeden dieser Werte mit Ausnahme einer Nullmenge genau N-mal annähme. Ist dann w_0 ein Punkt über dem genau N reguläre Werte liegen, so werden alle regulären Punkte von $\mathfrak{R}^*$, die über $|w-p| < \tau$ mit Ausnahme einer Nullmenge N liegen, durch die N Sterne über w_0 erschöpft. Die Punkte von $H(P)$ könnten in K: $|w-p| < \tau$ nur auf einer abgeschlossenen Nullmenge von Strahlen durch w_0 liegen. Da $H(P)$ p und damit ein Kontinuum enthält, das mit h verbindet, so gehört also der Radius des Kreises K, der p enthält und dessen Verlängerung über p hinaus durch w_0 geht, $H(P)$ an. Nun läßt sich ein kleiner Bogen des Kreises $|w-p| = |w_0-p|$ um w_0 fest stellen, über dem in den N Sternen lauter reguläre Punkte liegen. Verwende ich einen dieser Punkte w^* statt w_0, so könnten wir wieder schließen, daß der Radius des Kreises K, dessen Verlängerung über w^* geht, $H(P)$ angehört, d. h. ein ganzer Sektor des Kreises würde $H(P)$ angehören im Widerspruch zur obigen Folgerung, daß $H(P)$ in K aus einer Nullmenge besteht.

$f(z)$ nimmt daher mindestens einen Wert aus K: $\overline{w}$ in Γ^* unendlich oft an; über $\overline{w}$ liegen unendlich viele reguläre Elemente von $\mathfrak{R}^*$. Die zugehörigen Sterne überdecken den Kreis K mit Ausnahme einer Nullmenge unendlich oft.

Daher gehört die Umgebung τ des Punktes p dem Wertebereich im Punkte P an. Da zu jedem Punkte p von $H(P)$ in γ eine Umgebung τ gehört, die $H(P)$ angehört, so gehört mit einem Punkte ganz γ zu $H(P)$. Da sich ferner nach dem Lindelöfschen Überdeckungssatz[44]) ganz γ mit abzählbar vielen Umgebungen τ überdecken läßt, jede derselben aber von $\mathfrak{R}^*$ mit Ausnahme einer Nullmenge unendlich oft überdeckt wird, so wird also jeder Wert von γ mit Ausnahme einer Nullmenge in T und daher in G unendlich oft angenommen.

3. Wir könnten den Beweis des vorstehenden Satzes, sowie des Satzes IV, 1 auch für den Fall führen, daß unter den Randpunkten endlich viele transzendente Stellen $P_1, \ldots P_n$ auftreten, daß unter den Randpunkten Verzweigungspunkte vorkommen und daß sich jedem Randpunkt Q außer den Stellen P_i eine endliche Anzahl von regulären, bzw. Verzweigungselementen zuordnen läßt, daß die Werte, die $f(z)$ in G und auf seiner Berandung annimmt, in einer bestimmten Nachbarschaft von Q diesen Elementen angehören.

Wir könnten unter bestimmten Einschränkungen sogar nicht schlichte Bereiche zulassen, doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

4. Als Zusatz können wir hinzufügen:

Ist c ein Wert von γ, der in G höchstens n-mal angenommen wird, während γ zu $H(P)$ gehört, so gibt es einen Jordanweg in G, der gegen P konvergiert und auf dem $f(z)$ gegen c strebt[45]).

Es genügt, den Satz für endliche c zu beweisen.

Ich nehme bei dem Verfahren am Anfange von **2.** als Punkt p den Punkt c und wähle ϱ obendrein so klein, daß in dem Durchschnitt Γ von G mit dem Kreise $|z - P| < \varrho$ $f(z)$ den Wert c nicht mehr annimmt. Γ besitzt wieder von den Bildern der Randpunkte von Γ einen von Null verschiedenen Abstand τ. Sei nun $w_0 : |w_0 - c| < \tau$ ein Punkt, über dem ein reguläres Element der Γ zugehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}^*$ gehört. Von diesem Punkt ausgehend, bilde ich den Kreisbüschelstern mit den Büschelpunkten w_0 und c. Von jenen Kreisbogen, die im Kreise $|w - c| < \tau$ w_0 und c verbinden, gehören alle mit Ausnahme einer Nullmenge dem Sterne an. Der einem solchen entsprechende Weg ist ganz

---

[44]) Vgl. etwa Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 46.

[45]) Vgl. Iversen I [3]). S. 23 und meine Arbeit [1]) I, S. 10.

in Γ enthalten und kann, da in Γ und auf seiner sonstigen Berandung keine Nullstelle von $f(z) - c$ liegt, nur gegen P konvergieren.

5. *Genügt $f(z)$ der Voraussetzung* (A), *bzw.* (B) *und enthält $H(P)$ einen Punkt eines der von $h(P)$ bestimmten Komplementärgebiete γ, so kann die Menge der Werte von γ, die in G nur endlich oft angenommen werden, kein Kontinuum enthalten.*

Die Punkte von γ, die von $f(z)$ in G höchstens n-mal angenommen werden, bilden eine in γ abgeschlossene Menge. Enthält die Menge der Werte von γ, die in G nur endlich oft angenommen werden, ein Kontinuum, so gibt es ein erstes N, so daß die Menge der Werte von γ, die in G höchstens N-mal angenommen werden, ebenfalls ein Kontinuum k enthalten; denn die Vereinigungsmenge von abzählbarvielen abgeschlossenen kontinuumfreien Mengen ist wieder abgeschlossen und kontinuumfrei. Ich nehme jetzt einen Wert c von k, der in G genau N-mal angenommen wird. Die entsprechenden Punkte in G haben von P einen Abstand $> 2\varrho$. Ich wähle nun um jeden dieser Punkte eine Umgebung $< \varrho$ in G. Ihre Bilder in der G entsprechenden Riemannschen Fläche überdecken eine gewisse Umgebung U von c zumindest N-mal. In dem Durchschnitt Γ von G mit dem Kreise $|z - P| < \varrho^* \leqq \varrho$ nimmt $f(z)$ keinen Wert von k an, der in U liegt. Ich nehme ein Teilkontinuum k^* dieser Menge; k^* besitzt von h endlichen Abstand σ. Ich nehme nun ϱ^* so klein, daß $f(z)$ in den Randpunkten von G für $|z - P| < \varrho^*$ Werte annimmt, die in der Nachbarschaft $\frac{\sigma}{3}$ von h liegen. Dann nimmt $f(z)$ auch auf der Berandung von Γ keinen Wert von k^* an.

Es sei $\overline{w} = \psi(w)$ jener Zweig von $\sqrt{\frac{w-a}{w-b}}$, worin a und b zwei Punkte aus dem Kontinuum k^* sind, der für $w = \infty$ den Wert $+1$ annimmt, in der w-Ebene auf Wegen fortgesetzt, die das Kontinuum k^* nicht treffen. $\overline{w}$ ist in der w-Ebene außer k^* eindeutig und daher ist die Funktion $F(z) = \psi(f(z))$ in Γ eindeutig und erfüllt die Voraussetzung (B), höchstens mit Ausnahme dessen, daß Γ möglicherweise kein Gebiet ist. — Daß Γ möglicherweise nicht zusammenhängend ist, tut nichts zur Sache. Wir könnten schon in der Voraussetzung (B) den Zusammenhang von G fallen lassen, da wir diese Eigenschaft beim Beweise nicht gebrauchen. — $\overline{H}, \bar{h}$ für F geht aus H, h für f durch die Abbildung $w = \psi(w)$ hervor, wenn wir sie noch auf die Punkte von k^* erstrecken. Das Komplementärgebiet γ geht dabei in ein die Punkte $0, \infty$ enthaltendes Gebiet $\bar{\gamma}$ über, das Komplementärgebiet von $\bar{h}$ ist und Punkte von $\overline{H}$ enthält. Da aber ein Gebiet von $\bar{\gamma}$ — das Bild, das der zweite Zweig von $\sqrt{\frac{w-a}{w-b}}$ von der w-Ebene entwirft — lauter Werte enthält, die von $F(z)$ in Γ nicht an

genommen werden, so würde entgegen dem Satze von 2. ein Teilgebiet von $\bar{\gamma}$ von $\overline{H}$ frei sein. Dieser Widerspruch zeigt die Wahrheit unseres Satzes.

6. Ist der Bereich G einfach zusammenhängend, also insbesondere bei der Voraussetzung (A) lassen sich noch weitergehende Schlüsse ziehen. Bedeckt nämlich die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$, die zu $f(z)$ in G gehört, drei Punkte eines Komplementärgebietes γ von h nur endlich oft, bzw. allgemeiner: ist sie über 3, 4, 5 Punkten von γ ausnahmsverzweigt, während $H(P)$ Punkte von γ enthält, so läßt sich, wie ich in [1]) gezeigt habe, durch die Modulfunktion, die Schwarzschen Dreiecksfunktionen, bzw. verwandte Transzendente ein Teilstück der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, das durch einen Querschnitt begrenzt wird, dessen Bild in G von P einen Abstand ungleich Null besitzt, eindeutig auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$ beziehen, so daß $\mathfrak{R}^*$ z. B. das Äußere des Einheitskreises unbedeckt läßt. Das γ entsprechende Komplementärgebiet von $h^*: \gamma^*$ enthält einerseits Punkte von $H^*(P)$, während es gleichzeitig das Äußere des Einheitskreises enthält, so daß $H^*(P)$ im Widerspruch zu 2. einen Teil von γ^* nicht bedeckte.

Ja noch mehr, bedeckt $\mathfrak{R}$ drei Punkte nur endlich oft, von denen zwei in γ liegen, oder allgemeiner: ist $\mathfrak{R}$ über der ganzen Ebene 3-, 4-, 5 punktig ausnahmsverzweigt und liegen, je nachdem, 2, 3, 4 der bezüglichen Verzweigungspunkte in γ, so läßt sich ebenfalls eine derartige Fläche $\mathfrak{R}^*$ finden. Daraus folgen die nachstehenden Sätze, die gegenüber den entsprechenden Sätzen von [1]) etwas allgemeinere Voraussetzung haben.

Gilt die Voraussetzung (A), *bzw. ist bei der Voraussetzung* (B) *das Gebiet G einfach zusammenhängend und gehört ein Punkt des Komplementärgebietes γ von $h(p)$ $H(p)$ an, so nimmt $f(z)$ in G jeden Wert von γ mit Ausnahme von höchstens zwei unendlich oft an. Gibt es aber zwei Werte von γ, die $f(z)$ in G nur endlich oft annimmt, so nimmt $f(z)$ jeden anderen Wert der Vollebene unendlich oft an.*

Allgemeiner: *Die zu G gehörige Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ kann nicht* 3-, *bzw.* 4-, *bzw.* 5 *punktig ausnahmsverzweigt sein, so daß* 2, *bzw.* 3, *bzw.* 4 *der bezüglichen Verzweigungspunkte in γ liegen.*

7. Ich will den von Lindelöf bewiesenen und in meiner ersten Arbeit besonders hervorgehobenen Sonderfall eigens erwähnen:

Münden in P zwei von P_0 ausgehende Jordanwege $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, die zusammen ein einziges Innengebiet G begrenzen, ist ferner $f(z)$ in G und auf seinem Rande mit Ausnahme von P meromorph und geht $f(z)$ bei der Annäherung von P auf $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gegen zwei verschiedene

Grenzwerte a, b, so nimmt $f(z)$ jeden Wert mit Ausnahme von zweien unendlich oft an.

Denn $H(P)$ ist ein Kontinuum, das a und b enthält.

Eine unmittelbare Folgerung ist ferner der Satz:

Konvergiert $f(z)$ auf $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gegen denselben Grenzwert a, so muß $f(z)$ für $z \to P$ in G gleichmäßig gegen diesen Grenzwert konvergieren oder $f(z)$ nimmt jeden Wert mit Ausnahme von zweien unendlich oft an,

aus dem Lindelöf umgekehrt, soviel ich aus Iversen I ersehe, obigen Satz abgeleitet hat; im zweiten Falle enthält nämlich $H(P)$ Punkte, die von a verschieden sind und deshalb in dem von a bestimmten Komplementärgebiet liegen.

8. Will man nur den ersten Teil von **6.** unter der Voraussetzung (A) beweisen, so kann man, einem Gedanken von Iversen folgend, so vorgehen:

Aus dem Satze **2.** folgt mittels der Modulfunktion sofort der erste Satz von **7.** Würden bei der Voraussetzung (A) zwei Werte a, b aus dem Komplementärgebiet γ von $h(P)$, das mindestens einen Punkt von $H(P)$ enthält, nur endlich oft angenommen, so folgt aus dem Satze von **4.**, daß es zwei in P mündende Jordanwege $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ gibt, auf denen $f(z)$ gegen a bzw. gegen b konvergiert. In dem zwischen $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gelegenen Teilgebiet des Innengebiets von $\mathfrak{W}$ nimmt $f(z)$ jeden Wert mit Ausnahme von a und b unendlich oft an, daher erst recht im Innengebiet von $\mathfrak{W}$.

9. In der Arbeit [5]) habe ich folgenden wichtigen Satz nachgewiesen:

Läßt sich von einer Riemannschen Fläche R über der w-Ebene durch einen Querschnitt oder ein System von Querschnitten Q ein Teil T so abtrennen, daß T ein Kontinuum $\varkappa$ der w-Ebene höchstens $(n-1)$-mal (endlich oft) bedeckt, dessen Randpunkte — hierbei ist $\varkappa$ als größtmögliches Kontinuum dieser Beschaffenheit vorausgesetzt — nicht sämtlich in der Punktmenge M enthalten sind, die wir erhalten, wenn wir die Projektion von Q abgeschlossen machen, und konvergiert die auf R eindeutige analytische Funktion $\varphi(w)$ auf jedem Einschnitt gegen Null, der gegen einen nicht in M enthaltenen Punkt strebt, so ist $\varphi(w)$ identisch Null.

Ich will nun zum Schluß meiner Arbeit zeigen, daß sich aus diesem Satze folgendes Ergebnis (Satz von **5.**) ableiten läßt:

Genügt $f(z)$ der Voraussetzung (A) *bzw. der Voraussetzung* (B) *und enthält $H(P)$ einen Punkt eines der von $h(P)$ bestimmten Komplementärgebiete γ, so nimmt $f(z)$ in G jeden Wert unendlich oft an mit Ausnahme einer Menge, die kontinuumfrei ist.*

Wir bestimmen nach 2. zu dem Punkte p von H in γ die Größe τ, so daß $f(z)$ in den Randpunkten von G, für die $\varrho \geqq |z-P| > 0$, und in den Punkten von G, für die $|z-P| = \varrho$, nur Werte annimmt, für die $|w-p| \geqq \tau$. Ich betrachte nun die zusammenhängenden Teile der zu $f(z)$ in G gehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, für die $|w-p| < \tau$. Enthält einer dieser Teile einen Punkt, für dessen Bildpunkt $|z-P| < \varrho$, so liegen die sämtlichen Bildpunkte dieses Teiles im Kreise $|z-P| < \varrho$. Ich betrachte nur solche Teile: $B_1, B_2, \ldots$

Auf $\mathfrak{R}$ ist die Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ eindeutig und analytisch (meromorph). B_i wird von $\mathfrak{R}$ durch eine Reihe von Querschnitten abgetrennt, deren Projektionen sämtlich auf dem Kreise $|w-p| = \tau$ liegen. Irgendein Einschnitt von B_i, der gegen einen Punkt im Innern des Kreises $|w-p| = \tau$ geht, besitzt in G ein Bild, das gegen P strebt, d. h. $\varphi(w)$ geht auf ihm gegen Null.

Bedeckt B_i einen Punkt der w-Ebene unendlich oft, so muß B_i nach obigem Satze den ganzen Kreis K: $|w-P| < \tau$ unendlich oft überdecken, mit Ausnahme einer kontinuumfreien Menge, und damit ist unser Satz erwiesen.

Oder aber jedes der B_i bedeckt die Punkte von K nur endlich oft; dann läßt sich, wie aus obigem Satz folgt, eine ganze Zahl N_i so angeben, daß B_i jeden Punkt von K mit Ausnahme einer kontinuumfreien Menge m_i genau N_i-mal überdeckt. (Von einer Windungsstelle n^{ter} Ordnung sagen wir, sie bedeckt den Punkt, in den sie sich projiziert, n-mal.) Die Punkte von m_i gehören $H(P)$ an. Wir können einmal schließen, daß m_i eine leere Menge ist; denn m_i bildet den Häufungsbereich des Bildbereiches $\overline{B}_i$ von B_i bezüglich $f(z)$ im Punkte P, soweit er im Kreise K liegt; jeder der Punkte des Häufungsbereiches muß aber mit einem Punkte des Häufungsbereiches des Randes von $\overline{B}_i$ durch ein Kontinuum verbunden sein, dieser besteht aber hier, wenn er vorhanden ist, aus Punkten der Peripherie von K. Wären nur endlich viele derartige B_i da, so könnte p nicht $H(P)$ angehören, denn die Gesamtheit der Punkte, für die $|f(z)-p| < \frac{\tau}{2}$, hätte von P einen von Null verschiedenen Abstand. Es muß daher unendlich viele derartige B_i geben, falls kein B_j vorhanden ist, das Punkte von K unendlich oft überdeckt, und jeder Punkt von K wird von $\mathfrak{R}$ unendlich oft überdeckt.

Oder aber wir schließen minder genau so: Gibt es kein B_j, das Punkte von K unendlich oft überdeckt, und ist die Anzahl der B_i endlich, so müßte $H(P)$ in K aus der Vereinigungsmenge der kontinuumfreien in K abgeschlossenen Mengen m_i bestehen, also in K selbst kontinuumfrei sein, während doch p durch ein Teilkontinuum von $H(P)$ mit h ver-

bunden ist. Daher müssen unendlich viele B_i vorhanden sein und alle Punkte von K mit Ausnahme einer kontinuumfreien Menge, einer Teilmenge der Vereinigungsmenge der m_i, werden von $\mathfrak{R}$ unendlich oft überdeckt.

Da wir um jeden Punkt von $H(P)$, der in γ liegt, eine Umgebung in γ feststellen können, die von $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme einer kontinuumfreien Menge unendlich oft überdeckt wird, so muß einmal $H(P)$ ganz γ enthalten, und da sich γ mit abzählbarvielen solchen Umgebungen überdecken läßt, so ist der angegebene Satz bewiesen.

(Eingegangen am 30. April 1918.)

Nachtrag.

Wie mir Herr Lichtenstein mitteilt, wurde der eingangs angeführte Satz von **II. 3.** ebenfalls schon von Lindelöf in der in [3]) angegebenen Arbeit bewiesen[46]). Durch die Freundlichkeit des Herrn Carathéodory wurde mir während des Druckes dieser Abhandlung die Einsicht in jene Arbeit ermöglicht, und ich ersehe, daß in ihr Lindelöf für den Sonderfall der Verallgemeinerung des Picardschen Theorems einen von dem bei Iversen I angeführten verschiedenen Beweis geliefert hat, so daß hier für jetzt fünf Beweise vorhanden sind.

Gleichzeitig erwähne ich, daß bereits Bieberbach[47]) und Courant[48] den Flächeninhalt der Bildbereiche zur Untersuchung der konformen Abbildung herangezogen haben.

---

[46]) Man vergleiche hierzu auch E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. Leipzig 1913, S. 127.

[47]) Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 38 (1914), S. 98–112; Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Berl. Sitzungsber. 1916, S. 940–955; Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstraßsche Funktionentheorie, Math. Ann. LXXVIII, 1918, S. 312–331

[48]) Courant, Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung. Gött. Nachr. 1914, S. 101–109; Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie, Crelle J. 144, 1914, S. 190–211.

Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome.

Von

Franz Lukács in Budapest.

Hat im Intervall $a \leqq x \leqq b$ die stetige Funktion $f(x)$ den maximalen Wert M und den minimalen Wert m, so liefert der sogenannte erste Mittelwertsatz der Integralrechnung für ihren „Integralmittelwert"

$$J = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

die Grenzen

$$m \leqq J \leqq M.$$

Greifen wir aus der Gesamtheit der stetigen Funktionen eine bestimmte Unterklasse heraus, so kann J für die Funktionen dieser Unterklasse ev. zwischen engere Grenzen eingeschlossen werden. So ist z. B. für die Klasse der konvexen Funktionen[1])

$$\frac{M+m}{2} \leqq J \leqq M.$$

Herr L. Fejér hat den besonderen Fall behandelt[2]), in welchem $f(x)$

[1]) D. h. Funktionen, die für alle Wertepaare x', x'' des Intervalls der Bedingung

$$f(x')+f(x'') \leqq 2f\left(\frac{x'+x''}{2}\right)$$

genügen. — Durch eine leichte geometrische Betrachtung läßt sich die Ungleichung im Text sofort beweisen.

[2]) L. Fejér: a) Sur les polynomes harmoniques, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 157 (1913), p. 506–509, séance du 29 septembre 1913.

b) Sur les polynomes trigonometriques, a. a. O. t. 157 (1913), p. 571–574, séance du 13 octobre 1913.

c) Über trigonometrische Polynome, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 146 (1915), S. 53–82.

ein reelles trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung und (a, b) das Intervall $(0, 2\pi)$ bedeutet, und erhielt die Ungleichung

$$m + \frac{M-m}{n+1} \leqq J \leqq M - \frac{M-m}{n+1};$$

auch hat er die Polynome bestimmt, für welche hier auf der einen oder der anderen Seite das Gleichheitszeichen gilt.

In dieser Richtung einer Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung liegt die in der vorliegenden Arbeit behandelte analoge Frage:

Die reelle ganze rationale Funktion n-ten Grades $f(x)$ möge im Intervall $a \leqq x \leqq b$ den maximalen Wert M und den minimalen Wert m haben. Welches ist der größtmögliche und der kleinstmögliche Wert ihres Integralmittelwertes

$$J = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx,$$

und für welche Funktionen nimmt J einen dieser extremen Werte an?

Durch mündliche Besprechungen mit Herrn Fejér zu einer Untersuchung dieses Problems angeregt, fand ich die Antwort auf diese und einige damit verwandte Fragen zuerst mit Hilfe einer Methode, die auf einer an sich interessanten Parameterdarstellung derjenigen ganzen rationalen Funktionen beruht, welche in einem gegebenen Intervall nicht negativ sind. Eine Mitteilung dieser Methode behalte ich mir für eine ausführlichere Publikation vor[3]). In der vorliegenden Arbeit gebe ich eine andere Methode an, die rascher zum Ziele führt und derjenigen Fejérschen Methode nachgebildet ist, die er in seiner soeben zitierten Note b) für die trigonometrischen Polynome angegeben hat. Der wesentlichste Punkt war dabei die Auffindung derjenigen neuen Arten mechanischer Quadratur für rationale Polynome, die der Quadratur mit äquidistanten Abszissen bei den trigonometrischen Polynomen entsprechen.

§ 1.

1. Es sei ν eine positive ganze Zahl und $P_\nu(t)$ das Legendresche Polynom ν-ten Grades

$$P_\nu(t) = \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!} \cdot \frac{d^\nu}{dt^\nu}(t^2-1)^\nu.$$

Die Funktion $P_\nu(t)$ hat bekanntlich lauter reelle, einfache Nullstellen, die im Innern des Intervalls $-1 \leqq t \leqq 1$ liegen; also gilt dasselbe für

[3]) Ich habe darüber am 2. März 1916 in der Ungarischen Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft einen Vortrag gehalten.

ie Derivierte $P'_\nu(t)$. Die Nullstellen von $P'_\nu(t)$ bezeichne ich in irgendiner Reihenfolge mit $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}$. Sind nun $g_1(t)$ und $g_2(t)$ rationale anze Funktionen von höchstens $(2\nu-1)$-tem Grade, die an den $\nu+1$ tellen

$$-1,\ t_1,\ t_2, \ldots, t_{\nu-1},\ 1$$

leiche Werte haben, so verschwindet $g_1(t)-g_2(t)$ an diesen Stellen, lso ist

$$g_1(t)-g_2(t)=(1-t^2)P'_\nu(t)h(t),$$

vo $h(t)$ eine rationale ganze Funktion von höchstens $(\nu-2)$-tem Grade edeutet. Durch Integration und Umformung der rechten Seite mittels artieller Integration erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} g_1(t)\,dt-\int_{-1}^{1} g_2(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'_\nu(t)h(t)\,dt=$$

$$=-\int_{-1}^{1} P_\nu(t)\frac{d}{dt}[(1-t^2)h(t)]\,dt=0,$$

da das Integral des Produktes von $P_\nu(t)$ und eines Polynoms niedrigeren Grades verschwindet. Dies besagt:

Alle rationalen ganzen Funktionen von höchstens $(2\nu-1)$*-tem Grade, die an den* $\nu+1$ *Nullstellen* $-1, t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, 1$ *der Gleichung*

$$(1-t^2)P'_\nu(t)=0$$

übereinstimmende Werte haben, haben gleiche Integrale in dem Intervall $(-1,\ 1)$.

2. Setzen wir für $\mu=1, 2, \ldots, \nu-1$

$$H_\mu(t)=\frac{1-t^2}{1-t_\mu^2}\left[\frac{P'_\nu(t)}{P''_\nu(t_\mu)(t-t_\mu)}\right]^2,$$

so ist $H_\mu(t)$ ein Polynom vom Grade $(2\nu-2)$, das an den Stellen $-1, 1, t_k (k\neq\mu)$ verschwindet und an der Stelle t_μ den Wert 1 hat. Wegen $H_\mu(t)\geqq 0$ für $-1\leqq t\leqq 1$ ist

$$p_\mu=\int_{-1}^{1} H_\mu(t)\,dt>0 \qquad (\mu=1, 2, \ldots, \nu-1).$$

Das Polynom ν-ten Grades

$$H_0(t)=\frac{1+t}{2}\cdot\frac{P'_\nu(t)}{P'_\nu(1)}$$

verschwindet an den Stellen $-1, t_1, \ldots, t_{\nu-1}$ und ist gleich 1 für $t=1$.

Durch partielle Integration erhalten wir, weger. $\int_{-1}^{1} P_\nu(t)\,dt = 0$,

$$p_0 = \int_{-1}^{1} H_0(t)\,dt = \left[\frac{1+t}{2}\cdot\frac{P_\nu(t)}{P'_\nu(1)}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\nu(\nu+1)}\ ^{4}).$$

Ähnlich haben wir für

$$H_\nu(t) = \frac{1-t}{2}\cdot\frac{P'_\nu(t)}{P'_\nu(-1)}:$$

$$p_\nu = \int_{-1}^{1} H_\nu(t)\,dt = \frac{2}{\nu(\nu+1)};$$

das Polynom ν-ten Grades $H_\nu(t)$ verschwindet für $t_1, \ldots, t_{\nu-1}, 1$ und ist für $t = -1$ gleich 1.

Das Polynom

$$H(t) = u_0 H_0(t) + u_1 H_1(t) + \ldots + u_\nu H_\nu(t)$$

nimmt an den Stellen $1, t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, -1$ der Reihe nach die Werte $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}, u_\nu$ an; es ist von niedrigerem Grade als $2\nu-1$ und es gilt

$$\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = u_0 p_0 + u_1 p_2 + \ldots + u_\nu p_\nu.$$

Aus 1. folgt also:

Nimmt das Polynom von höchstens $(2\nu-1)$-tem Grade $g(t)$ an den Stellen $1, t_1, \ldots, t_{\nu-1}, -1$ der Reihe nach die Werte $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}, u_\nu$ an, so ist

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = u_0 p_0 + u_1 p_1 + \ldots + u_\nu p_\nu;$$

dabei ist $p_0 = p_\nu = \frac{2}{\nu(\nu+1)}$ und die übrigen p_k sind auch positiv[5]).

[4]) Aus der Differentialgleichung des Legendreschen Polynoms

$$(1-t^2)P''_\nu(t) - 2tP'_\nu(t) + \nu(\nu+1)P_\nu(t) = 0$$

folgt für $t = 1, -1$

$$\frac{P_\nu(1)}{P'_\nu(1)} = \frac{2}{\nu(\nu+1)}, \qquad \frac{P_\nu(-1)}{P'_\nu(-1)} = \frac{-2}{\nu(\nu+1)}.$$

Da bekanntlich $|P_\nu(\pm 1)| = 1$, folgt hieraus $|P'_\nu(\pm 1)| = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

[5]) Zum Vergleich mit dem analogen Resultate in § 2 sei bemerkt, daß aus einer bekannten Formel

$$(1-t^2)P'_\nu(t) = \text{const.}\,(P_{\nu-1}(t) - P_{\nu+1}(t))$$

folgt, also sind $1, t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, -1$ die Wurzeln der Gleichung

$$P_{\nu-1}(t) - P_{\nu+1}(t) = 0.$$

Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Auflage, Berlin (1878), Bd. I, S. 93, Formel (16, b).

3. Ist außerdem $g(t)$ für $-1 \leqq t \leqq 1$ nichtnegativ, so sind die $_k \geqq 0$ (mit Rücksicht auf $-1 < t_k < 1$); also liefert (1):

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \geqq u_0 p_0 = u_0 \frac{2}{\nu(\nu+1)},$$

2) $$u_0 = g(1) \leqq \frac{\nu(\nu+1)}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt,$$

nd ähnlich, wegen $p_\nu = \frac{2}{\nu(\nu+1)}$,

3) $$u_\nu = g(-1) \leqq \frac{\nu(\nu+1)}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt.$$

n (2) ist die Gleichheit dann und nur dann gültig, falls $u_1 = u_2 = \ldots = u_\nu = 0$ ist, also $g(t)$ an den Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, -1$ verschwindet; (t) darf aber an den t_k, die im *Innern* von $(-1, 1)$ liegen, sein Vorzeichen nicht ändern, somit müssen die t_k doppelte Nullstellen sein. Da un $g(t)$ höchstens vom $(2\nu-1)$-ten Grade ist, muß

4) $$g(t) = \text{const.}\,(1+t)\,[P_\nu'(t)]^2$$

ein. Ähnlich erhält man, daß in (3) die Gleichheit nur für

5) $$g(t) = \text{const.}\,(1-t)\,[P_\nu'(t)]^2$$

intritt.

Es sei nun $f(x)$ ein Polynom von höchstens $(2\nu-1)$-tem Grade, as für $a \leqq x \leqq b$ nichtnegativ ist; man setze $g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$, o daß $f(x) = g\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)$. Dann ist $g(t) \geqq 0$ für $-1 \leqq t \leqq 1$, also ind (2) und (3) anwendbar. Da $g(-1) = f(a)$, $g(1) = f(b)$ und

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

ilt, so kann ich auf Grund von (2) bis (5) den folgenden Satz formulieren:

Satz I. *Ist $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von höchstens $2\nu-1$)-tem Grade (ν positiv ganz), die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht-egativ ist, so ist*

$$\left.\begin{matrix} f(a) \\ f(b) \end{matrix}\right\} \leqq \frac{\nu(\nu+1)}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Die Gleichheit ist an der Stelle a nur bei den Polynomen

$$\text{const.}\,(b-x)\cdot\left[P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)\right]^2,$$

an der Stelle b nur bei den Polynomen

$$\text{const.}\,(x-a)\cdot\left[P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right]^2$$

gültig[6]).

4. Ist ξ eine innere Stelle des Intervalls (a, b) und $f(x)$ in (a, b) nichtnegativ, so kann Satz I auf die Intervalle (a, ξ) und (ξ, b) a fortiori angewendet werden; demnach ist

$$(6)\qquad f(\xi)\leqq\frac{\nu(\nu+1)}{\xi-a}\int_a^\xi f(x)\,dx\quad\text{und}\quad f(\xi)\leqq\frac{\nu(\nu+1)}{b-\xi}\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Diese Ungleichungen geben mit $\xi-a$ bzw. $b-\xi$ multipliziert und addiert

$$(b-a)f(\xi)\leqq\nu(\nu+1)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Hier kann die Gleichheit nur eintreten, falls sie in (6) beidemal besteht. Daraus folgt aber, daß $f(x)\equiv 0$ ist. Denn wäre $f(x)\not\equiv 0$, so müßte nach Fußnote [6]) die Gesamtheit der Wurzeln von $f(x)=0$ sowohl in das Intervall $a\leqq x<\xi$, als auch in das Intervall $\xi<x\leqq b$ fallen, — dies ist aber unmöglich. So habe ich, indem ich x statt ξ schreibe, erhalten:

Satz II. *Unter den Voraussetzungen von Satz* I *ist*

$$f(x)<\frac{\nu(\nu+1)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\quad\textit{für}\quad a<x<b,$$

wenn nur $f(x)$ nicht identisch verschwindet.

5. Ist $f(x)$ ein Polynom von höchstens $(2\nu-1)$-tem Grade, das für $a\leqq x\leqq b$ das Minimum m und das Maximum M besitzt, dann können wir die obigen Sätze auf $f(x)-m$ anwenden. Der Wert M wird von $f(x)$ an einer Stelle ξ $(a\leqq\xi\leqq b)$ angenommen, also ist

$$(7)\qquad M-m\leqq\nu(\nu+1)\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-m\right\};$$

die Gleichheit besteht hier nur, falls $\xi=a$ oder b und $f(x)-m$ ein der in Satz I angegebenen „Extremalfunktionen" ist. Die dort unbe

---

[6]) Diese „Extremalen" haben die doppelten Nullstellen $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k$ und d einfache Nullstelle b bzw. a, d. h. lauter reelle Nullstellen, die in das betrachtete Intervall fallen.

timmt gebliebene Konstante bestimmt sich hier dadurch[7]), daß $f(x)-m$ len maximalen Wert $M-m$ haben muß. Ähnlich ergeben die obigen Sätze, auf $M-f(x)$ angewendet, die Ungleichung

$$M-m \leqq \nu(\nu+1)\left\{M-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right\}, \tag{8}$$

und diejenigen beiden Polynome, für welche hier das Gleichheitszeichen n Kraft tritt. Löse ich (7) und (8) nach $\int_a^b f(x)\,dx$ auf, so erhalte ich den

Satz III. *Die reelle rationale ganze Funktion von höchstens* $(2\nu-1)$*-tem Grade* $f(x)$ *habe im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *den maximalen Wert* M *und den minimalen Wert* m*; dann ist*

$$m+\frac{M-m}{\nu(\nu+1)} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M-\frac{M-m}{\nu(\nu+1)}.$$

Das Gleichheitszeichen hat auf der linken Seite nur für die beiden Funktionen Geltung:

$$m+(M-m)\frac{b-x}{b-a}\left\{\frac{2}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2,$$

$$m+(M-m)\frac{x-a}{b-a}\left\{\frac{2}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2,$$

auf der rechten Seite nur für die beiden Funktionen:

$$M-(M-m)\frac{b-x}{b-a}\left\{\frac{2}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2,$$

$$M-(M-m)\frac{x-a}{b-a}\left\{\frac{2}{\nu(\nu+1)}\,P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2$$

§ 2.

6. Ich setze zur Abkürzung

$$Q_\nu(t)=(\nu+1)\frac{P_\nu(t)-P_{\nu+1}(t)}{1-t}. \tag{9}$$

[7]) Z. B. falls $\xi=a$, also

$$f(x)-m=\text{const.}\,(b-x)\left[P_\nu'\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{b+a}{b-a}\right)\right]^2,$$

dann ist für $x=\xi=a$, wegen $|P_\nu'(-1)|=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (s. Fußnote [4])),

$$M-m=\text{const.}\,(b-a)\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2,$$

woraus sich die Konstante zu

$$\frac{M-m}{b-a}\left[\frac{2}{\nu(\nu+1)}\right]^2$$

bestimmt.

Bekanntlich ist[8])

$$Q_\nu(t) = 1 + 3P_1(t) + \ldots + (2\nu+1)P_\nu(t), \tag{10}$$

also ein Polynom ν-ten Grades. Das Polynom $Q_\nu(t)$ hat lauter reelle einfache Nullstellen, die sämtlich im Innern von $(-1, 1)$ liegen[9]); ich bezeichne sie in irgendwelcher Reihenfolge mit $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ (nicht zu verwechseln mit den t_k des vorigen Paragraphen!). Sind $g_1(t)$ und $g_2(t)$ rationale ganze Funktionen von höchstens 2ν-tem Grade, die an den $\nu+1$ Stellen $1, t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ übereinstimmen, d. h. verschwindet $g_1(t) - g_2(t)$ an diesen Stellen, so ist sie durch $(1-t)Q_\nu(t)$, also auch durch $P_\nu(t) - P_{\nu+1}(t)$ teilbar:

$$g_1(t) - g_2(t) = \big(P_\nu(t) - P_{\nu+1}(t)\big) \cdot h(t),$$

wo $h(t)$ ein Polynom von höchstens $(\nu-1)$-tem Grade ist. Wegen der schon zitierten Orthogonalitätseigenschaft der Legendreschen Polynome ist demzufolge

$$\int_{-1}^{1} g_1(t)\,dt - \int_{-1}^{1} g_2(t)\,dt = 0.$$

D. h.:

Alle rationalen ganzen Funktionen von höchstens 2ν-tem Grade, die an den $\nu+1$ Nullstellen $1, t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ der Gleichung

$$P_\nu(t) - P_{\nu+1}(t) = 0$$

übereinstimmende Werte haben, haben gleiche Integrale in dem Intervall $(-1, 1)$.

7. Ich setze für $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$

$$H_\mu(t) = \frac{1-t}{1-t_\mu}\left[\frac{Q_\nu(t)}{Q_\nu'(t_\mu)\,(t-t_\mu)}\right]^2;$$

$H_\mu(t)$ ist ein Polynom $(2\nu-1)$-ten Grades, das an den Stellen $1, t_k$ $(k \neq \mu)$ verschwindet, an der Stelle t_μ aber gleich 1 ist. Wegen $H_\mu(t) \geqq 0$ für $-1 \leqq t \leqq 1$ ist

$$p_\mu = \int_{-1}^{1} H_\mu(t)\,dt > 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

---

[8]) Dies ist die sog. *Christoffelsche Formel.*

[9]) Sind τ_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu+1)$ die Nullstellen von $P_{\nu+1}(t)$, so ist bei geeigneter Numerierung $-1 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{\nu+1} < 1$; nach (9) ist

$$Q_\nu(\tau_k) = (\nu+1)\,\frac{P_\nu(\tau_k)}{1-\tau_k},$$

also sgn. $Q_\nu(\tau_k) = $ sgn. $P_\nu(\tau_k)$. Bekanntlich separieren aber die Nullstellen von $P_{\nu+1}$ die τ_k (die Nullstellen von $P_{\nu+1}$), also haben die Werte $P_\nu(\tau_1), P_\nu(\tau_2), \ldots P_\nu(\tau_{\nu+1})$ abwechselnde Vorzeichen und somit auch $Q_\nu(\tau_1), Q_\nu(\tau_2), \ldots, Q_\nu(\tau_{\nu+1})$. Demnach hat $Q_\nu(t)$ im Intervall (τ_k, τ_{k+1}) für $k = 1, 2, \ldots, \nu$ eine Nullstelle; das sind ν Nullstellen, und da Q_ν von ν-tem Grade ist, sind das alle Nullstellen.

Das Polynom ν-ten Grades

$$H_0(t) = \frac{Q_\nu(t)}{Q_\nu(1)}$$

verschwindet an allen Stellen t_k und ist gleich 1 für $t = 1$. Aus (10) folgt, wegen $\int_{-1}^{1} P_k(t)\,dt = 0$,

$$\int_{-1}^{1} Q_\nu(t)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$

und wegen $P_k(1) = 1$

$$Q_\nu(1) = 1 + 3 + \ldots + (2\nu + 1) = (\nu + 1)^2,$$

also

$$p_0 = \int_{-1}^{1} H_0(t)\,dt = \frac{2}{(\nu+1)^2}.$$

Das Polynom

$$H(t) = u_0 H_0(t) + \ldots + u_\nu H_\nu(t)$$

nimmt an den Stellen $1, t_1, \ldots, t_\nu$ der Reihe nach die Werte $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ an; es ist von niedrigerem Grade als 2ν und es ist

$$\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = u_0 p_0 + u_1 p_1 + \ldots + u_\nu p_\nu;$$

nach 6. folgt also:

Nimmt ein Polynom von höchstens 2ν-tem Grade $g(t)$ an den Stellen $1, t_1, \ldots, t_\nu$ der Reihe nach die Werte $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ an, so ist

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = u_0 p_0 + u_1 p_1 + \ldots + u_\nu p_\nu; \tag{11}$$

dabei ist $p_0 = \frac{2}{(\nu+1)^2}$ und die übrigen p_k sind auch positiv.

8. Ist ferner $g(t) \geqq 0$ für $-1 \leqq t \leqq 1$, so ist auch $u_k \geqq 0$ wegen $-1 < t_k < 1$, also nach (11)

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \geqq u_0 p_0 = u_0 \frac{2}{(\nu+1)^2},$$

$$u_0 = g(1) \leqq \frac{(\nu+1)^2}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt. \tag{12}$$

Hier gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $u_1 = u_2 = \ldots = u_\nu = 0$, die t_k also Nullstellen von $g(t)$ sind; diese sind dann aber mehrfache Nullstellen, da $g(t)$ im Innern von $(-1, 1)$ sein Vorzeichen nicht ändern darf. Da endlich $g(t)$ höchstens von 2ν-tem Grade ist, muß notwendigerweise

$$g(t) = \text{const.}\,[Q_\nu(t)]^2. \tag{13}$$

Die Anwendung von (12) auf $g(-t)$ ergibt

$$(14) \qquad g(-1) \leqq \frac{(\nu+1)^2}{2} \int_{-1}^{1} g(-t)\,dt = \frac{(\nu+1)^2}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt,$$

worin, nach (13), die Gleichheit nur für

$$(15) \qquad g(t) = \text{const.}\,[Q_\nu(-t)]^2$$

stattfindet.

Aus (12) bis (15) folgen mit Hilfe der in 3. und 4. (§ 1) angewandten Schlußweise[10]) die beiden Sätze:

Satz IV. *Ist $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von höchstens 2ν-tem Grade (ν positiv ganz), die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nichtnegativ ist, so ist*

$$\left.\begin{matrix} f(a) \\ f(b) \end{matrix}\right\} \leqq \frac{(\nu+1)^2}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Gleichheitszeichen ist an der Stelle a nur für die Polynome

$$\text{const.}\left[Q_\nu\left(\frac{-2}{b-a}x + \frac{b+a}{b-a}\right)\right]^2,$$

an der Stelle b nur für die Polynome

$$\text{const.}\left[Q_\nu\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)\right]^2$$

gültig. Das Polynom $Q_\nu(t)$ ist durch (9) und (10) definiert.

Satz V. *Unter den Voraussetzungen des Satzes IV ist*

$$f(x) < \frac{(\nu+1)^2}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für} \quad a < x < b,$$

wenn nur $f(x)$ nicht identisch verschwindet.

9. Wie in 5 (§ 1) können wir nun weiterschließen und erhalten so de

Satz VI. *Die reelle rationale ganze Funktion von höchstens 2ν-ter Grade $f(x)$ habe im Intervall $a \leqq x \leqq b$ den maximalen Wert M un den minimalen Wert m; dann ist*

$$m + \frac{M-m}{(\nu+1)^2} \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqq M - \frac{M-m}{(\nu+1)^2}.$$

[10]) Daß der Übergang von Satz IV zu V ebenso wie in 4. der entsprechen Übergang möglich ist, folgt aus der Bemerkung, daß die „Extremalen" des Satzes die doppelten Nullstellen $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$ bzw. $\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}t_k$, und keine ander Nullstellen, haben, und daß also, wegen $-1 < t_k < 1$, alle Nullstellen der Extrema in das betrachtete Intervall fallen.

Das Gleichheitszeichen ist auf der linken Seite nur gültig für die beiden Funktionen

$$m+(M-m)\left\{\frac{1}{(\nu+1)^2}\,Q_\nu\left(\mp\frac{2}{b-a}x\pm\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2,$$

auf der rechten Seite nur für die Funktionen

$$M-(M-m)\left\{\frac{1}{(\nu+1)^2}\,Q_\nu\left(\mp\frac{2}{b-a}x\pm\frac{b+a}{b-a}\right)\right\}^2.$$

$Q_\nu(t)$ *ist durch* (9) *und* (10) *definiert.*

Budapest, den 30. März 1918.

(Eingegangen am 7. April 1918.)

Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen.

Von

Hans Rademacher in Wickersdorf (Thüringen).

Herrn E. Borel verdankt man den folgenden bemerkenswerten Satz[1]: Bezeichnet n_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ die Anzahl der Ziffern ν unter den ersten n Stellen des Dezimalbruchs einer Zahl des Intervalls von 0 bis 1, so ist stets

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_\nu}{n} = \frac{1}{10}, \tag{1}$$

außer in einer Nullmenge Z, die jedoch von der Mächtigkeit des Kontinuums ist[2]).

Herr Borel spricht diesen Satz so aus: die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Dezimalbruch nicht alle zehn Ziffern asymptotisch gleich oft vorkommen, ist Null, und führt den Beweis dafür durch Heranziehung des Bernoullischen Theorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einen direkten Beweis des Satzes in unserer Formulierung gibt Herr F. Hausdorff[3]), indem er die Menge Z durch die Abschätzung überdeckender Intervallmengen ausmißt. Der folgende Beweis ist vielleicht darum nicht überflüssig, weil er zur Konstruktion einer Klasse der auch an sich interessanten „Funktionen konstanter λ-Variation" (Carathéodory) führt.

Um feste Vorstellungen zu haben, beweisen wir den Satz für eine bestimmte Ziffer, etwa $\nu = 3$; für jede andere Ziffer wird der Beweis völlig analog geführt.

---

[1]) Les probabilités dénombrables et leurs applications arithméthiques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 27 (1909), S. 247–271.

[2]) Der Satz gilt analog auch für beliebige p-adische Bruchentwicklungen, doch führen wir unsern Beweis (der ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragbar ist) der Bequemlichkeit halber für $p = 10$.

[3]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), S. 419 ff.

Wir konstruieren zunächst eine monoton wachsende stetige Funktion
m Intervall J von 0 bis 1. Dazu gehen wir aus von der Grundfunktion

$$2) \quad \begin{cases} f_1(x) = (1-k)x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{3}{10}, \\ f_1(x) = (1+9k)x - 3k & \text{für } \frac{3}{10} \leqq x \leqq \frac{4}{10}, \\ f_1(x) = (1-k)x + k & \text{für } \frac{4}{10} \leqq x \leqq 1. \end{cases} \qquad (0 < k < 1)$$

Die Funktion $f_1(x)$ ist stetig und monoton wachsend und besitzt
lie Knickpunkte $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{10}$; im Innern des Intervalls $\frac{3}{10} < x < \frac{4}{10}$ hat
$_1(x)$ die Ableitung $(1+9k)$, im Innern der beiden andern Intervalle
lie Ableitung $(1-k)$[4]). Nun konstruieren wir eine Folge von Funktionen
$_n$. Wir erhalten f_2, indem wir die Werte von $f_1(x)$ in den Teilpunkten
$, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1$ festhalten und die dazwischen liegenden linearen Stücke
lurch die passend *affin transformierte* Grundfunktion f_1 selber ersetzen,
o daß im ganzen wieder eine monoton wachsende stetige Funktion, $f_2(x)$,
ntsteht. Ebenso werden die Ordinaten der Teilpunkte $0, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2}, \ldots,$
$\frac{99}{10^2}, 1$ festgehalten und die durch sie bestimmten linearen Funktionsstücke
lurch die affin transformierte Grundfunktion f_1 ersetzt, wodurch $f_3(x)$
ntsteht. Allgemein teilen wir für die Konstruktion von f_{n+1} aus f_n das
ntervall J in 10^n gleiche Teile (so daß also f_n wegen der Lage der
Knickpunkte in lauter lineare Stücke zerlegt ist). Sind dann x_1 und x_2
ie Abszissen zweier benachbarter Teilpunkte von $f_n(x)$, so ist

$$f_n(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\{f_n(x_2) - f_n(x_1)\} + f_n(x_1) \quad \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Dann soll für dasselbe Intervall

$$f_{n+1}(x) = f_1\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\{f_n(x_2) - f_n(x_1)\} + f_n(x_1)$$

ein. Es ist

$$f_{n+1} - f_n = \{f_n(x_2) - f_n(x_1)\} \cdot \{f_1(z) - z\},$$

o

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = z$$

esetzt ist. Nun ist aber wegen (2) stets

$$|f_1(z) - z| \leqq \frac{9k}{10}$$ [5]).

---

[4]) Wollte man den Beweis für die Ziffer ν statt für die Ziffer 3 führen, so
üßte man die entsprechende Grundfunktion bilden, die im Intervall $\frac{\nu}{10} < x < \frac{\nu+1}{10}$
ie Ableitung $(1+9k)$, im Innern der andern Intervalle die Ableitung $(1-k)$ besitzt.

[5]) Diese Abschätzung ist so gewählt, daß sie auch für die ungünstigsten Fälle
$=0$ und $\nu=9$ gilt; für $\nu=3$ würde schon $\frac{6k}{10}$ auf der rechten Seite der Ungleichung
enügen.

also

$$|f_{n+1} - f_n| \leqq \frac{9k}{10}\{f_n(x_2) - f_n(x_1)\} \quad \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Nun ist aber die größte Ordinatendifferenz zweier benachbarter Teilpunkte von f_1 gleich $\frac{1+9k}{10}$, diejenige von f_n also gleich $\left(\frac{1+9k}{10}\right)^n$, so daß für das ganze Intervall J

$$|f_{n+1} - f_n| \leqq \frac{9k}{10}\left(\frac{1+9k}{10}\right)^n$$

ist, die f_n daher gleichmäßig konvergieren wegen der Konvergenz der geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1+9k}{10}$. Es sei

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x);$$

$f(x)$ ist stetig und monoton wachsend, da die f_n diese Eigenschaften aufweisen. Es muß noch betont werden, daß $f(x)$ alle die Funktionswerte besitzt, die bei den $f_n(x)$ sukzessiv an den Teilpunkten aufgetreten sind.

Wir untersuchen die Ableitungen der Approximationsfunktionen. Für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ (in der obigen Bedeutung) ist

$$f'_{n+1}(x) = f'_1(z)\frac{f_n(x_2) - f_n(x_1)}{x_2 - x_1},$$

während

$$f'_n(x) = \frac{f_n(x_2) - f_n(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ist. Bei dem Schritt von f_n zu f_{n+1} multipliziert sich also die Ableitung in einem Punkte mit f'_1, d. h. also mit $(1 + 9k)$ oder mit $(1 - k)$, je nachdem der Punkt in das vierte Zehntel[6]) des bei diesem Schritt geteilten Intervalles fällt oder nicht fällt.

Nun kann man aber an der Dezimalbruchentwicklung[7]) eines Punktes ablesen, in welches Teilintervall er bei jedem Schritt der fortgesetzten Zehntelung fällt: die Ziffer 0 bedeutet erstes, die Ziffer 1 zweites, die Ziffer ν bedeutet $(\nu + 1)$-tes Teilintervall. Zu jedem Punkte x_0 zwischen 0 und 1, der nicht gerade zu der Nullmenge der Punkte mit endlicher Dezimalbruchentwicklung gehört, läßt sich somit aus unsern Teilungen eine unendliche Folge ineinandergeschachtelter Intervalle angeben, deren Längen gegen Null konvergieren und die sämtlich x_0 enthalten. Zu den Endpunkten des n-ten dieser Intervalle gehören in $f(x)$ Ordinaten, die auch schon $f_n(x)$ nebst allen folgenden Funktionen dort besitzt. Man kann daher eine zu x_0 gehörende Folge von Differenzenquotienten von

[6]) Allgemein: das $(\nu+1)$-te Zehntel.

[7]) Die wir eindeutig machen durch die Festsetzung, daß von keiner Stelle an lauter Ziffern 9 auftreten sollen.

$f(x)$ mit gegen Null konvergierenden Nennern angeben, indem man nacheinander die Ableitungen der $f_n(x)$ in x_0 für wachsendes n nimmt.

Diese Folge ist aber gleichbedeutend mit einem unendlichen Produkt, das nur die Faktoren $(1-k)$ und $(1+9k)$ aufweist; und zwar tritt für jede 3 des Dezimalbruchs $(1+9k)$ und für jede andere Ziffer $(1-k)$ als Faktor auf. Z. B. ist

$$\tfrac{1}{13} = 0{,}076923\ldots;$$

eine zu $x_0 = \frac{1}{13}$ gehörende Folge von Differenzenquotienten von $f(x)$ ist daher durch die Folge von Partialprodukten des unendlichen Produktes

$$(1-k)(1-k)(1-k)(1-k)(1-k)(1+9k)\ldots$$

gegeben.

Für ein unendliches Produkt mit nur zwei Sorten von positiven Faktoren bestehen nur die Möglichkeiten:

a) es kann gegen Null konvergieren,

b) es kann divergieren, indem es beschränkt bleibt,

c) es kann divergieren, so daß es beliebig große Werte annimmt.

Eine Funktion kann in einem Punkte nur dann differenzierbar sein mit endlicher Ableitung, wenn auch eine beliebig herausgegriffene Folge einschließender Differenzenquotienten mit gegen Null konvergierenden Nennern gegen jenen Ableitungswert konvergiert. Im Falle a) kann also $f'(x)$ existieren und gleich Null sein. Im Falle b) ist $f(x)$ im untersuchten Punkte nicht differenzierbar. Im Falle c) endlich muß mindestens eine der beiden oberen Derivierten gleich $+\infty$ sein. Nun besitzt nach einem Satze von Lebesgue jede stetige monotone Funktion, außer höchstens auf einer Nullmenge, eine *endliche Ableitung*[8]). Fall b) und c) treten also *höchstens auf einer Nullmenge* auf[9]).

Nun ist, wenn man n und n_3 wieder in der Bedeutung aufnimmt, die ihnen in unserer Formulierung des Borelschen Satzes erteilt ist,

$$f_n'(x) = (1+9k)^{n_3}(1-k)^{n-n_3}.$$

Folglich ist die Menge Z_3 aller der Punkte x im Intervall J, für die unendlich oft bei wachsendem n

$$(1+9k)^{n_3}(1-k)^{n-n_3} > 1 \tag{3}$$

eintritt, eine Nullmenge. [Diese Menge schöpft zwar c) ganz, nicht

[8]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, S. 128.

[9]) Die Funktion $f(x)$ hat also fast überall die Ableitung Null. Da $f(x)$ außerdem monoton wachsend ist, so ist sie nach Carathéodory [Reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 573, Satz 8] von konstanter λ-Variation. Übrigens stellt $f(x)$ eine Schar solcher Funktionen mit dem Parameter k vor.

aber b) völlig aus, ist also a fortiori vom Maße Null.] Man kann (3) ersetzen durch

$$n_3 \log(1+9k) + (n-n_3)\log(1-k) > 0,$$

$$\frac{n_3}{n} > \frac{-\log(1-k)}{\log\left(\frac{1+9k}{1-k}\right)}. \tag{4}$$

Wegen

$$(1+9k)(1-k)^9 < (1+k)^9(1-k)^9 < 1$$

ist

$$\left(\frac{1}{1-k}\right)^{10} > \frac{1+9k}{1-k},$$

also ist die rechte Seite von (4) stets größer als $\frac{1}{10}$. Andererseits stellt man durch Differenzieren von Zähler und Nenner fest, daß dieser Ausdruck für $k \to 0$ den Limes $\frac{1}{10}$ besitzt. Für hinreichend kleines k läßt er sich also unter $\frac{1}{10}+\varepsilon$ bei beliebigem positiven ε herunterdrücken. Also ist auch die Menge $Z_3(\varepsilon)$ der Punkte x, in deren Dezimalbruchentwicklung unendlich oft

$$\frac{n_3}{n} > \frac{1}{10} + \varepsilon \tag{5}$$

ist, eine Menge vom Maße Null.

Dasselbe gilt auch für die von 3 verschiedenen Ziffern ν nach ganz analogen Überlegungen. Folglich ist auch die Menge $Z_3'(\varepsilon)$, für die unendlich oft

$$\frac{1}{n}(n_0+n_1+n_2+n_4+\ldots+n_9) > \frac{9}{10}+\varepsilon$$

(links ist in dem Klammerausdruck n_3 ausgelassen) oder also

$$1-\frac{1}{n}(n_0+n_1+n_2+n_4+\ldots+n_9) = \frac{n_3}{n} < \frac{1}{10}-\varepsilon$$

ist, eine Nullmenge.

Die Menge $E_3(\varepsilon)$ der Punkte also, für deren Dezimalbruchentwicklung von einer gewissen Stelle an

$$\frac{1}{10}-\varepsilon < \frac{n_3}{n} < \frac{1}{10}+\varepsilon$$

bleibt, besitzt das Maß 1. Erst recht folglich diejenige Menge $\overline{E}_3(\varepsilon)$, zu der jeder Punkt gehören soll, für den

$$\frac{1}{10}-\varepsilon \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{n_3}{n} \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{n_3}{n} \leqq \frac{1}{10}+\varepsilon \tag{6}$$

gilt. Jetzt lassen wir ε der Reihe nach die Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{i} \ldots$ durchlaufen. Dann ist für jedes i

$$m\overline{E}_3\left(\frac{1}{i}\right) = 1,$$

d da ferner

$$\overline{E}_3(1) \succ \overline{E}_3(\tfrac{1}{2}) \succ \overline{E}_3(\tfrac{1}{3}) \succ \dots$$

, so gilt nach einem Satz aus der Theorie der Meßbarkeit[10]) für den
ırchschnitt $\overline{E}_3$ sämtlicher $\overline{E}_3\left(\frac{1}{i}\right)$

$$m\overline{E}_3 = 1.$$

r $\overline{E}_3$ folgt aber aus (6)

$$\tfrac{1}{10} \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{n_3}{n} \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{n_3}{n} \leqq \tfrac{1}{10}$$

er

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_3}{n} = \tfrac{1}{10},$$

mit bewiesen ist, daß die Menge $\overline{Z}_3$, in der (7) nicht gilt, vom Maße
ll ist.

Da dasselbe für die Mengen $\overline{Z}_\nu$ bei von 3 verschiedenem ν gilt, so
für die Vereinigungsmenge Z der $\overline{Z}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2 \dots 9)$ der erste Teil
Borelschen Satzes bewiesen.

Die Menge $E = J - Z$ als von positivem Maße besitzt gewiß eine
fekte Teilmenge, ist also von der Mächtigkeit des Kontinuums. Nun
ın man E auf eine Teilmenge von Z eineindeutig abbilden. Man ersetzt
mlich in der Dezimalbruchentwicklung jedes Punktes von E jede vor-
nmende Ziffer 0 durch zwei Ziffern 0 und erhält dadurch lauter unter
ı verschiedene Dezimalbrüche. Die durch diese Dezimalbrüche be-
chneten Punkte gehören zur Menge Z, da für sie

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_0}{n} = \tfrac{2}{10}$$

Da folglich eine Teilmenge von Z dem Kontinuum äquivalent ist,
gilt das gleiche von Z selbst.

---

[10]) Siehe z. B. Carathéodory, loc. cit. [9]) S. 254, Satz 9..

(Eingegangen am 19. Mai 1918.)

Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung.

Von

Friedrich Riesz in Kolozsvár.

Für die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer im Intervall $(0, 2\pi)$ definierten Funktion von beschränkter Schwankung $f(x)$ gilt bekanntlich:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

mit andern Worten: die Produktwerte na_n und nb_n sind in ihrer Gesamtheit beschränkt. Andererseits aber ist nicht notwendig zugleich

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d. i. es gelten nicht notwendig die Grenzgleichungen

$$na_n \to 0, \quad nb_n \to 0.$$

Ich führe hierfür einige bekannte Beispiele an:

1. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$; $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$.

2. $f(x) = \pm \frac{4}{\pi}$, je nachdem $x \lesseqgtr \pi$; $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$.

3. $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ für $x < \frac{\pi}{4}$ und für $x > \frac{5\pi}{4}$, $f(x) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ für $\frac{\pi}{4} < x <$

$$na_n = 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1;$$

$$nb_n = 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1,$$

je nachdem $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod 8$.

Die Werte an den Sprungstellen sind belanglos. Bei 1. und 2. $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$, bei 3. ist weder $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, noch $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Genauer betrachtet, sind die Verdichtungsstellen der Folgen $\{na_n\}$ bz

$nb_n\}$ im Falle 1: 0 bzw. 1, im Falle 2: 0 bzw. 0 und 1, im Falle 3 r beide Folgen: -1, 0 und 1.

Alle drei Funktionen sind unstetig, die erste unter ihnen jedenfalls ır in dem Sinne, daß $f^+(0) \neq f^-(2\pi)$ ist, daß sie also keine stetige, ıch 2π periodische Fortsetzung zuläßt. Man könnte geneigt sein, das usbleiben der Relationen $na_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $nb_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ den Unstetigkeiten ızuschreiben. Dies um so mehr, da jede Funktion von beschränkter chwankung fast überall, d. i. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom ebesgueschen Maße 0, einen endlichen Differentialquotienten besitzt, elcher als Funktion von x betrachtet im Lebesgueschen Sinne inte- ierbar ist und dessen Fourierkoefffizienten a_n', b_n' daher dem Grenz- erte 0 zustreben, woraus man für die Fourierkoefffizienten jeder Integral- ınktion dieses Differentialquotienten die Größenordnung $o\left(\frac{1}{n}\right)$ erhält. Doch ist demgegenüber zu bedenken, daß eine Funktion von beschränkter chwankung, auch wenn sie stetig ist, noch nicht unbedingt eine Integral- ınktion ihres Differentialquotienten sein muß; denn es gibt stetige, *nicht onstante* Funktionen von beschränkter Schwankung, deren Differential- uotient fast überall gleich Null ist.

Ich werde in den folgenden Zeilen *die Vermutung, als ob für jede m Intervall* $(0, 2\pi)$ *definierte stetige Funktion von beschränkter Schwan- ung, für welche* $f(0) = f(2\pi)$ *ist,* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *und* $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *sein nüßte, durch ein einfaches Gegenbeispiel widerlegen.* Obzwar ich das roblem, auf das ich durch anderweitige Untersuchungen aufmerksam vurde, für längst erledigt dachte, konnte ich ein derartiges Beispiel in ler Literatur nicht auffinden.

Ich setze

$$f(x) = -x + \lim_{m \to \infty} \int_0^x (1 + \cos x)(1 + \cos 4x) \ldots (1 + \cos(4^{m-1}x))\, dx.$$

Die Konvergenz des Grenzprozesses ergibt sich durch folgende Überlegung. Unter dem Integralzeichen steht ein nichtnegatives Kosinuspolynom $\tau_m(x)$ von der Ordnung $1 + 4 + \ldots + 4^{m-1} = \frac{4^m - 1}{3}$; die Koeffizienten von τ_m sind $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Beim Übergang von m auf $m+1$ ist das erste neu auftretende Glied, wenn man von jenen mit verschwindenden Koeffizienten absieht, vom Index

$$4^m - (1 + 4 + \ldots + 4^{m-1}) = \frac{2 \cdot 4^m + 1}{3} > \frac{4^m - 1}{3},$$

d. i. von höherem Index als das letzte Glied in $\tau_m(x)$; die Glieder von

$\tau_m(x)$ werden somit durch die neu auftretenden Glieder nicht beeinträchtigt, was man auch so ausdrückt: $\tau_m(x)$ ist ein Abschnitt von $\tau_{m+1}(x)$. Ich behaupte ferner, die Anzahl der neuen Glieder mit nicht verschwindenden Koeffizienten sei 3^m. Es sei nämlich α_m die Anzahl der nicht verschwindenden Glieder von $\tau_m(x)$; die neuen Glieder ergeben sich durch Multiplikation von $\tau_m(x) = 1 + \ldots$ mit $\cos(4^m x)$; da aus dem Gliede 1 das einzige Glied $\cos(4^m x)$, aus den übrigen aber je zwei Glieder entstehen, so ist die Anzahl der neuen Glieder gleich $2\alpha_m - 1$. Also ist

$$\alpha_{m+1} = 3\alpha_m - 1,$$

somit

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = 3(\alpha_m - \alpha_{m-1}),$$

und wegen $\alpha_2 - \alpha_1 = 3$ folgt für die Anzahl der neuen Glieder:

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = 3^m.$$

Nach Integration ergeben die neuen Glieder ein Sinuspolynom, in welchem die Koeffizienten > 0 und $\leqq$ dem entsprechenden reziproken Index sind, also jedenfalls $\leqq$ dem reziproken Werte des kleinsten Index, d. i.

$$\leqq \frac{3}{2 \cdot 4^m + 1} < \frac{3}{2 \cdot 4^m}.$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\left| \int_0^x \tau_{m+k}(x)\,dx - \int_0^x \tau_m(x)\,dx \right| < \frac{3^{m+1}}{2 \cdot 4^m}\left(1 + \tfrac{3}{4} + \ldots\right) = 6\left(\tfrac{3}{4}\right)^m \to 0,$$

d. i. die gleichmäßige Konvergenz des definierenden Grenzprozesses. Daher ist $f(x)$ überall stetig. Ferner folgt aus

$$\int_x^{x+2\pi} \tau_m(x)\,dx = \int_x^{x+2\pi} (1 + \ldots)\,dx = 2\pi,$$

daß $f(x) = f(x + 2\pi)$, daß also $f(x)$ nach 2π periodisch ist. Endlich ist $\tau_m(x)$ nichtnegativ, also die Funktion

$$\int_0^x \tau_m(x)\,dx$$

für alle Werte m monoton; dasselbe gilt für ihre Grenzfunktion und daher ist $f(x)$ als Summe von zwei monotonen Funktionen in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung.

Zusammenfassend: *$f(x)$ ist überall stetig, nach 2π periodisch und in jedem endlichen Intervall, also auch im Intervall $(0, 2\pi)$ von beschränkter Schwankung.*

Was nun die Fourierreihe von $f(x)$ betrifft, so folgt aus dem Umstande, daß $\tau_m(x)$ ein Abschnitt von $\tau_{m+1}(x)$ ist, und aus der gleich

mäßigen Konvergenz unseres Grenzprozesses die Tatsache, daß auch die approximierenden Sinuspolynome

$$-x+\int_0^x \tau_m(x)\,dx$$

zugleich Abschnitte, d. i. Teilsummen entsprechender Ordnung für die Fourierreihe sind. Speziell ist für $n=4^m$ der Koeffizient von $\cos nx$ in $\tau_{m+1}(x)$ gleich 1, also nach Integration jener von $\sin nx$ gleich $\frac{1}{n}$. *Daher ist in der Fourierreihe* $nb_n=1$ *für alle* $n=4^m$, *und somit gilt keineswegs* $nb_n\to 0$. Damit ist die obige Vermutung widerlegt.

Ich bemerke noch nebenbei, daß die Gesamtheit der Verdichtungsstellen der Folge $\{nb_n\}$ durch die Glieder der geometrischen Folge 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... und ihren Grenzwert 0 geliefert wird. Dies ergibt sich leicht nach genauerer Ausrechnung von $\tau_m(x)$. Da die Reihe eine Sinusreihe ist, so ist natürlich $na_n=0$ für alle n und somit $na_n\to 0$. Ein Beispiel, wo auch Kosinusglieder auftreten und weder $na_n\to 0$, noch $nb_n\to 0$ wird, erhält man unter anderen durch leichte Abänderung unseres Beispieles, indem man nämlich in der Produktdefinition des Integranden $\tau_m(x)$ jedes zweite Kosinus durch das entsprechende Sinus ersetzt. Setzt man ferner

$$f(x)=-x+\lim_{m\to\infty}\int_0^x(1+\alpha_0\cos x)(1+\alpha_1\cos 4x)\dots(1+\alpha_{m-1}\cos(4^{m-1}x))\,dx,$$

wo die α überall dicht im Intervall $(-1,1)$ verteilt sind, so liegen auch die Werte nb_n im selben Intervall überall dicht; läßt man wiederum Kosinus mit Sinus abwechseln und liegen noch die α mit geraden Indizes für sich und auch jene mit ungeraden überall dicht, so ist dies sowohl für die Werte nb_n, wie auch für die Werte na_n der Fall. Unser Beispiel läßt sich also noch mannigfaltig variieren: auch die Verwendung der Zahlenfolge $1, 4, \dots 4^{m-1}, \dots$ ist nicht wesentlich, sie kann durch jede Folge $\{\lambda_m\}$ aus positiven ganzen Zahlen ersetzt werden, wenn nur λ_m im Verhältnis zur Summe $\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}$ genügend stark anwächst, z. B. $\lambda_m>3(\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1})$ ist.

Zum Schlusse möchte ich noch folgende Fragen aufwerfen, die mir schon für schwerer zugänglich scheinen: Gibt es eine stetige, nach 2π periodische Funktion von beschränkter Schwankung, für welche die Folgen $\{na_n\}$, $\{nb_n\}$ konvergieren und wenigstens einer der beiden Grenzwerte von Null verschieden ist? Gibt es eine unstetige Funktion von beschränkter Schwankung, für welche $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist? Die beiden Fragen hängen miteinander eng zusammen.

(Eingegangen am 25. Mai 1918.)

Der rotatorische elliptische Komplexbüschel und die neue Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Der Hauptsatz meiner Abhandlung „Eine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes“[1]) läßt sich, wie ich inzwischen gefunden habe, zwar weniger elementar, aber organisch und dabei kurz und anschaulich beweisen, sobald man einige leicht herzuleitende Sätze aus der Theorie der rotatorischen elliptischen Strahlenkongruenz und des durch sie bestimmten Komplexbüschels benutzt.

1. Eine rotatorische elliptische lineare Strahlenkongruenz R_1^1 hat ∞^1 Symmetrieachsen. Eine von ihnen ist die Rotationsachse d, die anderen sind die ∞^1 Fluchtachsen von R_1^1. Die Fluchtachsen sind mit d und der Fluchtebene μ des geschart involutorischen Raumes von R_1^1 inzident und bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung[2]). Jede von ihnen ist die Hauptachse eines der ∞^1 durch R_1^1 gehenden linearen Strahlenkomplexe. Eine Fluchtachse e kann durch eine Drehung um die Rotationsachse d mit jeder andern Fluchtachse $e^{(n)}$ der Kongruenz R_1^1 zur Deckung gebracht werden. R_1^1 geht hierbei in sich selbst über und der R_1^1 enthaltende lineare Komplex mit der Hauptachse e in einen zu ihm kongruenten Komplex mit der Hauptachse $e^{(n)}$. Ein Komplexbüschel, dessen Träger eine rotatorische elliptische lineare Strahlenkongruenz ist, besteht demnach aus kongruenten Komplexen. Er geht durch jede Drehung um die Rotationsachse d der Kongruenz in sich selbst über und ist also rotatorisch. — Ein linearer Komplex beschreibt bei einer halben Drehung um einen mit seiner Hauptachse h inzidenten eigentlichen Komplexstrahl u einen rotatorischen elliptischen Komplexbüschel.

---

[1]) Diese Zeitschrift 1 (1918), S. 303—308 (S. 304).

[2]) Reye, Die Geometrie der Lage, 2. Abteilung, 4. Auflage, Stuttgart 1907, S. 142

2. Durch eine lineare Kongruenz K_1^1 gehen zwei lineare Komplexe Γ, Γ', deren Hauptachsen bzw. die Fluchtachsen e, e' von K_1^1 sind[3]). Vollführen die Komplexe Γ' und Γ gleichzeitig eine halbe Drehung um e, so fällt Γ' nacheinander mit den ∞^1 Komplexen eines rotatorischen elliptischen Komplexbüschels zusammen (1), während Γ immer in sich selbst übergeht. Jeder der Komplexe dieses rotatorischen Komplexbüschels schneidet also aus dem Komplexe Γ eine der Kongruenzen aus, in die K_1^1 während einer halben Drehung um die Fluchtachse e übergeführt wird. Durch jeden Strahl von Γ, der nicht dem Träger des Komplexbüschels angehört, geht ein Komplex des Büschels, also auch die zu K_1^1 kongruente aus Γ durch diesen Komplex ausgeschnittene Kongruenz.

Bei einer halben Drehung um eine ihrer Fluchtachsen beschreibt eine lineare Kongruenz K_1^1 demnach einen linearen Komplex Γ.

Ist die lineare Kongruenz K_1^1 elliptisch, so gibt es keinen reellen Strahl von Γ, den alle Komplexe des von Γ' beschriebenen elliptischen rotatorischen Büschels enthalten. Dagegen schneiden diese Komplexe, wenn K_1^1 hyperbolisch ist, den Komplex Γ in kongruenten linearen Strahlenkongruenzen, die eine reelle rotatorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gemein haben; die Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ wird gebildet von den Leitgeraden der Kongruenzen. Wird K_1^1 parabolisch, so artet die rotatorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in einen Strahlenbüschel erster Ordnung aus, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse e von Γ liegt.

Berlin-Halensee, 26. Mai 1918.

---

[3]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 304.

(Eingegangen am 10. Juni 1918.)

Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

---

1. Haben zwei kubische Raumkurven k_1^3 und k_2^3 die Strahlenschar $\mathfrak{M}^2$ einer Regelfläche zweiten Grades T^2 zu gemeinsamen Bisekanten, so haben sie vier Punkte gemein, die paarweise konjugiert imaginär sein können[1]). k_1^3 und k_2^3 bestimmen als Ordnungskurven einen tetraedralen Strahlenkomplex Γ_2[2]). Auf T^2 liegen ∞^1 seiner Ordnungskurven. Sie sind identisch mit allen kubischen Raumkurven auf T^2, welche die vier Hauptpunkte von Γ_2 enthalten, und bilden einen Büschel kubischer Raumkurven oder kurz einen „r^3-Büschel". T^2 ist die Trägerfläche, Γ_2 der tetraedrale Komplex und jeder seiner Hauptpunkte ein Grundpunkt des r^3-Büschels. Durch jeden gegebenen Punkt des Trägers geht eine Büschelkurve. Die Leitstrahlen von $\mathfrak{M}^2$ werden von den Kurven des r^3-Büschels in drei homologen Punkten projektiver Punktreihen geschnitten[3]), und zwar haben vier „harmonische" Kurven des Büschels mit jedem dieser Leitstrahlen vier harmonische Punkte gemein. Mit Rücksicht hierauf können wir den r^3-Büschel in die projektive Geometrie einreihen; er ist „in dem Projektivitätsbereiche der Grundgebilde erster Stufe enthalten", insbesondere kann seine perspektive Lage zu anderen einstufigen Gebilden der projektiven Geometrie definiert werden.

2. Je zwei Ordnungskurven eines tetraedralen Komplexes haben ein auf einer Fläche zweiter Ordnung liegende Schar von Bisekanten gemein, und zwei durch eine kubische Raumkurve gehende Flächen zweiter

---

[1]) Jolles in Reyes Geometrie der Lage, dritte Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart (1910), S. 209

[2]) Reye, a. a. O., S. 10.

[3]) Reye, a. a. O., S. 7.

[4]) Reye, a. a. O., S. 8.

Ordnung einen Regelstrahl. Somit liegt auf der Trägerfläche T^2 des r^3-Büschels eine Bisekante jeder nicht im r^3-Büschel enthaltenen Ordnungskurve des tetraedralen Komplexes Γ_2. Es sei l^3 eine solche Ordnungskurve und l ihre auf T^2 gelegene Bisekante, dann durchdringen die Flächen des durch l^3 und l gehenden F^2-Büschels die Fläche T^2 in den Kurven des r^3-Büschels[5]) oder:

Durch jede nicht im r^3-Büschel enthaltene Ordnungskurve l^3 des tetraedralen Komplexes Γ_2 geht ein zum r^3-Büschel perspektiver F^2-Büschel, dessen Flächen also in dem F^2-Systeme[6]) von Γ_2 enthalten sind. Seine Grundkurve besteht aus l^3 und der auf der Trägerfläche T^2 des r^3-Büschels gelegenen Bisekante l dieser Kurve.

Die Polarebenen eines gegebenen Punktes P für die Flächen eines solchen F^2-Büschels bilden einen zum Flächenbüschel und folglich auch zum r^3-Büschel projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung. Ist P ein Punkt der Trägerfläche T^2, aber kein Grundpunkt des r^3-Büschels, so schneiden diese Polarebenen die mit P inzidente gemeinsame Bisekante p der Kurven in Punkten, die P für diese Kurven bzw. konjugiert sind, und es folgt:

Einem Punkte P der Trägerfläche T^2 eines r^3-Büschels sind für die Kurven des Büschels die Punkte einer zum Büschel projektiven Punktreihe erster Ordnung konjugiert; sie liegt auf der mit P inzidenten gemeinsamen Bisekante der Kurven.

3. Es sei Γ_2 der tetraedrale Komplex eines r^3-Büschels, A^2 eine Fläche des F^2-Systems von Γ_2 und l^3 eine auf A^2 gelegene Ordnungskurve des Komplexes. Dann geht durch l^3 ein zum r^3-Büschel perspektiver F^2-Büschel (**2.**). Er ist projektiv zu der in Γ_2 enthaltenen Regelschar $\mathfrak{M}_A^2$ von A^2, wenn jeder seiner Flächen ihr Schnittstrahl mit A^2 entspricht. Dieser Strahl ist aber eine Bisekante der auf der betreffenden Fläche liegenden Kurve des r^3-Büschels, somit ist dargetan:

Geht der tetraedrale Komplex Γ_2 eines r^3-Büschels durch die Strahlenschar $\mathfrak{M}_A^2$ einer Fläche A^2 seines F^2-Systems, so ist der Büschel projektiv zu der Schar, wenn jeder Kurve ihre in $\mathfrak{M}_A^2$ enthaltene Bisekante entspricht. Insbesondere läßt sich auf diese Weise der r^3-Büschel projektiv auf jeden Komplexkegel von Γ_2 beziehen.

Die Polarebene eines gegebenen Punktes P für die Trägerfläche T^2 des r^3-Büschels geht durch alle Punkte, die P für die Kurven des r^3-Büschels

---

[5]) Reye, a. a. O., S. 7.
[6]) Reye, a. a. O., S. 1.

konjugiert sind. Gleichzeitig liegen diese Punkte auf dem von P aus strahlenden Kegel von Γ_2. Sonach gilt:

Einem gegebenen Punkte P sind für die Kurven eines r^3-Büschels die Punkte eines zum Büschel projektiven Kegelschnittes p^2 konjugiert

4. Sind Σ, Σ_1 zwei zu einem tetraedralen Komplexe Γ_2 perspektiv kollineare Räume, so entspricht einem gegebenen Ebenenbüschel g von ein zu ihm projektiver Ebenenbüschel g_1 von Σ_1. Die homologen Ebenen büschel erzeugen eine in Γ_2 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{M}^2$, deren Träger T^2 einen Büschel von Ordnungskurven des Komplexes enthält. Die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ besteht aus gemeinsamen Bisekanten, ihre Leitschar $\mathfrak{N}^2$ aus gemeinsamen Unisekanten dieser Ordnungskurven; $\mathfrak{N}^2$ geht durch g, g_1. Der von den Ordnungskurven gebildete r^3-Büschel ist projektiv zur Punktreihe g, wenn jeder Kurve ihr Schnittpunkt mit g entspricht. Entspricht ferner jeder Kurve der Punkt, der einem Punkte von g für sie konjugiert ist, so erhalten wir auch auf der mit P inzidenten gemeinsamen Bisekante p der Kurven eine zum r^3-Büschel projektive Punktreihe (**2.**). Die zum r^3-Büschel projektiven Punktreihen g, p sind zueinander projektiv, und ihr gemeinsamer Punkt entspricht sich selbst, somit erzeugen sie einen Strahlenbüschel erster Ordnung P', dessen Elemente je mit den Polarebenen des Strahles g für die von ihm ausstrahlenden Komplexkegel inzident sind. Ebenso sind diese Polarebenen mit einem Punkte Q' inzident, sobald an die Stelle des Punktes P von g der Punkt Q dieser Gerade tritt. Kurz, wir erhalten für den tetraedralen Komplex einen einfachen Beweis des Plückerschen Satzes: die Polarebenen einer gegebenen Gerade g für alle von ihr ausstrahlenden Kegel des tetraedralen Komplexes Γ_2 bilden einen zur Reihe der Kegelmittelpunkte perspektiven Ebenenbüschel erster Ordnung. Seine Achse g' ist bekanntlich die Polare und die lineare Strahlenkongruenz mit den Leitgeraden g, g' die Polarkongruenz der Gerade g für Γ_2. Auf g' liegen, wie ebenfalls Plücker gezeigt hat und sich nunmehr ohne weiteres ergibt, die Pole des Strahles g für die in seinen Ebenen liegenden Komplexkurven.

Die Polarentheorie des tetraedralen Komplexes fußt hiernach auf leicht zu beweisenden Sätzen für den r^3-Büschel. Dem Leser sei es überlassen, sie von diesen ausgehend weiter zu entwickeln. Wir werden auf die Theorie nur soweit eingehen, wie wir sie in den folgenden Untersuchungen brauchen.

5. In einer Ebene η der gegebenen Gerade g sei η^2 der Komplexkegelschnitt eines tetraedralen Komplexes, G der Pol von g für η^2, also jeder Strahl s des Büschels (G, η) dem Strahle g für diesen Ke

schnitt konjugiert. Jeder Strahl s von (G, η) liegt nun in der Polarebene von g für den vom Punkte $gs = P$ ausstrahlenden Komplexkegel P^2 (4.), folglich sind g und s für η^2 und P^2 konjugiert. Beschreibt der Strahl g den Büschel (P, η), so beschreibt sein Pol G die Polare p von P für η^2. Hierbei bleiben g und $PG = s$ konjugierte Strahlen für η^2 wie für P^2, und es ergibt sich:

Der in einer gegebenen Ebene η gelegene Komplexkegelschnitt eines tetraedralen Strahlenkomplexes Γ_2 und der von einem gegebenen Punkte P von η ausstrahlende Komplexkegel rufen im Strahlenbüschel (P, η) dieselbe Involution konjugierter Strahlen hervor.

6. Den in **5.** bewiesenen Satz verwerten wir gleich bei der Konstruktion der kubischen Raumkurve aus drei Paaren ihrer konjugiert imaginären Punkte.

Auf den windschiefen Geraden u, v und s mögen bzw. die elliptischen Punktinvolutionen $A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots$; $A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots$; $A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots$ liegen. Dann gibt es nur einen durch s gehenden tetraedralen Komplex Γ_2 mit den Doppelstrahlen u, v, dessen Ordnungskurven auf u, v die Involutionen konjugierter Punkte $A_u A'_u, B_u B'_u, \ldots$ und $A_v A'_v, B_v B'_v, \ldots$ hervorrufen[7]). Ist nun η^2 die in einer Ebene η von s gelegene Komplexkurve, und beschreibt der Strahl x den Büschel (A_s, η), so beschreibt der ihm für η^2 konjugierte, mit A'_s inzidente Strahl x' den zum Büschel (A_s, η) projektiven Büschel (A'_s, η). Die Gerade s ist als Komplexstrahl eine Tangente von η^2 und folglich sich selbst konjugiert. Die projektiven Büschel sind also perspektiv, und ihre homologen Strahlen schneiden sich in den Punkten einer Gerade a. Ebenso schneiden sich die für η^2 konjugierten Strahlen der Büschel (B_s, η) und (B'_s, η) auf einer Gerade b. Aus dem Punkte ab wird folglich die Punktinvolution $A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots$ durch eine Strahleninvolution projiziert, von der die einander zugeordneten Strahlen zweier und somit aller Paare für den Komplexkegelschnitt η^2 und demnach auch für den vom Punkte ab ausstrahlenden Komplexkegel konjugiert sind (**5.**). Auf diesem Kegel liegt die durch den Punkt ab gehende Ordnungskurve von Γ_2, die s zur Bisekante hat[8]). Somit sind für sie die einander zugeordneten Punkte der Involution $A_s A'_s, B_s B'_s, \ldots$ konjugiert. Sie ist also die kubische Raumkurve k^3, für welche die einander zugeordneten Punkte der drei gegebenen elliptischen Involutionen konjugiert sind, und die folglich durch die drei Paar konjugiert imaginären

[7]) Ein Beweis dieses Satzes findet sich in meiner demnächst im Journal für die reine und angewandte Mathematik erscheinenden Arbeit „Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen"; in ihr ist ebenfalls eine Konstruktion der kubischen Raumkurve aus drei Paaren ihrer konjugiert imaginären Punkte entwickelt.

[8]) Reye, a. a. O., S. 7.

Doppelpunkte dieser Involutionen geht. Da die Ordnungskurven von Γ mit der Bisekante s die mit s inzidenten Ebenen in homologen Punkten kollinearer Punktfelder schneiden[9]). so sind außer ab weitere reelle Punkte von k^3 leicht zu ermitteln.

7. Je zwei zu einer kubischen Raumkurve k^3 perspektive Kegel zweiter Ordnung $L(k^3)$ und $M(k^3)$ bestimmen als homologe Gebilde zwei kollineare zentrische Bündel[10]), deren homologe Ebenen sich in den Bisekanten von k^3 schneiden. Homologe Ebenen beider Bündel sind die Polarebenen zweier gegebenen homologen Strahlen l, m für die homologen Kegel $L(k^3)$ und $M(k^3)$; sie schneiden sich folglich in einer Bisekante von k^3. Fällt der Mittelpunkt L des einen Bündels nacheinander mit jedem Punkte von k^3 zusammen, so beschreibt der Strahl l die durch gehende zu k^3 perspektive Regelschar zweiter Ordnung und seine Polarebene den Ebenenbüschel b. D. h.:

Durchläuft ein Strahl l eine aus Unisekanten einer kubischen Raumkurve k^3 bestehende Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2$; so bleiben seine Polarebenen für die Kegel, die k^3 aus den Punkten $l\,k^3$ projizieren, mit einer Bisekante b der Kurve inzident[11]); *sie beschreiben also einen zu k^3 perspektiven und zu $\mathfrak{L}^2$ projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung. Die Leitstrahlen von $\mathfrak{L}^2$ sind für alle zu k^3 perspektiven Kegel zweiter Ordnung polar zu b. Ist b eine wirkliche Bisekante, so sind die Tangenten von k^3 in den Schnittpunkten mit b Leitstrahlen von $\mathfrak{L}^2$.*

8. Ist die Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2$ perspektiv zu den Kurven eines r^3-Büschels, so schneiden ihre Strahlen l, m, ... je zwei seiner Kurven — etwa k_1^3 und k_2^3 — in homologen Punkten L_1, L_2; M_1, M_2; ... projektiver Punktreihen. Die zur Regelschar $\mathfrak{L}^2$. also auch zueinander projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung b_1, b_2, gebildet aus den Polarebenen der Strahlen l, m, ... für die zu k_1^3 und k_2^3 bzw. perspektiven Kegel $L_1(k_1^3)$, $M_1(k_1^3)$, ... und $L_2(k_2^3)$, $M_2(k_2^3)$, ... (**7.**), erzeugen eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{L}'^2$. Alle diese Kegel liegen aber in dem tetraedralen Komplexe Γ_2 des r^3-Büschels, folglich erweisen sich die Strahlen von $\mathfrak{L}'^2$ als die Polaren der Strahlen von $\mathfrak{L}^2$ für Γ_2. Zu sind die Ebenenbüschel b_1, b_2 perspektiv, ihre Achsen sind bzw. Bisekanten von k_1^3 und k_2^3. Beschreibt die Kurve k_2^3 den r^3-Büschel, so bleibt die Bisekante b_2 Leitstrahl von $\mathfrak{L}'^2$. Die Leitschar von $\mathfrak{L}'^2$ ist also in

---

[9]) Reye, a. a. O., S. 10.

[10]) Seydewitz, Archiv d. Math. u. Phys. 8 (1846), S. 12.

[11]) Reye, Geometrie der Lage, zweite Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart 1 S. 192.

enthalten. Wir wollen entscheiden, ob ihre Trägerfläche im F^2-Systeme oder Φ^2-Gewebe von Γ_2 liegt.

Zwei zum Komplexe Γ_2 perspektive Räume Σ_l, Σ_m sind bestimmt, wenn wir in ihnen die Punkte L_1, M_1 seiner Ordnungskurve k_1^3 einander entsprechen lassen[12]). In Σ_l, Σ_m entsprechen einander die Strahlen l, m, außer L_1, M_1 die Schnittpunkte L_2, M_2; ... der homologen Strahlen l, m mit den Ordnungskurven k_2^3, ... von Γ_2, ferner die Kegel $L_1(k_1^3)$, $M_1(k_1^3)$; $L_2(k_2^3)$, $M_2(k_2^3)$; ..., endlich die Polarebenen λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; ... der homologen Strahlen l, m für diese homologen Kegel. Die Schnittgeraden $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, ... sind aber bzw. die Bisekanten b_1, b_2, ... von k_1^3, k_2^3, folglich ist die von ihnen gebildete Regelschar auf einer Fläche des F^2-Systems von Γ_2 gelegen, und es ist dargetan:

Bilden die Strahlen $l, m, \ldots$ die nicht in einem tetraedralen Komplexe Γ_2 enthaltene Regelschar einer Fläche seines F^2-Systems, so bilden die Polaren der Strahlen $l, m, \ldots$ für Γ_2 ebenfalls die Regelschar einer solchen Fläche. Homologe Strahlen l, m zweier zum Komplexe Γ_2 perspektiven kollinearen Räume Σ_l, Σ_m haben zu Polaren für Γ_2 wiederum homologe Strahlen l', m' von Σ_l, Σ_m.

9. Die Doppelpunkte der hyperbolischen Involutionen, in deren Punktepaaren die Kurven eines r^3-Büschels die Strahlen der Regelschar $\mathfrak{M}^2$ seiner Trägerfläche T^2 schneiden[13]) (**1.**), sind konjugiert für alle seine Kurven. Die von ihnen gebildete Kurve werde daher als die „autokonjugierte" Kurve des r^3-Büschels bezeichnet. Sie ist imaginär, wenn die vier Grundpunkte des Büschels paarweise konjugiert imaginär sind.

Jede Kurve k^3 des r^3-Büschels berührt zwei reelle oder konjugiert-imaginäre Strahlen der Regelschar $\mathfrak{M}^2$. Fällt ein Strahl n nacheinander mit allen Strahlen der Leitschar $\mathfrak{N}^2$ von $\mathfrak{M}^2$, also mit allen gemeinsamen Unisekanten der Kurven k^3 zusammen, so gehen dabei die Polarebenen von n für die zu einer Kurve k^3 perspektiven Strahlenkegel zweiter Ordnung durch eine Bisekante b dieser Kurve (**7.**). Sie ist mit den Berührungspunkten der beiden Strahlen von $\mathfrak{M}^2$ inzident, die Tangenten der Kurve sind. Die durch die Kurven des Büschels bestimmten Bisekanten b bilden eine Regelschar zweiter Ordnung. Ihre Leitschar $\mathfrak{N}'^2$ besteht aus den Polaren n' der Strahlen n von $\mathfrak{N}^2$ für den tetraedralen Strahlenkomplex Γ_2 des Büschels (**8.**). Außer auf der Trägerfläche T^2 des r^3-Büschels ist also seine autokonjugierte Kurve auch auf der Trägerfläche der Regelschar $\mathfrak{N}'^2$ gelegen. Beide Flächen zweiter Ordnung haben

---

[12]) Reye, Geometrie der Lage, dritte Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart 1910, S. 9.

[13]) Reye, a. a. O., S. 7.

keinen Strahl gemein und durchdringen sich demnach in einer biquadra-
tischen Raumkurve erster Art i^4. Somit folgt:

*Die autokonjugierte Kurve eines r^3-Büschels ist eine biquadra-
tische Raumkurve erster Art i^4. Werden die Polaren der gemeinsamen
Unisekanten n aller Büschelkurven für den tetraedralen Komplex Γ_2 des
r^3-Büschels bestimmt, so bilden sie die Regelschar $\mathfrak{R}'^2$ einer durch i^4
gehenden Fläche zweiter Ordnung. Die Polarebene einer gemeinsamen
Unisekante n für den von jedem Punkte auf n ausstrahlenden Komplex-
kegel schneidet die zu dem Kegel perspektive Kurve des r^3-Büschels im
Mittelpunkte des Kegels und in einem Punktepaare von i^4. Der r^3-Büschel
erzeugt mit einem zu ihm projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung die
autokonjugierte Kurve i^4, sobald die Achse des Ebenenbüschels die Polare n'
einer gemeinsamen Unisekante n der Büschelkurven für den Komplex
Γ_2 ist, und je zwei homologe Elemente beider projektiven Gebilde mit
einem Punkte von n inzident sind.*

10. Nennen wir die von den Punkten einer gegebenen Gerade g
ausstrahlenden Kegel des tetraedralen Komplexes Γ_2 eine „Kegelreihe" g
und je vier Kegel dieser Reihe ;,harmonisch", wenn die Polarebenen von g
für diese Kegel einen harmonischen Wurf bilden, so ist die Kegelreihe g
projektiv zu dem zur Punktreihe g perspektiven Ebenenbüschel erster
Ordnung, dessen Achse mit der Polare g' von g für den Komplex Γ_2
zusammenfällt. Beide projektiven Gebilde erzeugen eine biquadratische
Regelfläche, deren Doppelpunktsgeraden g, g' sind und deren Regelschar
in Γ_2 enthalten ist. Diese Regelfläche geht durch die autokonjugierte
Kurve i^4 des r^3-Büschels, wenn g eine gemeinsame Unisekante der Büschel-
kurven ist (**9.**). Kurz:

*Jede gemeinsame Unisekante n der Kurven des r^3-Büschels und ihre
Polare n' für den tetraedralen Komplex Γ_2 des Büschels sind die Doppel-
punktsgeraden einer durch die autokonjugierte Kurve i^4 des Büschels
gehenden biquadratischen Regelfläche. Die Regelscharen dieser ∞^1 biqua-
dratischen Flächen bestehen aus Strahlen von Γ_2.*

11. Von dem r^3-Büschel kann man zu dem „r^3-Bündel" aufsteigen,
d. h. zu einer Mannigfaltigkeit von ∞^2 kubischen Raumkurven, von denen
je zwei einen durch sie gehenden r^3-Büschel der Mannigfaltigkeit be-
stimmen[14]), und von dem r^3-Bündel in analoger Weise zum „r^3-Gebüsch"

---

[14]) Die ∞^2 einem Fünfecke umbeschriebenen kubischen Raumkurven einen Bünde
kubischer Raumkurven zu nennen, wie es häufig geschieht, geht nicht an, da nicht
je zwei Kurven dieser Mannigfaltigkeit durch einen in ihr enthaltenen Büschel ver-
bunden sind.

— Durch je zwei Ordnungskurven des tetraedralen Komplexes geht ein r^3-Büschel dieser Kurven, durch je drei nicht auf derselben Fläche zweiter Ordnung liegende Ordnungskurven ein r^3-Bündel. Alle Ordnungskurven des tetraedralen Komplexes bilden ein r^3-Gebüsch. Zu jedem Büschel eines solchen Gebüsches gehört eine autokonjugierte biquadratische Raumkurve i^4 (9.). Das System dieser ∞^4 Kurven i^4 dürfte mit bemerkenswerten Eigenschaften des tetraedralen Komplexes eng verknüpft sein.

Berlin-Halensee, den 15. April 1918.

(Eingegangen am 10. Juni 1918.)

Kleinste Wirkung und Galileische Relativität.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Schütz ist der erste gewesen, der durch eine einfache, aber wicht
Bemerkung[1]) auf die Bedeutung des Galileischen Relativitätsprinzips, a
einer Invarianzforderung, für den Aufbau der Mechanik hingewiesen h
er leitet mit Hilfe dieses Prinzips das zweite Newtonsche Bewegungsge
aus der Gleichung der lebendigen Kraft ab. Frank hat das Galileis
wie das Lorentz-Einsteinsche Relativitätsprinzip in umfassender W
zum Aufbau der Mechanik verwendet[2]), indem er die Grundbegriffe
einfachste Differentialinvarianten einer Transformationsgruppe einfü
Mit beiden genannten Forschern teile ich das Streben, Axiome der
chanik durch Invarianzforderungen, Relativitätsprinzipien zu ersetzen;
Eigentümliche meiner Untersuchung besteht darin, daß ich dasjenige Prin
an die Spitze stelle, dem gerade die Physiker, Helmholtz, Boltzma
und Planck geneigt sind, den Charakter einer Art allgemeinen Na
gesetzes beizulegen, das Prinzip der kleinsten Wirkung. Dieses bes
in seiner allgemeinsten Form eigentlich nur darin, daß man die Na
vorgänge aus irgendeinem Integralprinzip herzuleiten sucht, daß man e
mit Daniel Bernoulli fragt, „ob man nicht die orbitas circa cent
virium könne methodo isoperimetrica herausbringen“. In der gewöhnli
Darstellung wird nun aber die Form des Wirkungsintegrals, dessen Varia
man zum Verschwinden bringt, aus sonstigen Grundsätzen der Mecha
insbesondere dem d'Alembertschen Prinzip hergeleitet; ein neues
fahren besteht darin, jene Form aus Invarianzforderungen zu bestim
Genau dieses Streben zeigt sich in einer wichtigen Bemerkung von Plan
nach welcher aus dem Lorentz-Einsteinschen Relativitätsprinzip

[1]) Göttinger Nachrichten, math.-phys., 1897, S. 110–116.

[2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 118 IIa (1909), S. 337–410.

[3]) Acht Vorlesungen über Theoretische Physik, Leipzig 1910, Achte Vorl

Form des Prinzips der kleinsten Wirkung sich für die Bewegung eines einzelnen Stoffpunktes mit Notwendigkeit dahin ergibt, daß man die Variation der Eigenzeit zum Verschwinden bringt; aus demselben Relativitätsprinzip hat Planck[4]) auch die Form des Wirkungsprinzips für die Wärmeerscheinungen abgeleitet.

Wir ziehen ebenfalls an einer Stelle die Lorentz-Einsteinsche Relativität in den Kreis unserer Betrachtungen, verbleiben aber in der Hauptsache auf dem Boden des Galileischen Relativitätsprinzips und damit der klassischen Mechanik, die jawohl immerhin noch für einige Zeit Beachtung verdienen wird. Die Invarianzforderung, mit der wir arbeiten, läßt sich im allgemeinen folgendermaßen aussprechen. Man bilde das zunächst unbekannte Wirkungsintegral längs irgendeiner möglichen Bewegung eines Punktsystems und variiere diese Bewegung bei festen Anfangs- und Endwerten der Koordinaten und der Zeit; dann soll die Variation der Wirkung invariant sein gegenüber den Transformationen einer gewissen Gruppe, die die betreffende Aufgabe kennzeichnet und als wesentlichen Bestandteil die Galilei-Transformation, die geradlinig-gleichförmige Verschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems enthält. Durch diese Forderung wird das Wirkungsintegral in hohem Grade bestimmt und man erhält aus dem Wirkungsprinzip die Bewegungsgleichungen, ohne auf andere Grundsätze oder die Newtonschen Bewegungsgesetze zurückgehen zu müssen.

Es scheint mir, daß diese Untersuchungen sich in gewissem Sinne dem allgemeinen Rahmen von Kleins Erlanger Programm einordnen[5]); doch es ist Zeit, zu den Einzelheiten überzugehen, an denen sich immer erst zeigt, was man will und kann.

§ 1.

Einzelner Stoffpunkt auf einer Geraden.

Die Lage eines Stoffpunktes auf einer Geraden sei durch seinen Abstand von einem festen Punkte bestimmt; dieser Abstand sei x, die Zeit t; Punkte bezeichnen immer Ableitungen nach t, so daß $\dot{x}$ die Geschwindigkeit ist. Die Gesamtheit der Wertpaare x, t nennen wir die Welt, die im vorliegenden Falle nur zweifach ausgedehnt ist. Die Weltlinie des Stoffpunktes sei durch eine Gleichung von der Form

$$\delta \int H(x, \dot{x})\, dt = 0$$

[4]) Annalen der Physik (4) 26 (1908), S. 1—34.

[5]) Erlangen 1872, abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 43 (1893), S. 63—100.

bestimmt, in der so variiert wird, daß die Endpunkte der gesuchten Weltlinie festgehalten werden, übrigens aber t ebenso wie x variiert werden darf. Das Integral ist die Wirkung, $H\,dt$ das Wirkungselement, H die Wirkungsdichte oder das kinetische Potential. Um die Form der Funktion H zu finden, fordern wir, daß bei einer Variation der bezeichneten Art die Variation der Wirkung gegenüber einer Galilei-Transformation invariant bleibe, d. h. ihren Wert behalte, wenn man den Anfangspunkt der Koordinate x mit fester Geschwindigkeit wandern, die Zeit aber ungeändert läßt. Man ersetzt dabei den Weltpunkt (x, t) durch den Punkt (x_1, t_1), in welchem

$$x_1 = x + at, \qquad t_1 = t$$

gesetzt ist und a einen Festwert bedeutet. Genauer sprechen wir die Forderung aus, es gelte längs einer beliebigen Weltlinie — nicht etwa nur längs der Weltlinie des Stoffpunktes, die seine wirkliche Bewegung darstellt — die Gleichung

$$\delta \int H(x, \dot{x})\,dt = \delta \int H(x_1, \dot{x}_1)\,dt_1,$$

oder, da

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + a, \qquad t_1 = t,$$

die Gleichung

$$\delta \int \{H(x + at,\ \dot{x} + a) - H(x, \dot{x})\}\,dt = 0.$$

Bezeichnen wir Teilableitungen nach den Formeln

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad H_{\dot{x}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}$$

usf., so ergibt sich nach der gewöhnlichen Eulerschen Regel die Differentialgleichung

$$(1)\quad H_x(x+at, \dot{x}+a) - H_x(x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\{H_{\dot{x}}(x+at, \dot{x}+a) - H_{\dot{x}}(x, \dot{x})\} = 0.$$

Rechnet man aus, so ist die Größe $\ddot{x}$ mit dem Faktor

$$H_{\dot{x}\dot{x}}(x + at,\ \dot{x} + a) - H_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})$$

multipliziert, und da wir von einer beliebigen Weltlinie aus variieren, a also beliebig ist, muß diese Größe verschwinden. Nun sind auch a, t, x und $\dot{x}$ beliebig, mithin auch bei festgehaltenen Werten von x und $\dot{x}$ die Werte at und a; die Größe $H_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})$ behält also ihren Wert, wenn man den Veränderlichen beliebige Zuwüchse gibt, sie ist also ein Festwert:

$$(2)\qquad H_{\dot{x}\dot{x}} = m.$$

Dies festgestellt, ergibt die Gleichung (1), indem man nach a differenziert,

$$t\,H_{xx}(x_1, \dot{x}_1) + H_{x\dot{x}}(x_1, \dot{x}_1) - \frac{d}{dt}\{t H_{x\dot{x}}(x_1, \dot{x}_1)\} = 0$$

der

$$t\left\{H_{xx}(x_1, \dot{x}_1) - \frac{dH_{xt}(x_1, \dot{x}_1)}{dt}\right\} = 0,$$

der endlich, da $t = t_1$ und die Größen t_1, x_1, $\dot{x}_1$ ebenfalls als unabhängige Veränderliche genommen werden können,

3) $$H_{xx} - \frac{dH_{xt}}{dt} = H_{xx} - H_{xxt}\dot{x} = 0.$$

Aus der Gleichung (2) folgt nun, daß man setzen kann

$$H = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + A\dot{x} + B,$$

wobei A und B Funktionen von x sind; die Gleichung (3) ergibt danach

$$A_{xx}\dot{x} + B_{xx} - A_{xx}\dot{x} = B_{xx} = 0,$$

also

$$B = b + cx,$$

wobei b und c Festwerte bedeuten. Das Glied $A\dot{x}$ kann aber weggelassen werden, da es zur Variation der Wirkung keinen Beitrag liefert; es ist ja unbestimmt integrierbar, d. h. man kann setzen

$$\int A\dot{x}dt = \varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ von der Wahl der Weltlinie, von dem Zusammenhang zwischen x und t unabhängig ist; man erhält weiter

$$\delta\int A\dot{x}dt = \varphi'(x)\delta x,$$

und der Wert dieser Größe ist Null, da wir ja stets mit festen Endwerten der Größe x variieren. Ebenso ergibt der feste Summand b zur Wirkung den Beitrag

$$\int b\,dt = bt,$$

dessen Variation ebenfalls in dem angegebenen Sinne verschwindet. Man muß also bis auf unbestimmt integrierbare Größen, deren Variation verschwindet, notwendig setzen

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + cx.$$

Die mit dieser Dichte gebildete Wirkung

$$W = \int H dt$$

ist selbst der Galilei-Transformation gegenüber nicht invariant; man findet

$$\int H(x_1, \dot{x}_1)\,dt_1 = \int\left\{\frac{m(\dot{x}+a)^2}{2} + c(x+at)\right\}dt$$

$$= W + \int\left(madx + \frac{ma^2}{2}dt + catdt\right)$$

$$= W + max + \frac{ma^2}{2}t + \frac{act^2}{2}$$

und sieht, daß W sich um einen unbestimmt integrierbaren Teil vermehrt, d. h. einen solchen, dessen Variation nur von den Variationen der Endwerte von x und t abhängt, also mit diesen verschwindet. Es wäre daher ein erfolgloser Versuch gewesen, die Wirkung oder die Wirkungsdichte selbst invariant zu machen; die geforderte Invarianz von δW ist aber offenbar erzielt, und man kann folgendes Ergebnis aussprechen:

Die einzig mögliche Bewegung eines Stoffpunktes auf einer Geraden, bei der ein Prinzip der kleinsten Wirkung gilt und die von irgendeiner gedachten Bewegung bei festen Endlagen und Endzeiten gebildete Variation der Wirkung gegenüber der Galilei-Transformation invariant bleibt, ist die Bewegung eines schweren Punktes im Sinne der gewöhnlichen Mechanik.

§ 2.

Erläuterungen.

Wir sind, wie man sieht, von unserer Invarianzforderung ausgehend zu einem Wirkungsprinzip von der Form

$$\delta \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + cx \right) dt = 0$$

gelangt, also zu dem gewöhnlichen Hamiltonschen Prinzip für die Bewegung eines schweren Punktes; wir haben nur den Namen des Hamiltonschen Prinzips vermieden, weil wir uns vorbehalten wollen, die Zeit mitzuvarieren. Jedenfalls haben wir die bekannte Zerlegung der Wirkungsdichte in einen kinetischen und einen von der Geschwindigkeit unabhängigen Teil erhalten; auch der Satz, daß die Masse ein Festwert ist, folgt aus unserer Entwicklung bei richtiger Erklärung dieses Begriffs. Soll die Frage, ob die Masse fest oder veränderlich sei, einen Sinn haben, muß man sie als das Verhältnis des Impulses zur Geschwindigkeit definieren. Der Impuls aber wird sachgemäß durch den Ausdruck

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

zu definieren sein; wenn allgemein das Wirkungsprinzip in der Form

$$\delta \int \Omega(x, y, \ldots, dx, dy, \ldots, dt) = 0 \tag{4}$$

angesetzt wird und die Funktion Ω in den Differentialen homogen von erster Ordnung ist, wird man die Größe

$$\frac{\partial \Omega}{\partial dx}$$

als Komponente des Impulses nach der Koordinate x bezeichnen; beiläufig ist die Energie

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial dt}.$$

In unserm Falle finden wir

$$\Omega = H dt = \frac{m}{2\,dt} dx^2 + cx dt;$$

lso ist der Impuls, wie erwartet, $m\dot{x}$, und die Energie

$$-cx + \frac{m\dot{x}^2}{2};$$

ie erscheint in die lebendige und Spannkraft zerlegt.

Die allgemeinen Begriffe des Impulses und der Energie rechtfertigen ich, wenn wir uns das System, dessen Bewegung durch die Gleichung (4) eliefert wird, in ein Kraftfeld eingebettet denken, in welchem einer durch ie Koordinatenzuwüchse $\delta' x, \delta' y, \ldots$ bestimmten Verschiebung des Systems ei ungeänderter Zeit eine virtuelle Arbeitsleistung vom Betrage

$$\alpha = X\delta' x + Y\delta' y + \ldots$$

ntspricht. Das Wirkungsprinzip werde dahin verallgemeinert, daß die ariation der Wirkung sich ausgleicht mit dem Zeitintegral derjenigen irtuellen Arbeit, die bei der betrachteten allgemeinen Variation durch ie Teilvariationen

$$\delta' x = \delta x - \dot{x}\delta t, \qquad \delta' y = \delta y - \dot{y}\delta t, \ldots$$

bestimmt wird; die Verschiebung δ' ist gewissermaßen die räumliche Komponente der raumzeitlichen Verschiebung δ, und die virtuelle Arbeit kann geschrieben werden

$$\alpha = X\delta x + Y\delta y + \ldots + T\delta t,$$

wobei

$$T = -X\dot{x} - Y\dot{y} - \ldots$$

die negative Leistung der äußeren Kräfte bedeutet.

Setzt man nun das verallgemeinerte Wirkungsprinzip in der Form

$$\delta \int H dt + \int \alpha dt = 0$$

oder

$$\delta \int \Omega + \int \alpha dt = 0$$

an, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} - d\frac{\partial \Omega}{\partial dx} + X dt = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} - d\frac{\partial \Omega}{\partial dy} + Y dt = 0, \ldots$$

$$-d\frac{\partial \Omega}{\partial dt} + T dt = 0,$$

wodurch die Begriffe des Impulses und der Energie gerechtfertigt, weil durch Erhaltungssätze gekennzeichnet erscheinen. Die Komponenten der

äußeren Kräfte treten dabei nur als Faktoren der Variationen δ' in de virtuellen Arbeit auf; diese allein ist der neue Begriff, der als gegebe angenommen wird.

§ 3.

Bewegung eines Punktes in der Ebene.

Seien x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines Stoffpunktes, der sic in einer Ebene bewegt nach Maßgabe eines Wirkungsprinzips von der Form

$$\delta \int H(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = 0.$$

Wir suchen die Form der Wirkungsdichte H wieder aus der Forderun zu bestimmen, daß die Variation der Wirkung verharre gegenüber eine Gruppe von Transformationen der Größen x, y, t, die wir als Hauptgrupp bezeichnen wollen. Führt eine dieser Transformationen x, y in x_1, y über, während t ungeändert bleibt, so fordern wir die Gleichung

$$\delta \int \{H(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1) - H(x, y, \dot{x}, \dot{y})\}\, dt \equiv 0. \tag{5}$$

Das Zeichen der identischen Gleichheit soll andeuten, daß von eine beliebigen Weltlinie aus, d. h. bei beliebig angenommenem Zusammenhan zwischen x, y, t aus variiert wird; die Endstellen der Weltlinie bleibe unvariiert. Erhalten bei einer unendlich kleinen Transformation de Gruppe die Größen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ die Zuwüchse $\xi\varepsilon$, $\eta\varepsilon$, $\Xi\varepsilon$, $\mathsf{H}\varepsilon$, wobei ε eine unendlich kleine Größe, $\xi, \eta, \ldots$ endliche Funktionen von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ sind, so wächst jede Größe $f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ um den Betrag

$$\varepsilon \mathfrak{A} f = \varepsilon \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \Xi \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \mathsf{H} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)$$

und $\mathfrak{A} f$ heißt nach Lie das Symbol der unendlich kleinen Transformation Mit dieser Bezeichnung liefert die Gleichung (5) die weitere

$$\delta \int \mathfrak{A} H\, dt \equiv 0;$$

solcher Gleichungen erhält man so viel, wie die Hauptgruppe unabhängige unendlich kleiner Transformationen enthält. Die nach den Regeln de Variationsrechnung folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A} H}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{A} H}{\partial \dot{x}} &\equiv 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{A} H}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{A} H}{\partial \dot{y}} &\equiv 0 \end{aligned} \tag{6}$$

sind ebenfalls Identitäten in den Größen $t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ und ergeben für H gewisse partielle Differentialgleichungen.

Die Hauptgruppe werde nun von den Galilei-Transformationen de

Ebene gebildet; die unendlich kleine unter ihnen, die das Koordinatensystem längs der x-Achse fortbewegt, gibt nur den Größen x, $\dot{x}$ Zuwüchse im Betrage εt und ε, so daß ihr Symbol wird

$$\mathfrak{A}f = t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}.$$

Man hat also die Gleichung

$$\delta \int (tH_x + H_{\dot{x}})\,dt \equiv 0 \tag{7}$$

anzusetzen und findet den Gleichungen (6) gemäß

$$H_{x\dot{x}} + tH_{xx} - \frac{d}{dt}(tH_{x\dot{x}} + H_{\dot{x}\dot{x}}) = 0,$$

$$H_{y\dot{x}} + tH_{xy} - \frac{d}{dt}(tH_{x\dot{y}} + H_{\dot{x}\dot{y}}) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} t\Big(H_{xx} - \frac{dH_{x\dot{x}}}{dt}\Big) - \frac{dH_{\dot{x}\dot{x}}}{dt} &= 0, \\ t\Big(H_{xy} - \frac{dH_{x\dot{y}}}{dt}\Big) - \frac{dH_{\dot{x}\dot{y}}}{dt} + H_{y\dot{x}} - H_{x\dot{y}} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Da in diesen Gleichungen t nur an einer Stelle explizit vorkommt, und alle Größen t, x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ als unabhängig anzusehen sind, ergibt sich

$$H_{xx} - \frac{dH_{x\dot{x}}}{dt} = 0, \qquad H_{xy} - \frac{dH_{x\dot{y}}}{dt} = 0. \tag{9}$$

In diesen Gleichungen müssen die Faktoren der linear auftretenden Größen $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ verschwinden; daraus folgt

$$H_{x\dot{x}\dot{x}} = H_{x\dot{x}\dot{y}} = H_{x\dot{y}\dot{y}} = 0;$$

aus demselben Grunde ergeben die Gleichungen (8), in denen nach (9) die ersten Glieder wegzulassen sind,

$$H_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} = H_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} = H_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}} = 0.$$

Die Größen $H_{\dot{x}\dot{x}}$, $H_{\dot{x}\dot{y}}$, $H_{\dot{y}\dot{y}}$ sind also von x und $\dot{x}$ unabhängig.

Die Hauptgruppe enthält nun auch die Galilei-Transformationen, bei denen das Koordinatensystem längs der y-Achse fortbewegt wird, also Transformationen mit dem Symbol

$$\mathfrak{B}f = t\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}};$$

bildet man hiernach die der Gleichung (7) entsprechende, so erschließt man durch Erwägungen wie die soeben durchgeführten, daß die Größen $H_{\dot{x}\dot{x}}$, $H_{\dot{x}\dot{y}}$, $H_{\dot{y}\dot{y}}$ auch von y und $\dot{y}$ unabhängig, also Festwerte sind, die wir A, B, C nennen wollen. Die Differenz

$$H - \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2)$$

hat also verschwindende zweite Ableitungen nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$, und ist in diesen Größen linear, so daß

$$H = \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) + D\dot{x} + E\dot{y} + F \tag{10}$$

gesetzt werden kann, wobei D, E, F Funktionen von x und y sind. Jetzt ergeben aber die Gleichungen (9)

$$D_{xx}\dot{x} + E_{xx}\dot{y} + F_{xx} - \frac{dD_x}{dt} = 0,$$

$$D_{xy}\dot{x} + E_{xy}\dot{y} + F_{xy} - \frac{dE_x}{dt} = 0,$$

und da auch hier $\dot{x}$, $\dot{y}$ als freie Veränderliche anzusehen sind,

$$E_{xx} - D_{xy} = 0, \quad F_{xx} = F_{xy} = 0.$$

Ebenso ergibt sich mittels der Transformation $\mathfrak{B}f$

$$D_{yy} - E_{xy} = 0, \quad F_{yy} = 0;$$

F ist also eine lineare Funktion von x und y, etwa

$$F = ax + by + c.$$

Die zweite Gleichung (8) ergibt aber, da $H_{\dot{x}\dot{y}}$ ein Festwert ist, in Verbindung mit der zweiten Gleichung (9)

$$H_{y\dot{x}} - H_{x\dot{y}} = 0,$$

also der Formel (10) zufolge

$$D_y - E_x = 0.$$

Der Ausdruck $D\,dx + E\,dy$ ist also ein vollständiges Differential, etwa $d\varphi(x, y)$, und die Glieder $D\dot{x} + E\dot{y}$ können, weil zur Variation bei festen Endwerten keinen Beitrag liefernd, aus der Wirkungsdichte weggelassen werden; sie sind unbestimmt integrierbar. Dasselbe gilt von dem Festwert c; man hat die Gleichung

$$\delta \int \left(\frac{d\varphi(x, y)}{dt} + c\right) dt = \delta(\varphi(x, y) + ct) = 0.$$

Somit bleibt schließlich

$$H = \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) + ax + by.$$

Daß die mit dieser Dichte gebildete Wirkung

$$W = \int H dt$$

an ihrer Variation die geforderten Eigenschaften des Verharrens aufweist, sieht man unmittelbar aus der Formel

$$\delta W = \int dt \left\{ \left(H_x - \frac{dH_{\dot{x}}}{dt}\right)(\delta x - \dot{x}\delta t) + \left(H_y - \frac{dH_{\dot{y}}}{dt}\right)(\delta y - \dot{y}\delta t) \right\},$$

in der die Ausdrücke

$$\delta x - \dot{x}\delta t, \qquad \delta y - \dot{y}\delta t$$

gegenüber den Galilei-Transformationen $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ verharren; bei ersterer z. B. geht δx in $\delta x + \varepsilon\delta t$ und $\dot{x}$ in $\dot{x} + \varepsilon$ über, woraus das Behauptete ersichtlich wird. Aus diesen beiden Transformationen lassen sich aber die sämtlichen Galilei-Transformationen ebenso zusammensetzen, wie eine beliebig gerichtete Geschwindigkeit aus den nach den Koordinaten gerichteten.

Die Bewegung, die durch das Wirkungsprinzip

$$\delta W = 0$$

bestimmt wird, geschieht gemäß den Gleichungen

$$a = A\ddot{x} + B\ddot{y}, \qquad b = B\ddot{x} + C\ddot{y}.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Bewegung eines schweren Punktes, indem die feste Masse durch einen festen symmetrischen Massentensor ersetzt ist, dessen Schema ist

$$A,\ B,$$
$$B,\ C.$$

Die Bezeichnung Tensor wird dadurch gerechtfertigt, daß die Größen A, B, C sich bei linearer Koordinatentransformation offenbar wie die Koeffizienten einer quadratischen Form transformieren.

Macht man durch passende Wahl der Koordinatenrichtungen $B = 0$, so erhält man zwei ausgezeichnete Richtungen, nach denen der Stoffpunkt die im allgemeinen verschiedenen Massen A und C besitzt und sich so bewegt, als ob in jeder dieser Richtungen eine Kraft von fester Größe nach dem zweiten Newtonschen Gesetz wirkte:

$$a = A\ddot{x}, \qquad b = C\ddot{y}.$$

Die Zerlegung der Wirkungsdichte in einen kinetischen und einen nur vom Orte abhängigen Teil, deren ersterer eine quadratische Form der Geschwindigkeitskomponenten ist, ergibt sich auch hier als unmittelbare Folge der Galileischen Forderung des Verharrens, ebenso die entsprechende Zerlegung der Energie in lebendige und Spannkraft; denn nach § 2 ist für die Energie zu setzen

$$-\frac{\partial(H\,dt)}{\partial\,dt} = \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) - ax - by.$$

Nach alledem können wir folgenden Satz aufstellen:

Ein Stoffpunkt bewege sich in der Ebene gemäß einem Prinzip der kleinsten Wirkung. Soll die Variation der Wirkung einer beliebigen gedachten Bewegung mit festen Endorten und Endzeiten gegenüber jeder

Galilei-Transformation invariant bleiben, so kann das Wirkungsprinzip nur die folgende Gestalt haben:

$$\delta \int \{\tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) + ax + by\}\,dt = 0;$$

dabei sind A, B, C, a, b Festwerte. Die Bewegung ist die eines schweren Punktes mit festem symmetrischem Massentensor.

§ 4.

Bewegung eines Stoffpunktes um ein Kraftzentrum.

In der Ebene bewegt sich ein Stoffpunkt P unter dem Einfluß eines Kraftzentrums M; das soll heißen, daß wir die Bewegung des Punktes P aus einem Wirkungsgrundsatz ableiten wollen, in welchem die Wirkungsdichte nur von der gegenseitigen Lage der Punkte M und P und von den Geschwindigkeiten des letzteren abhänge. Sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P, und

$$x_0 = x - u, \qquad y_0 = x - v$$

diejenigen des Punktes M, so sei das Wirkungsprinzip

$$\delta \int H(u, v, \dot{x}, \dot{y})\,dt = 0,$$

und wir bestimmen die Form der Funktion H durch eine Hauptgruppe, in die wir außer den Galilei-Transformationen der Ebene auch die zeitlosen Drehungen des Koordinatensystems aufnehmen. Die Koordinaten des Punktes M gehen in die Wirkungsdichte als Festwerte ein, und werden durch die Transformationen der Hauptgruppe in bestimmter Weise beeinflußt.

Zunächst bei den Galilei-Transformationen werden x_0 und y_0 um dieselben Beträge geändert wie x und y, so daß u uud v ungeändert bleiben, während $\dot{x}$ und $\dot{y}$ willkürliche feste Zuwüchse erhalten; als Symbole zweier unabhängiger Galilei-Transformationen kann man also bei der vorausgesetzten Form der Wirkungsdichte ansetzen

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}$$

Soll nun wiederum allgemein die Variation der Wirkung gegenüber der Hauptgruppe verharren, so ergibt sich nach dem in § 3 angewandten Verfahren

$$\delta \int \mathfrak{A} H\,dt \equiv 0, \qquad \delta \int \mathfrak{B} H\,dt \equiv 0$$

oder

$$\delta \int H_{\dot{x}}\,dt \equiv 0, \qquad \delta \int H_{\dot{y}}\,dt \equiv 0. \tag{11}$$

Die Größen $H_{\dot{x}}$ und $H_{\dot{y}}$ müssen also unbestimmt integrierbar, al

in $\dot{x}$ und $\dot{y}$ linear sein, und bei der vorausgesetzten Form von H wird man setzen können

$$H = \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) + D\dot{x} + E\dot{y} + F, \tag{12}$$

indem man durch die großen Buchstaben Funktionen von u und v bezeichnet. Natürlich erhält man dies Ergebnis auch, wenn man aus den Gleichungen (11) ableitet

$$H_{x\dot{x}} - \frac{dH_{\dot{x}\dot{x}}}{dt} = 0, \qquad H_{x\dot{y}} - \frac{dH_{\dot{y}\dot{x}}}{dt} = 0, \qquad H_{y\dot{y}} - \frac{dH_{\dot{y}\dot{y}}}{dt} = 0$$

und ausdrückt, daß in diesen Gleichungen die Faktoren von $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ verschwinden; man findet

$$H_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} = H_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} = H_{\dot{y}\dot{x}\dot{x}} = H_{\dot{y}\dot{x}\dot{y}} = H_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}} = 0.$$

Geht man mit dem Ausdruck (12) nochmals in die Gleichungen (11) ein, so ergibt sich

$$\delta\int(A\dot{x} + B\dot{y} + D)dt \equiv 0, \qquad \delta\int(B\dot{x} + C\dot{y} + E)dt \equiv 0.$$

Die Ausdrücke

$$A\,dx + B\,dy + D\,dt, \qquad B\,dx + C\,dy + E\,dt$$

sind also vollständige Differentiale, und da A, B, C von t nicht abhängen, so folgt

$$D_u = A_t = 0, \qquad D_v = B_t = 0, \qquad E_u = E_v = 0;$$

die Größen E und D sind also Festwerte, und die Glieder $D\dot{x} + E\dot{y}$ können, weil unbestimmt integrierbar, aus der Wirkungsdichte weggelassen werden; so erhält man den Ausdruck

$$H = \tfrac{1}{2}(A\dot{x}^2 + 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{y}^2) + F.$$

Drehen wir jetzt das Koordinatensystem um den unendlich kleinen Winkel ε, so erhalten u, v, $\dot{x}$, $\dot{y}$ die Zuwüchse $-v\varepsilon$, $u\varepsilon$, $-\dot{y}\varepsilon$, $\dot{x}\varepsilon$; das Symbol einer neuen Transformation der Hauptgruppe ist also

$$\mathfrak{C}f + \mathfrak{D}f,$$

wobei zu setzen ist

$$\mathfrak{C} = u\frac{\partial}{\partial v} - v\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathfrak{D} = \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{x}},$$

und das immer angewandte Verfahren ergibt

$$\delta\int(\mathfrak{C}H + \mathfrak{D}H)dt \equiv 0. \tag{13}$$

Ausgerechnet findet man nach (12)

$$\mathfrak{C}H + \mathfrak{D}H = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{C}A\cdot\dot{x}^2 + 2\,\mathfrak{C}B\cdot\dot{x}\dot{y} + \mathfrak{C}C\cdot\dot{y}^2\} + \mathfrak{C}F + (C - A)\dot{x}\dot{y} + B(\dot{x}^2 - \dot{y}^2).$$

Dieser Ausdruck muß nach (13) unbestimmt integrierbar, also in $\dot{x}$ und $\dot{y}$ linear sein; die in diesen Größen quadratischen Glieder müssen wegfallen und man erhält die Gleichungen

$$(14) \qquad \mathfrak{C}A + 2B = 0, \quad \mathfrak{C}C - 2B = 0, \quad C - A + \mathfrak{C}B = 0.$$

Führt man Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi$$

ein, so wird einfach

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

da r bei der betrachteten Transformation festbleibt; bedeuten Striche die Ableitungen nach φ, f und g unbekannte Funktionen und α einen Festwert, so ergeben die Gleichungen (14)

$$A' + 2B = C' - 2B = C - A + B' = 0,$$
$$C' - A' = -B'' = 4B, \qquad A' + C' = 0,$$
$$C + A = 2f(r), \qquad B = g(r)\cos(2\varphi + \alpha),$$
$$C - A = -B' = 2g(r)\sin(2\varphi + \alpha),$$
$$A = f(r) - g(r)\sin(2\varphi + \alpha), \qquad C = f(r) + g(r)\sin(2\psi + \alpha).$$

Gehen wir nun mit der Wirkungsdichte H nochmals in die Gleichung

$$(15) \qquad \delta\int H_t\,dt \equiv 0$$

ein, so ergibt sich

$$\delta\int(A\,dx + B\,dy) \equiv 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0,$$

und da A und B nur von u und v abhängen, kann man für die zweite Beziehung schreiben

$$A_v - B_u = 0;$$

der Ausdruck $A\,du + B\,dv$ ist ein vollständiges Differential. Führt man in ihn die erhaltenen Werte von A und B und Polarkoordinaten ein, so ergibt sich

$$A\,du + B\,dv = (f - g\sin(2\varphi + \alpha))(dr\cos\varphi - r\sin\varphi\,d\varphi)$$
$$+ g\cos(2\varphi + \alpha)(dr\sin\varphi + r\cos\varphi\,d\varphi)$$
$$= dr\{f\cos\varphi - g\sin(\varphi + \alpha)\} + d\varphi\{-rf\sin\varphi + rg\cos(\varphi + \alpha)\}.$$

Die Integrabilitätsbedingung führt jetzt zu der Gleichung

$$-f\sin\varphi - g\cos(\varphi + \alpha) = -\left(f + r\frac{df}{dr}\right)\sin\varphi + \frac{d}{dr}(rg)\cos(\varphi + \alpha)$$

oder

$$0 = f - \frac{d(rf)}{dr} + \left(g + \frac{d(rg)}{dr}\right)\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi}.$$

Diese Beziehung soll aber bei frei veränderlichen r und φ bestehen; also folgt

$$f - \frac{d(rf)}{dr} = 0, \qquad g + \frac{d(rg)}{dr} = 0,$$

$$f = m, \qquad g = \frac{a}{r^2},$$

wobei m und a neue Festwerte sind.

Die so bestimmten Werte von A, B, C setzen wir in die Gleichung

$$\delta \int H_y \, dt = 0,$$

aus der wir nach der bei der Gleichung (15) angestellten Erwägung schließen, daß $B\,du + C\,dv$ ein vollständiges Differential ist; wir erhalten

$$\begin{aligned} B\,du + C\,dv &= \frac{a\cos(2\varphi+\alpha)}{r^2}(-r\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dr) \\ &\quad + m(r\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dr) \\ &= d\varphi\left\{\frac{-a\cos(2\varphi+\alpha)\sin\varphi}{r} + mr\cos\varphi\right\} \\ &\quad + dr\left\{\frac{a\cos(2\varphi+\alpha)\cos\varphi}{r^2} + m\sin\varphi\right\} \end{aligned}$$

und die Integrabilitätsbedingung ergibt

$$a\cos(2\varphi+\alpha)\sin\varphi = a\frac{d}{d\varphi}(\cos(2\varphi+\alpha)\cos\varphi),$$

was bei beliebigen Werten von φ nur möglich ist, wenn $a = 0$. Somit finden wir

$$A = C = m, \qquad B = 0.$$

Die Gleichung (13) ergibt jetzt noch

$$\delta \int \mathfrak{C} F \, dt \equiv \delta \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} \, dt \equiv 0;$$

da nun F nur von r und φ abhängt, kann hier unter dem Integralzeichen nur dann ein vollständiges Differential stehen, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = c$$

ein Festwert ist; man muß also setzen

$$F = c\varphi + \Phi(r)$$

und findet schließlich

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c\varphi + \Phi(r).$$

Damit sind wir wiederum von Invarianzforderungen ausgehend zu einer wohlbestimmten Gattung von Kraftfeldern gekommen, die durch ein Hamiltonsches Prinzip von der Form

$$\delta \int \left\{ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c\varphi + \Phi(r) \right\} dt = 0$$

beherrscht werden und in der Sprache der gewöhnlichen Mechanik leicht zu kennzeichnen sind; es sind die Bewegungen eines Punktes P unter der Wirkung einer Zentralkraft, die nach dem Zentrum M hinwirkt, und einer dem Abstande MP umgekehrt proportionalen Kraft, die auf der Richtung MP senkrecht steht; letztere hat das Potential $c\varphi$, das beim Umgang um M mehrwertig wird. Als Lehrsatz ergibt sich auch hier, daß die Masse ein Festwert m ist, da die Impulskomponenten nach der Definition des § 2 die Werte

$$H_x = m\dot{x}, \qquad H_y = m\dot{y}$$

haben. Die Energie ist nach § 2

$$-\frac{\partial(H\,dt)}{\partial\,dt} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - c\varphi - \Phi(r)$$

zerfällt also auch hier in lebendige und Spannkraft; soll die Energie sich im strengen Sinne erhalten, so muß $c = 0$ gesetzt werden.

Diese in der gewöhnlichen Mechanik wohlbekannten Bewegungen eines Stoffpunktes in Verbindung mit einem Kraftzentrum sind also die einzigen, bei denen ein Wirkungsprinzip gilt und die Variation der Wirkung, in demselben Sinne wie in § 3 *verstanden, gegenüber den Galilei-Transformationen der Ebene und den zeitlosen Drehungen des Bezugssystems invariant bleibt. Die Bewegungsgleichungen folgen ohne Berufung auf die Newtonschen Gesetze allein aus dem durch die Invarianzforderung vollständig bestimmten Prinzip der kleinsten Wirkung.*

§ 5.

Bewegung zweier Punkte auf einer Geraden.

Zwei Stoffpunkte mögen sich auf derselben festen Geraden bewegen und von einem festen Punkte derselben die Abstände x und y besitzen. Die Bewegung werde beherrscht von einem Wirkungsprinzip

$$\delta \int F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt = 0;$$

die Hauptgruppe, aus der wir die Form der Funktion F bestimmen wollen, sei die Gruppe der Galilei-Transformationen der festen Geraden, bei denen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ in $x + at$, $y + at$, $\dot{x} + a$, $\dot{y} + a$ übergehen, und a einen beliebigen Festwert bedeutet.

Jede bei dieser Transformation invariante Funktion $f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ erfüllt also die Gleichung

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f(x + at,\ y + at,\ \dot{x} + a,\ \dot{y} + a),$$

und da t und a willkürliche Größen sind, folgt aus dieser Identität, daß f nur von den Differenzen

$$x - y = u, \qquad \dot{x} - \dot{y} = \dot{u} = v$$

abhängen kann; f bleibt ja ungeändert, wenn x und y um dieselbe willkürliche Größe vermehrt werden und ebenso, wenn $\dot{x}$ und $\dot{y}$ um eine willkürliche Größe vermehrt werden, die eine andere ist, als die zu x und y hinzugefügte. Jede solche invariante Funktion kann also in der Form $g(u, v)$ dargestellt werden.

Gehen nun durch eine Galilei-Transformation die Größen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ in $x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1$ über, so soll dem Begriff der Hauptgruppe zufolge die Gleichung

$$\delta \int \{H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - H(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1)\}\, dt \equiv 0$$

gelten und zwar als identische Gleichung, weil wir von einer beliebigen Linie in der Mannigfaltigkeit der Größen x, y, t beim Variieren ausgehen, also von einer beliebigen Weltlinie im sachgemäß ausgedehnten Sinne des Wortes. Die gewöhnliche Regel der Variationsrechnung ergibt, da offenbar $H(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1)$ nach x, $\dot{x}$ usw. differenziert dasselbe Ergebnis liefert, wie wenn man nach x_1, $\dot{x}_1$ usw. differenziert, die Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} H_x - \frac{d H_{\dot{x}}}{dt}\Big|^{x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1} &= H_x - \frac{d H_{\dot{x}}}{dt}, \\ H_y - \frac{d H_{\dot{y}}}{dt}\Big|^{x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1} &= H_y - \frac{d H_{\dot{y}}}{dt}; \end{aligned}$$

d. h. die Ausdrücke

$$M = H_x - \dot{x} H_{x\dot{x}} - \dot{y} H_{y\dot{x}} - \ddot{x} H_{\dot{x}\dot{x}} - \ddot{y} H_{\dot{x}\dot{y}}$$
$$N = H_y - \dot{x} H_{x\dot{y}} - \dot{y} H_{y\dot{y}} - \ddot{x} H_{\dot{x}\dot{y}} - \ddot{y} H_{\dot{y}\dot{y}}$$

sind gegenüber der Galilei-Transformation invariant.

Um nur die verharrenden Ausdrücke als solche rechnerisch kennzeichnen zu können, wollen wir an Stelle der vier Größen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ allgemein $x, u, \dot{y}, v$ einführen; alsdann drückt sich die Eigenschaft des Verharrens gegenüber der Hauptgruppe dadurch aus, daß die Größen x und $\dot{y}$ nicht mehr vorkommen. Setzt man mit einer beliebigen Funktion F die Gleichung

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mathfrak{F}(x, u, \dot{y}, v)$$

an, so folgt unmittelbar

$$(17)\qquad F_{\dot{x}} = \mathfrak{F}_v, \qquad F_{\dot{y}} = \mathfrak{F}_{\dot{y}} - \mathfrak{F}_v, \qquad F_x = \mathfrak{F}_x + \mathfrak{F}_u, \qquad F_y = -\mathfrak{F}_u,$$

und weiter für die zweiten Ableitungen

$$(18)\qquad F_{\dot{x}\dot{x}} = \mathfrak{F}_{vv}, \qquad F_{\dot{x}\dot{y}} = \mathfrak{F}_{v\dot{y}} - \mathfrak{F}_{vv}, \qquad F_{\dot{y}\dot{y}} = \mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}} - 2\mathfrak{F}_{v\dot{y}} + \mathfrak{F}_{vv}.$$

Aus der Invarianz der Ausdrücke M, N folgt nun, da $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ beliebige, also invariante Größen sind, daß die drei Größen $H_{\dot{x}\dot{x}}$, $H_{\dot{x}\dot{y}}$, $H_{\dot{y}\dot{y}}$ ebenfalls invariant, also durch u und v allein ausdrückbar sind, und die Gleichungen (18) ergeben, wenn man $H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mathfrak{H}(x, u, \dot{y}, v)$ setzt, dasselbe für die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{H}$ nach v und $\dot{y}$. Man darf daher setzen

$$\mathfrak{H}_{vv} = f(u, v),$$

mithin auch

$$\mathfrak{H}_{\dot{y}} = \varphi(u, v) + g(x, u, \dot{y}),$$

und hieraus folgt

$$\mathfrak{H}_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{\partial g(x, u, \dot{y})}{\partial \dot{y}}.$$

Diese Größe ist aber, wie bemerkt, von x und $\dot{y}$ unabhängig, also etwa gleich $\theta(u)$, und man erhält

$$g(x, u, \dot{y}) = \dot{y}\theta(u) + \psi(x, u),$$

$$\mathfrak{H}_{\dot{y}} = \dot{y}\theta(u) + \varphi(u, v) + \psi(x, u),$$

also schließlich

$$(19) \qquad \mathfrak{H} = \frac{\dot{y}^2}{2}\theta(u) + \dot{y}(\varphi(u, v) + \psi(x, u)) + \omega(x, u, v).$$

Da ferner auch die Größe

$$\mathfrak{H}_{vv} = \dot{y}\varphi_{vv} + \omega_{vv}$$

von x und $\dot{y}$ unabhängig ist, so folgt

$$\varphi_{vv} = 0, \qquad \varphi(u, v) = f(u) + vg(u).$$

Jetzt benutzen wir die invariante Beschaffenheit der Größe M noch mals, indem wir die letzten beiden Glieder, die für sich invariant sind, weglassen; invariant ist dann auch die Restgröße

$$R = H_x - \dot{x}H_{x\dot{x}} - \dot{y}H_{y\dot{x}},$$

für die wir den Gleichungen (17) zufolge schreiben können

$$R = \mathfrak{H}_x + \mathfrak{H}_u - (v + \dot{y})(\mathfrak{H}_{xv} + \mathfrak{H}_{uv}) + \dot{y}\mathfrak{H}_{uv}.$$

Hier für $\mathfrak{H}$ den Ausdruck (19) eingesetzt, ergibt sich

$$R = \dot{y}\psi_x + \omega_x + \frac{\dot{y}^2}{2}\theta'(u) + \dot{y}(\varphi_u + \psi_u) + \omega_u$$

$$- (v + \dot{y})(\dot{y}\varphi_{uv} + \omega_{uv}) + \dot{y}(\varphi_{uv}\dot{y} + \omega_{uv}).$$

Da nun R als invariant sich auf eine Funktion von u und v allein zurückführen, also alle von $\dot{y}$ und x abhängenden Glieder wegfallen müssen, so folgt

$$\theta'(u) = 0, \qquad \theta(u) = a,$$

wobei a einen Festwert bedeutet. Benutzen wir noch die Identität

$$2\dot{y}v = \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - v^2,$$

so wird jetzt der Ausdruck (19)

$$\mathfrak{H} = \frac{a\dot{y}^2}{2} + g(u)\frac{\dot{x}^2-\dot{y}^2}{2} + \dot{y}\left\{f(u) + \psi(x,u) - \frac{v^2}{2}g(u)\right\} + \omega(x,u,v)$$

oder in etwas geänderter Bezeichnung

$$\mathfrak{H} = g(u)\frac{\dot{x}^2}{2} + h(u)\frac{\dot{y}^2}{2} + \dot{y}\psi(x,u) + \omega(x,u,v),$$

wobei

(20) $$g(u) + h(u) = a.$$

Das Glied $\dot{y}\psi(x,u)$ kann durch Beifügung einer Funktion von x, u und v unbestimmt integrierbar gemacht werden; man braucht nur in den Ausdruck

$$\dot{y}\psi(x,u) + v\Theta(x,u) = \dot{x}\Theta + \dot{y}(\psi - \Theta)$$

die Integrabilitätsbedingung einzuführen, indem man u durch $x - y$ ersetzt; man erhält so die Gleichung

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{\partial(\psi-\Theta)}{\partial x},$$

die, wenn man rückwärts u und x einführt, erfordert

$$-\Theta_u = \psi_x + \psi_u - \Theta_x - \Theta_u,$$

so daß es genügt,

$$\Theta = \int dx(\psi_x + \psi_u)$$

anzusetzen. Das Glied $-v\Theta(x,u)$ kann nun mit $\omega(x,u,v)$ zusammengefaßt werden; läßt man das unbestimmt integrierbare Glied weg und ändert den Sinn des Zeichens ω, so erhält man

$$\mathfrak{H} = H = \frac{g(u)\dot{x}^2 + h(u)\dot{y}^2}{2} + \omega(x,u,v)$$

und die Beziehung (20) gilt nach wie vor.

Der erste Teil dieses Ausdrucks der gesuchten Wirkungsdichte hat nun für sich schon die Eigenschaft, die wir vom Ganzen verlangen, daß nämlich die Variation des Zeitintegrals gegenüber der Hauptgruppe invariant ist. Bei der Galilei-Transformation wachsen nämlich $\dot{x}$ und $\dot{y}$ um einen festen Betrag b, während u ungeändert bleibt; der erste Summand von H erhält also den Zuwachs

$$b\left\{\dot{x}g(u) + \dot{y}h(u)\right\} + \frac{h(u)+g(u)}{2}b^2$$

oder nach (20)

$$bg(u)(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{ab^2}{2} + ab\dot{y},$$

der offenbar, da $\dot{x} - \dot{y} = \dot{u}$ ist, unbestimmt integrierbar ist, so daß die Variation seines nach der Zeit genommenen Integrals immer verschwindet. Daraus folgt, daß mit der Variation des Wirkungsintegrals auch die Größe

$$\delta \int \omega(x, u, v)\, dt$$

gegenüber der Hauptgruppe invariant sein muß, und hieraus können ähnliche Schlüsse gezogen werden, wie bei der Ableitung der Gleichungen (16).

Setzt man

$$\omega(x, u, v) = \Omega(x, y, \dot{x}, \dot{y}),$$

so müssen, wie oben die Größen M und N, so hier die Ausdrücke

$$\Omega_x - \frac{d\,\Omega_{\dot{x}}}{dt} = \omega_u + \omega_x - \frac{d\,\omega_v}{dt},$$

$$\Omega_y - \frac{d\,\Omega_{\dot{y}}}{dt} = -\omega_u - \frac{d(-\omega_v)}{dt}$$

invariant sein; dasselbe gilt von ihrer Summe ω_x und man findet so

$$\omega_x = \varrho(u, v), \qquad \omega = x\varrho(u, v) + \sigma(u, v).$$

Jetzt wird der Ausdruck

$$\begin{aligned} -\omega_u + \frac{d\,\omega_v}{dt} &= \frac{d(x\varrho_v + \sigma_v)}{dt} - x\varrho_u - \sigma_u \\ &= (v + \dot{y})\varrho_v + x(\varrho_{vu} v + \varrho_{vv}\dot{v}) \\ &\quad + v\sigma_{uv} + \dot{v}\sigma_{vv} - x\varrho_u - \sigma_u; \end{aligned}$$

soll er, weil invariant, von x und $\dot{y}$ frei sein, so folgt

$$\varrho_v = \varrho_u = 0, \qquad \varrho = b,$$

wobei b einen Festwert bedeutet, und man erhält als endgültigen Wert der gesuchten Wirkungsdichte

$$H = \frac{g(u)\,\dot{x}^2 + h(u)\,\dot{y}^2}{2} + b\,x + \sigma(u, v)$$

oder auch, indem man von σ ein Glied cu abscheidet und

$$b + c = \alpha, \qquad b + c = \beta$$

setzt und die Bedeutung von σ ändert

$$H = \frac{g(u)\,\dot{x}^2 + h(u)\,\dot{y}^2}{2} + \alpha x + \beta y + \sigma(u, v)$$

mit den Beziehungen, die wir wiederholen:

$g(u) + h(u) = a = \text{const.}$, $u = x - y$, $v = \dot{x} - \dot{y}$, $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{cons}$

Das ist wiederum ein Ergebnis, das sich in der Sprache der gewöhn

lichen Mechanik sehr übersichtlich ausdrücken läßt. Das Wirkungsprinzip gibt die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(g(u)\dot{x}) = \alpha + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{x}}\right),$$

$$\frac{d}{dt}(h(u)\dot{y}) = \beta + \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{y}}\right)$$

und dabei gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{y}}.$$

Die beiden Stoffpunkte bewegen sich also, als ob sie veränderliche Massen von fester Summe hätten, deren Verteilung eine Funktion der Entfernung ist; auf jeden der Punkte wirkt eine gewöhnliche Schwerkraft von fester Größe und eine Scheringsche Kraft[11]), deren Potential von der Entfernung und von der relativen Geschwindigkeit beider Punkte abhängt, so daß die beiden Scheringschen Kräfte dem Satze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung unterliegen. Die Massenverteilungsfunktion $g(u)$, die festen Kräfte α, β und das Scheringsche Potential $\sigma(u, v)$ können beliebig gewählt werden, da der aufgestellte Ausdruck H stets die geforderten Invarianzeigenschaften besitzt, wie man leicht übersieht.

Der Begriff der veränderlichen Masse ist bei einem System von mehreren Stoffpunkten insofern nicht ganz eindeutig bestimmt, als nach § 2 der nach der Koordinate x genommene Gesamtimpuls unseres Systems

$$g(u)\dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{x}}$$

wäre, so daß die Definition des § 2 nicht $g(u)$ als Masse ergäbe, sondern

$$g(u) + \frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{x}}.$$

Es würde sich daher wohl empfehlen, die Masse erst zu definieren auf Grund der Zerlegung der Wirkungsdichte in einen kinetischen und einen anderen Teil, den wir, obgleich er von der relativen Geschwindigkeit der beiden Punkte abhängt, als potentiell betrachten. Die Masse des einen Punktes wäre dann der vom kinetischen Teil der Wirkungsdichte herrührende Teil des entsprechenden Impulses, dividiert durch die Geschwindigkeit. Man übersieht leicht, daß man bei ebenen und räumlichen Aufgaben auf diese Weise zunächst zu Massentensoren geführt würde wie in § 3.

---

[11]) Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft, Bd. 18 (1873), S. 1—54.

Die Energie bietet bei unserer Aufgabe keine Schwierigkeit dar; sie hat nach der Definition des § 2 den Ausdruck

$$-\frac{\partial(H\,dt)}{\partial dt} = \frac{g(u)\,\dot{x}^2 + h(u)\,\dot{y}^2}{2} - \alpha x - \beta y - \sigma(u,v) + v\,o_v(u,v)$$

und hat bei der durch das Wirkungsprinzip bedingten Bewegung einen festen Wert.

Wir fassen das Gesamtergebnis dieses Paragraphen in folgendem Satz zusammen:

Bewegen sich zwei Stoffpunkte auf einer Geraden gemäß einem Wirkungsprinzip und ist die Variation der Wirkung auch von jeder gedachten Bewegung aus gegenüber einer Galilei-Transformation der Geraden invariant, so ist der einzig mögliche Bewegungsvorgang der folgende. Die Punkte haben Massen, deren Summe ein Festwert, deren Verteilung eine Funktion der Entfernung ist; auf jeden Punkt wirkt eine konstante Kraft und beide Punkte wirken aufeinander dem Gegenwirkungsprinzip gemäß mit einer Kraft ein, deren Potential eine Funktion des Abstandes und der relativen Geschwindigkeit ist.

§ 6.

Bewegung eines Stoffpunktes in der Lorentz-Einsteinschen Mechanik

Unser Verfahren ist nicht an die Gruppe der Galilei-Transformationen gebunden, sondern kann auch in der Lorentz-Einsteinschen Mechanik angewandt werden. Wir betrachten die Bewegung eines Stoffpunktes auf einer Geraden, längs deren x die räumliche Koordinate sei, und setzen das Wirkungsprinzip gleich in der etwas vereinfachten Form

$$\delta \int H(\dot{x})\,dt = 0$$

an; die Form der Wirkungsdichte H suchen wir aus der Forderung zu bestimmen, daß längs jeder Weltlinie die Variation

$$\delta \int H(\dot{x})\,dt$$

gegenüber der Lorentz-Transformation invariant sei. Diese wird, wenn die Lichtgeschwindigkeit $= 1$ ist, gegeben durch Gleichungen

$$x_1 = \alpha x + \beta t, \qquad t_1 = \beta x + \alpha t,$$

in denen α, β Festwerte sind und die Gleichung

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1$$

erfüllen, womit die für die Lorentz-Transformation maßgebende Beziehung

$$x^2 - t^2 = x_1^2 - t_1^2$$

gesichert ist. Nehmen wir die Transformation unendlich klein, so ist etwa β als unendlich klein erster Ordnung zu betrachten, und man erhält bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\alpha = \sqrt{1+\beta^2} = 1,$$

$$x_1 = x + \beta t, \quad t_1 = t + \beta x,$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt_1} = \frac{\dot{x}+\beta}{1+\beta\dot{x}} = \dot{x} + \beta(1-\dot{x}^2).$$

Das Wirkungselement nimmt daher in den Größen x_1, t_1 die folgende Gestalt an:

$$H(\dot{x}_1)\,dt_1 = H(\dot{x}+\beta(1-\dot{x}^2))(1+\beta\dot{x})\,dt$$
$$= \{H(\dot{x}) + \beta(H'(\dot{x})(1-\dot{x}^2) + \dot{x}H(\dot{x}))\}\,dt;$$

unsere Invarianzforderung verlangt

$$\delta\int H(\dot{x})\,dt \equiv \delta\int H(\dot{x}_1)\,dt_1$$

oder, wenn man die erhaltenen Gleichungen berücksichtigt,

$$\delta\int dt\{H'(\dot{x})(1-\dot{x}^2) + \dot{x}H(\dot{x})\} \equiv 0,$$

wobei das Identitätszeichen wieder bedeutet, daß von einer beliebigen Weltlinie aus variiert werden soll. Der Integrand in der letzten Gleichung muß daher unbestimmt integrierbar, also jedenfalls in $\dot{x}$ linear sein, so daß man für die Funktion H die allgemeine Beziehung

$$H'(u)(1-u^2) + uH(u) = au + b \tag{21}$$

erhält, in der a und b Festwerte bedeuten. Eine Lösung dieser Gleichung wäre

$$H(u) = bu + a;$$

die homogene Differentialgleichung

$$1-u^2)\frac{dy}{du} + uy = 0$$

hat die Lösung

$$y = \sqrt{1-u^2};$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (21) ist also, wenn man durch c einen willkürlichen Festwert bezeichnet,

$$H(u) = bu + a + c\sqrt{1-u^2}.$$

In der Wirkungsdichte $H(\dot{x})$ wären aber die Glieder $b\dot{x} + a$ unbestimmt integrierbar. könnten also weggelassen werden; somit bleibt als die gesuchte Form der Wirkungsdichte

$$H(\dot{x}) = c\sqrt{1-\dot{x}^2},$$

und das Wirkungselement

$$H\,dt = c\sqrt{dt^2 - dx^2} = c\,d\tau$$

ist dem Element der Eigenzeit proportional.

Dies Ergebnis ist von Planck aus einer etwas anderen Voraussetzung hergeleitet, derjenigen nämlich, daß das Wirkungselement selbst invariant sein soll. Mit dieser Forderung kommt man schneller zum Ziel; sie läßt sich aber, wie aus § 1 ersichtlich ist, auf den Fall der Galilei-Transformation nicht übertragen, weil hier tatsächlich nur die Wirkungsvariation, nicht aber Wirkung und Wirkungselement invariant sind.

Beiläufig ergeben sich die Bewegungsgleichungen als Erhaltungssätze des Impulses und der Energie auch in der Lorentz-Einsteinschen Mechanik vollständig im Rahmen unseres § 2. Impuls und Energie sind nach der dort gegebenen Definition

$$\frac{\partial(H\,dt)}{\partial\,dx} = \frac{-c\,dx}{\sqrt{dt^2 - dx^2}} = -c\frac{dx}{d\tau},$$

$$-\frac{\partial(H\,dt)}{\partial\,dt} = \frac{-c\,dt}{\sqrt{dt^2 - dx^2}} = -c\frac{dt}{d\tau}.$$

Ist der betrachtete Punkt einem Kraftfelde eingebettet, so entspreche der rein räumlichen Verschiebung $\delta' x$ das Arbeitselement $X\,\delta' x$. Bei einer beliebigen raumzeitlichen Variation ist

$$\delta' x = \delta x - \dot{x}\,\delta t$$

die räumliche Komponente, das Arbeitselement also

$$X\,\delta' x = X\,\delta x + T\,\delta t,$$

wobei $T = -\dot{x}\,X$ die negative Leistung bedeutet, und das nach § 2 verallgemeinerte Wirkungsprinzip gibt die Gleichung

$$\delta\int H(\dot{x})\,dt + \int dt\,(X\,\delta x + T\,\delta t) = 0,$$

aus der man nach dem gewöhnlichen Verfahren der Variationsrechnung ableitet

$$d\left(-c\frac{dx}{d\tau}\right) - X\,dt = 0,$$

$$d\left(-c\frac{dt}{d\tau}\right) + T\,dt = 0,$$

d. h. die gewöhnlichen Gleichungen der Lorentz-Einsteinschen Mechanik. Die veränderliche Masse, als Quotient des Impulses dividiert durch die Geschwindigkeit, ergibt sich, wenn wir

$$-c\frac{dx}{d\tau} = \left(-c\frac{dt}{d\tau}\right)\cdot\dot{x}$$

schreiben, gleich der Energie $-c\frac{dt}{d\tau}$; der Zuwachs dieser im Zeitelement dt ist

$$-T\,dt = X\,dx,$$

also gleich der bei der Bewegung geleisteten Arbeit, und die Ruhmasse des betrachteten Punktes ist $-c$, wie es auch bei Planck herauskommt.

(Eingegangen am 15. August 1918.)

Ein Satz über Riemannsche Integrale.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Bekanntlich gilt der Satz:

Wenn die $f_n(x)$ *eine in* $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen sind, für welche der* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *existiert, und wenn sowohl die* $f_n(x)$ *als auch* $f(x)$ *von* a *bis* b *im Riemannschen Sinne integrabel sind, so gilt* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Herr Bieberbach hat auf S. 155—157 dieses Bandes (vgl. auch die Berichtigungen auf S. 474) einen neuen Beweis des Osgoodschen Spezialfalles gegeben, in dem die $f_n(x)$ und $f(x)$ stetig vorausgesetzt werden. Er stützt sich dabei auf den in Fußnote 2 (S. 157) genannten bekannten Hilfssatz über Intervallmengen, von dem er im Text eine von der Maßtheorie freie Beweisanordnung gibt [1]).

Ich füge die Bemerkung hinzu, daß sich aus diesem Hilfssatz nicht nur der Osgoodsche, sondern auch der obige Satz sofort ergibt; die folgende Begründung ist sogar kürzer als die Bieberbachsche beim Spezialfall.

Man darf $0 \leqq f_n(x) \leqq M$ und $f(x) = 0$ annehmen (da sonst nur $|f_n(x) - f(x)|$ und 0 statt $f_n(x)$ und $f(x)$ zu betrachten wäre).

---

[1]) Während Herr F. Riesz in der Abhandlung, an die Herr Bieberbach anknüpft, ausdrücklich die Arzelàsche Arbeit *Sulle serie di funzioni (parte seconda* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. V, Bd. VIII (1899—1900), S. 701—744] unter Hervorhebung der Seitenzahlen 723—724 zitiert, übersieht Herr Bieberbach, daß jener Hilfssatz dort als „lemma fondamentale" auftritt und — selbstverständlich ohne moderne Maßtheorie — von demselben Verfasser wie auf S. 134 jenes Bandes erwähnt, schon 1885 bewiesen wurde, in der Arbeit *Un teorema intorno alle serie di funzioni* [Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Ser. IV, Bd. I, S. 262—267].

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele n, so daß $\int_a^b f_n(x)\,dx > 2\varepsilon(b-a)$ wäre. Zu jedem dieser n gibt es also eine Einteilung des Intervalls in endlich viele Teile, so daß $\Sigma e\lambda > 2\varepsilon(b-a)$ ist, wo e die Länge einer Teilstrecke, λ die untere Grenze von $f_n(x)$ daselbst ist. Bezeichnet j die Gesamtlänge derjenigen Teilstrecken, für die $\lambda \geqq \varepsilon$, d. h. $f_n(x) \geqq \varepsilon$ ist, so ist $2\varepsilon(b-a) < \sum_{\lambda \geqq \varepsilon} e\lambda + \sum_{\lambda < \varepsilon} e\lambda \leqq Mj + \varepsilon(b-a)$, $j > \frac{\varepsilon(b-a)}{M}$. Nach dem Hilfssatz gibt es also einen Punkt x, so daß unendlich oft $f_n(x) \geqq \varepsilon$ ist, gegen die Voraussetzung.

Berlin, den 22. September 1918.

(Eingegangen am 22. September 1918.)

Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Einleitung.

Die nachfolgende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit den Nullstellen solcher ganzer Funktionen, die durch bestimmte Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int_0^1 f(t)\cos zt\,dt = U(z),$$

$$(2) \qquad \int_0^1 f(t)\sin zt\,dt = V(z)$$

dargestellt werden. Die Bezeichnungen $U(z)$ und $V(z)$ für die beiden Funktionen (1) und (2) will ich im folgenden ständig beibehalten. Ich nehme der Einfachheit halber die obere Grenze der Integrale gleich 1 an, aber die Resultate übertragen sich selbstverständlich auf den Fall einer beliebigen endlichen oberen Grenze. Der Fall der unendlichen oberen Grenze, der mit Hinsicht auf die Riemannsche ξ-Funktion besonders interessant wäre, scheint hingegen den darzulegenden Methoden nicht ohne weiteres zugänglich zu sein.

Man begegnet in der mathematischen Physik mehreren Integralen von der Form (1) und (2). Ich führe nur zwei sehr bekannte Beispiele an:

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} = J_0(z),$$

$$(4) \qquad \int_0^1 t\sin zt\,dt = \frac{\sin z - z\cos z}{z^2} = \frac{\cos z}{z^2}(\operatorname{tg} z - z).$$

Die Nullstellen dieser beiden letzteren Funktionen sind ziemlich genau bekannt: Sie sind alle reell und einfach und auf eine sehr regelmäßige Weise verteilt. Von den Nullstellen der Funktion (3) befindet sich je eine im Innern der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, 6\pi\right), \ldots$$

und wenn man zu diesen positiven Nullstellen die spiegelbildlichen negativen hinzunimmt, erhält man sämtliche Nullstellen von (3). Ähnlicherweise sind die positiven Nullstellen von (4) in die Intervalle

$$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

eingeschlossen. Ich werde im folgenden diese gemeinsamen Eigenschaften der Nullstellen auf gemeinsame Eigenschaften der angegebenen Integralausdrücke der beiden Funktionen zurückführen, auf so einfache und augenfällige Eigenschaften, daß man sie durch bloßen Anblick der angeschriebenen Formeln feststellen kann. Ich werde nämlich zeigen, daß *die Funktionen $U(z)$ und $V(z)$ nur reelle Nullstellen haben, unter der einzigen Bedingung, daß $f(t)$ positiv und nicht abnehmend ist.* Ich werde ferner zeigen, *daß die fraglichen Nullstellen sicher einfach sind, wenn $f(t)$ stetig anwächst.* Die regelmäßige Verteilung, die wir an den Nullstellen von (3) wahrgenommen haben, kommt den Nullstellen aller solchen Funktionen $U(z)$ zu, deren zugehöriges $f(t)$ nicht nur stetig anwächst, sondern auch konvex ist, und ähnlich läßt sich die analoge Beobachtung über (4) auf eine ganze Klasse von Funktionen übertragen, zu denen auch die Funktion

$$J_1(z) = -J_0'(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,n+1!} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t \sin zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

gehört. — Es scheint mir merkwürdig zu sein, daß derartig einfache Bedingungen, wie die Monotonie oder Konvexität von $f(t)$, so präzise und erschöpfende Eigenschaften der Nullstellen zufolge haben.

Ich werde die Untersuchung nach zwei verschiedenen Methoden durchführen, die, wenn auch ihre Ergebnisse sich teilweise decken, den Gegenstand von ganz anderen Seiten her zu betrachten lehren. Die erste Methode beruht auf einer Kombination einfachster und geläufigster algebraischer Sätze. Sie ist in den Paragraphen 1 bis 3 dargelegt. Die zweite Methode ging aus von einem Satze, den Herr Hurwitz schon vor längerer Zeit gefunden hatte und der, mit gütiger Erlaubnis des hochverehrten Herrn Verfassers, in dieser Arbeit zuerst mitgeteilt wird (vgl. § 5 und § 6). Der Paragraph 4 enthält einen längeren Exkurs und der

letzte § 7 ist einer ergänzenden Untersuchung gewidmet, die die Dichtigkeit der Nullstellen analoger Funktionen betrifft und in den Bereich der Hadamardschen Theorie fällt.

Damit der Leser durch die hie und da notgedrungen minutiöse Darstellung nicht über die Einfachheit der Sache getäuscht wird, will ich die Hauptschlüsse der ersten Methode schon hier in kurzen Worten mitteilen. Herr Kakeya hat unlängst[1]) den höchst einfachen, aber wie es scheint recht nützlichen Satz gefunden, daß alle Nullstellen eines Polynoms, dessen Koeffizienten positiv und wachsend sind, den absoluten Betrag kleiner als 1 haben. Ist zum Beispiel $f(t)$ eine monoton wachsende positive Funktion, so liegen alle Wurzeln der Gleichung

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)z+f\left(\frac{2}{n}\right)z^2+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}=0$$

im Innern des Einheitskreises. Daraus schließt man, durch eine geläufige Überlegung, daß alle Wurzeln der Gleichung

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)\cos z+f\left(\frac{2}{n}\right)\cos 2z+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cos(n-1)z=0$$

reell sind (vgl. § 2). Durch einen Grenzübergang folgt hieraus, daß alle Nullstellen der ganzen Funktion

$$\int_0^1 f(t)e^{zt}dt=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}f\left(\frac{\nu}{n}\right)e^{\frac{z\nu}{n}}$$

in der linken Halbebene und die von

$$\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\nu-1}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\cos\frac{z\nu}{n}$$

auf der reellen Achse liegen. Meine weiter unten folgende Darstellung unterscheidet sich von diesem Gedankengange nur darin, daß ich den Kakeyaschen Satz nicht durch einen Grenzübergang, sondern durch eine sinngemäße Nachbildung der präziseren Behandlung, die Herr Hurwitz diesem Satze zuteil werden ließ, auf das „kontinuierlich Unendliche" übertrage. Bei diesem etwas mühsameren Verfahren erhält man genauere Resultate.

§ 1.

Analogon des Kakeyaschen Satzes.

Ich will im Verlauf des vorliegenden Paragraphen über die im Intervalle $0<t<1$ definierte Funktion $f(t)$ folgende Voraussetzungen machen

[1]) S. Kakeya, On the Limits of the Roots of an Algebraic Equation with Positive Coefficients, The Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 2, (1912), Nr. 3.

$f(t)$ positiv, d. h. $f(t) > 0$,
$f(t)$ nicht abnehmend, d. h. $f(t') \geqq f(t)$, wenn $t' > t$

Darüber hinaus wird ferner angenommen, daß

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} f(t)\,dt \text{ existiert.}$$

Ich unterscheide zwei Fälle (diese Fallunterscheidung ist für die ganze Untersuchung von Wichtigkeit): ich sage, daß die Funktion $f(t)$ sich im Ausnahmefall befindet, wenn sie streckenweise konstant ist, nur endlich viele Sprungstellen hat und ihre sämtlichen Sprungstellen rationale echte Brüche sind. — Liegt der Ausnahmefall nicht vor, so befindet sich $f(t)$ im allgemeinen Falle.

Ich will jetzt den folgenden Satz beweisen:

Befindet sich die positive nicht abnehmende Funktion $f(t)$ im allgemeinen Falle, so liegen alle Nullstellen der ganzen Funktion

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt}\,dt \tag{5}$$

im Innern der linken Halbebene, d. h. $z = x + iy$ gesetzt, im Gebiete $x < 0$. Im Ausnahmefalle liegen unendlich viele Nullstellen von $F(z)$ auf der imaginären Achse $x = 0$ und alle in der abgeschlossenen linken Halbebene $x \leqq 0$.

Ich werde den Beweis in mehreren Schritten erbringen und zuerst das Verhalten von $F(z)$ auf der imaginären Achse untersuchen.

I. Ich will den Ausdruck von $F(z)$ mit Hilfe eines Stieltjesschen Integrals umformen. Sei, der Einfachheit halber, τ eine Stetigkeitsstelle von $f(t)$, dann ist, $\lim_{t=0} f(t) = f(0)$ gesetzt,

$$iyF(iy) = f(\tau)e^{iy\tau} - f(0) - \int_0^\tau e^{iyt}\,df(t) + iy\int_\tau^1 f(t)e^{iyt}\,dt.$$

Daraus folgt weiter

$$|iyF(iy)| \geqq f(\tau) - f(0) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right| - |y|\left|\int_\tau^1 f(t)\,dt\right|,$$

$$|iyF(iy)| + |y|\left|\int_\tau^1 f(t)\,dt\right| \geqq \int_0^\tau df(t) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right|.$$

Der Ausdruck rechts kann offenbar nicht abnehmen, wenn τ zunimmt, und das zweite Glied links hat für $\tau = 1$ den Grenzwert 0. Wir erhalten also:

$$\lim_{\tau=1}\left\{\int_0^\tau df(t) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right|\right\} = \Omega(y) \tag{6}$$

existiert für alle y. Ist $\Omega(y) > 0$, so ist sicher $F(iy) \neq 0$.

Man hat $\Omega(0)=0$, aber offenbar $F(0)>0$. Da $F(iy)$ und $F(-iy)$ konjugiert komplex sind, genügt es überhaupt, nur den Fall $y>0$ zu betrachten.

Man kann noch die linke Seite von (6) etwas anders schreiben. Denn sei φ so bestimmt, daß

$$\int_0^\tau e^{iyt}df(t)=e^{i\varphi}\left|\int_0^\tau e^{iyt}df(t)\right|,$$

dann ist φ, bei festem y, nur eine Funktion von τ, $\varphi=\varphi(\tau)$. Ferner ist

$$(7)\quad \int_0^\tau df(t)-\left|\int_0^\tau e^{iyt}df(t)\right|=\int_0^\tau\big(1-\cos(yt-\varphi)\big)df(t)=2\int_0^\tau \sin^2\frac{yt-\varphi}{2}\,df(t)$$

II. Hat $f(t)$ unendlich viele Sprungstellen, so ist $\Omega(y)>0$ für $y>0$.

In der Tat, seien t' und t'' zwei verschiedene Sprungstellen von $f(t)$, Δ' und Δ'' die dazu gehörigen Sprünge. Wählt man $\tau>t'$, $\tau>t''$, so ergibt sich

$$\Omega(y)\geqq 2\int_0^\tau \sin^2\frac{yt-\varphi}{2}df(t)\geqq 2\Delta'\sin^2\frac{yt'-\varphi}{2}+2\Delta''\sin^2\frac{yt''-\varphi}{2}.$$

Ist $\Omega(y_0)=0$, so gibt es zwei ganze Zahlen m' und m'', so daß

$$y_0t'-\varphi=2\pi m',\quad yt''-\varphi=2\pi m'',$$

und für $y_0>0$ folgt weiter

$$(8)\qquad |t''-t'|=\frac{2\pi}{y_0}|m''-m'|\geqq\frac{2\pi}{y_0}.$$

Gibt es aber unendlich viele Sprungstellen, so gibt es unter ihnen beliebig benachbarte, und die Relation (8) kann nicht für zwei beliebige Sprungstellen t' und t'' richtig sein. Damit ist II. erwiesen.

III. Ist $f(t)$ im Intervalle $a\leqq t\leqq b$ stetig, und ist $f(b)>f(a)$, so ist $\Omega(y)>0$ für $y>0$.

Hält man y fest, und läßt man m alle ganze Zahlen durchlaufen, so fallen in das Intervall $a<t<b$ nur endlich viele Punkte der Form

$$t=\frac{\varphi(b)+2\pi m}{y},$$

etwa $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$. Es sei

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{r-1}<t_r=b.$$

Da nach Voraussetzung

$$f(t_1)-f(t_0)+f(t_2)-f(t_1)+\ldots+f(t_r)-f(t_{r-1})=f(b)-f(a)>0$$

st, gibt es ein Intervall (t_{s-1}, t_s), so daß

$$f(t_s) - f(t_{s-1}) > 0.$$

Und weiter, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$f(t_s - \varepsilon) - f(t_{s-1} + \varepsilon) > 0.$$

Aber im Intervall $t_{s-1} + \varepsilon \leqq t \leqq t_s - \varepsilon$ verschwindet $\sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}$ nicht, hat also daselbst ein bestimmtes positives Minimum, etwa μ. Alles zusammengefaßt, ist

$$\Omega(y) \geqq 2 \int_0^b \sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}\, df(t) \geqq 2 \int_{t_{s-1}+\varepsilon}^{t_s-\varepsilon} \sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}\, df(t)$$

$$\geqq 2\mu(f(t_s - \varepsilon) - f(t_{s-1} + \varepsilon)) > 0,$$

w. z. b. w.

IV. Wenn $F(z)$ auf der imaginären Achse verschwindet, so liegt für $f(t)$ der Ausnahmefall vor.

Verschwindet $F(z)$ auf der imaginären Achse, so darf $f(t)$ nur endlich viele Sprungstellen haben (nach II.) und in den Stetigkeitsintervallen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sprungstellen muß $f(t)$ konstant sein (nach III.). Sind also die Sprungstellen von $f(t)$ die Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1,$$

so ist im Intervall $t_\nu < t < t_{\nu+1}$ die Funktion $f(t)$ konstant, $f(t) = c_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, wobei

$$0 < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n. \tag{9}$$

$F(z)$ muß also die Form haben

$$zF(z) = c_0(e^{zt_1} - 1) + c_1(e^{zt_2} - e^{zt_1}) + \ldots + c_n(e^z - e^{zt_n}) \tag{10}$$

$$= c_n e^z - c_0 - (c_1 - c_0)e^{zt_1} - (c_2 - c_1)e^{zt_2} - \ldots - (c_n - c_{n-1})e^{zt_n}.$$

Daraus folgt

$$|iyF(iy)| \geqq c_n - c_0 - (c_1 - c_0) - (c_2 - c_1) - \ldots - (c_n - c_{n-1}) = 0. \tag{11}$$

In der Ungleichung (11) kann das Gleichheitszeichen dann und nur dann erreicht werden, wenn alle Größen

$$e^{iy},\ e^{iyt_1},\ e^{iyt_2},\ \ldots,\ e^{iyt_n}$$

positiv ausfallen. Darum ist es nötig, daß es ganze Zahlen $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, derart, daß

$$y = 2\pi q,\quad yt_1 = 2\pi p_1,\quad yt_2 = 2\pi p_2,\ \ldots,\ yt_n = 2\pi p_n.$$

Da $y > 0$, und folglich auch $q > 0$ sein muß, wird

$$t_1 = \frac{p_1}{q},\quad t_2 = \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ t_n = \frac{p_n}{q} \tag{12}$$

sein. So ist IV. und damit der wesentlichste Teil des am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satzes erwiesen.

V. In der positiven Halbebene

$$x > 0 \tag{13}$$

kann $F(z)$ nicht verschwinden.

Denn es ist

$$F(x+iy) = \int_0^1 e^{xt} f(t) e^{iyt} dt.$$

Unter der Bedingung (13) ist $e^{xt} f(t)$ zugleich mit $f(t)$ positiv und nicht abnehmend und befindet sich sicher nicht im Ausnahmefall.

Was das Vorhandensein des Ausnahmefalles eigentlich bedeutet, kann durch folgende Bemerkung aufgeklärt werden:

VI. Der Ausnahmefall für $f(t)$ tritt dann und nur dann ein, wenn es eine Konstante q gibt, so beschaffen, daß $F(q \lg u) \lg u$ eine ganze rationale Funktion von u wird.

Soll

$$F(q \lg u) \lg u = P(u) \tag{14}$$

sein, wo $P(u)$ ein Polynom bedeutet, so muß $P(1) = 0$, also

$$P(u) = (u-1) P_1(u) \tag{15}$$

sein, wo $P_1(u)$ wieder ein Polynom ist. Setzt man $q \lg u = z$, so folgt aus (5), (14) und (15):

$$z F(z) = q(e^{\frac{z}{q}} - 1) P_1(e^{\frac{z}{q}}) = z \int_0^1 f(t) e^{zt} dt.$$

Daher muß $F(z)$ für $z = \pm 2q\pi i, \pm 4q\pi i, \ldots$ verschwinden, also $f(t)$ sich (nach IV.) im Ausnahmefall befinden. Dies war zuerst zu zeigen.

Im Ausnahmefall ist nach (10) und (12), $u = e^{\frac{z}{q}}$ gesetzt,

$$\begin{aligned} q \lg u F(q \lg u) &= c_0(u^{p_1} - 1) + c_1(u^{p_2} - u^{p_1}) + \ldots + c_n(u^q - u^{p_n}) \\ &= (u-1)(c_0 + c_0 u + \ldots + c_0 u^{p_1 - 1} + c_1 u^{p_1} + \ldots + c_n u^{q-1}) \end{aligned} \tag{16}$$

Die fragliche Funktion ist also wirklich ein Polynom in u.

Genauer ist auf der rechten Seite von (16) der Faktor von $u -$ ein Polynom mit nicht abnehmenden, positiven Koeffizienten. Da q ein positive ganze Zahl bedeutet, kommt die Ungleichung $\Re(q \lg u) \leqq 0$ au $|u| \leqq 1$ hinaus. So haben wir beiläufig auch den Kakeyaschen Satz be wiesen, allerdings ohne die von Herrn Hurwitz [2]) hinzugefügte Präzisierung

[2]) A. Hurwitz, Über einen Satz des Herrn Kakeya, The Tôhoku Mathematic Journal, Bd. 4, Nr. 3. Vgl. auch Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheori Berlin 1916, S. 20.

§ 2.

Trigonometrische Polynome mit nur reellen Nullstellen.

Ich betrachte das Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \tag{17}$$

von dem ich folgende Voraussetzungen mache:

1. Alle Koeffizienten sind reell, $a_n > 0$.

2. Alle Nullstellen liegen im Innern des Einheitskreises, d. h. im Gebiete $|z| < 1$.

Beide Voraussetzungen sind z. B. dann erfüllt, wenn

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \tag{18}$$

ist, und zwar infolge des Kakeyaschen Satzes.

I. Beide trigonometrischen Polynome:

$$u(z) = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \ldots + a_n \cos nz, \tag{19}$$

$$v(z) = \quad a_1 \sin z + a_2 \sin 2z + \ldots + a_n \sin nz \tag{20}$$

haben im Intervalle $0 \leqq z < 2\pi$ genau $2n$ einfache Nullstellen.

In der Tat, bezeichnen wir mit $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Nullstellen des Polynoms (17), mehrfache mit ihrer Vielfachheit geschrieben. Setzt man, bei reellem x,

$$e^{ix} - w_\nu = \varrho_\nu e^{i\psi_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

so wird der Winkel ψ_ν sich stetig mit x vergrößern und um 2π zunehmen, wenn x um 2π zunimmt. Daher nimmt auch der Winkel

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n$$

ständig zu mit zunehmendem x und vergrößert sich um $2n\pi$, wenn sich x um 2π vergrößert. Setzt man

$$\begin{aligned} P(e^{ix}) &= a_n (e^{ix} - w_1)(e^{ix} - w_2) \ \ldots \ (e^{ix} - w_n) \\ &= a_n \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n e^{i(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n)} \\ &= R e^{i\Psi}, \end{aligned}$$

so ist (x noch immer reell angenommen)

$$u(x) = R \cos \Psi, \quad v(x) = R \sin \Psi. \tag{21}$$

Aus diesen Formeln (21) ist die Behauptung I ohne weiteres ersichtlich, und noch manche andere, z. B. folgende Tatsachen: Läßt man x alle reellen Werte durchlaufen, so liegt zwischen je zwei Nullstellen von $u(x)$ genau eine von $v(x)$ und zwischen je zwei Nullstellen von $v(x)$ genau eine von $u(x)$. Es ist

$$(22) \qquad u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u^2(x)\frac{d\,\mathrm{tg}\,\Psi}{dx} = R^2\frac{d\Psi}{dx} > 0$$

usw.

II. Die trigonometrischen Polynome (19) und (20) haben nur reelle Nullstellen.

Setzt man

$$e^{iz} = \zeta,$$

so ist

$$u(z) = a_0 + a_1\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2} + a_2\frac{\zeta^2+\zeta^{-2}}{2} + \ldots + a_n\frac{\zeta^n+\zeta^{-n}}{2},$$

$$v(z) = \quad a_1\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i} + a_2\frac{\zeta^2-\zeta^{-2}}{2i} + \ldots + a_n\frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{2i}.$$

und beide Gleichungen

$$u(z) = 0, \qquad v(z) = 0$$

ergeben je eine Gleichung $2n$-ten Grades für ζ. Von diesen letzteren haben wir schon $2n$ verschiedene Wurzeln unter I. gefunden. Diese müssen also alle Wurzeln sein, und folglich entsprechen alle Wurzeln reellen Werten von z, w. z. b. w.

III. Seien λ und μ reell, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Dann haben die beiden trigonometrischen Polynome

$$(23) \qquad \lambda u(z) - \mu v(z),$$

$$(24) \qquad \mu u(z) + \lambda v(z)$$

nur reelle einfache Nullstellen, die sich gegenseitig trennen.

Setzt man

$$\lambda + i\mu = \varrho e^{i\alpha},$$

so ist für reelles x, die vorangehenden Bezeichnungen beibehalten,

$$\lambda u(x) - \mu v(x) = R\varrho\cos(\Psi+\alpha), \qquad \mu u(x) + \lambda v(x) = R\varrho\sin(\Psi+\alpha)$$

und der Beweis geht so weiter wie unter I. und II.

Man kann von diesen Sätzen durch Grenzübergang noch manche andere ableiten, z. B. den folgenden Satz:

IV. Ist α reell und bestehen die Ungleichungen

$$a > 0, \qquad d > 0,$$

$$(25) \qquad 0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n,$$

so hat die Funktion

$$a_0\cos(ax+\alpha) + a_1\cos((a+d)x+\alpha) + a_2\cos((a+2d)x+\alpha) + \ldots + a_n\cos((a+nd)x+\alpha)$$

nur reelle Nullstellen.

Ist das Verhältnis $\frac{a}{d}$ rational, $\frac{a}{d} = \frac{p}{r}$, wo p und r ganze Zahlen sind, und ist nicht nur (25), sondern auch (18) erfüllt, so folgt IV. ohne weiteres aus dem Vorangehenden durch die Betrachtung des Polynoms

$$a_0 x^p + a_1 x^{p+r} + a_2 x^{p+2r} + \ldots + a_n x^{p+nr},$$

das alle seine Nullstellen im Innern des Einheitskreises hat. Sonst kann man IV. durch Grenzübergang ableiten, auf Grund eines heute geläufigen, zuerst von Herrn Hurwitz[3]) hervorgehobenen und bewiesenen Satzes über Folgen analytischer Funktionen.

Im nächsten Paragraphen will ich auf andere Grenzfälle eingehen.

§ 3.

Trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen.

Ich will jetzt zu meinem eigentlichen Gegenstand, zur Untersuchung der Funktionen

$$U(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt \, dt, \tag{1}$$

$$V(z) = \int_0^1 f(t) \sin zt \, dt, \tag{2}$$

übergehen.

Die Funktion $f(t)$ soll den in § 1 aufgezählten Bedingungen genügen, d. h. sie sei positiv, nicht abnehmend und im Intervall (0, 1) (eventuell uneigentlich) integrabel. Es besteht folgender Satz:

Die Funktionen $U(z)$ und $V(z)$, oder allgemeiner, die Funktion $\lambda U(z) - \mu V(z)$, wobei λ und μ beliebige reelle Konstanten sind, haben nur reelle Nullstellen, und zwar sind alle ihre Nullstellen einfach, wenn in bezug auf $f(t)$ der (im § 1 definierte) allgemeine Fall vorliegt.

Ich setze

$$U_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{\frac{\nu}{n^2}} \cos \frac{\nu z}{n}, \qquad V_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{\frac{\nu}{n^2}} \sin \frac{\nu z}{n}.$$

Die Funktionen $U_n(z)$ und $V_n(z)$ haben nur reelle Nullstellen, die übrigens einfach sind und sich gegenseitig trennen, wegen der hinzugefügten Faktoren $e^{\frac{\nu}{n^2}}$ (vgl. § 2). Wie ich wohl hier nicht näher auszuführen brauche[4]),

[3]) A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion, Math. Annalen, Bd. 33 (1889), S. 246—266. Vgl. S. 249.

[4]) Man kann sich auch zuerst auf den Fall beschränken, wo $\lim_{t=1} f(t)$ endlich ist, und dann nochmaligen Grenzübergang vornehmen.

ist in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} U_n(z) = U(z), \qquad \lim_{n=\infty} V_n(z) = V(z).$$

Daher haben die Funktionen $U(z)$, $V(z)$, $\lambda U(z) - \mu V(z)$ sicherlich nur reelle Nullstellen.

Daß die Nullstellen im allgemeinen Falle tatsächlich einfach sind, genügt es bloß für die Funktion $V(z)$ zu zeigen.

I. Eine m-fache Nullstelle von $V(z)$ ist eine mindestens $m-1$-fache Nullstelle von $U(z)$.

Man bezeichne mit z_0 die fragliche m-fache Nullstelle von $V(z)$. In einen beliebigen Kreis, der z_0 zum Mittelpunkte hat, fallen nach dem oben zitierten Satze von Herrn Hurwitz genau m Nullstellen von $V_n(z)$, sobald nur n eine gewisse Grenze übersteigt. Die Nullstellen von $V_n(z)$ werden durch die von $U_n(z)$ getrennt. Folglich liegen in dem fraglichen Kreis mindestens $m-1$ Nullstellen von $U_n(z)$ für genügend großes n. Daher ist I. richtig.

Ich brauche nur noch folgendes zu zeigen:

II. Befindet sich $f(t)$ im allgemeinen Fall, so haben $U(z)$ und $V(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen.

Dies ist aber in der Tat richtig. Denn eine gemeinsame, notwendigerweise reelle Nullstelle von $U(z)$ und $V(z)$ würde eine rein imaginäre Nullstelle des Integrals

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt} dt \tag{5}$$

liefern. Solche gibt es aber nach § 1 nicht, wenn $f(t)$ sich im allgemeinen Falle befindet.

Man beachte, daß, wenn $f(t)$ sich im Ausnahmefalle befindet, $U(z)$ und $V(z)$ unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben, und zwar immer auch solche, die für $V(z)$ doppelte Nullstellen sind. Dies geht aus der Formel (16) von § 1 leicht hervor. $U(z)$ hat auch im Ausnahmefalle keine mehrfachen Nullstellen. Vgl. weiter unten § 6, I.

Den eben bewiesenen Sätzen lassen sich noch manche andere hinzufügen, z. B. der folgende Satz:

III. Liegt für $f(t)$ der allgemeine Fall vor, so ist für alle reellen Werte x

$$U(x)V'(x) - U'(x)V(x) > 0.$$

Durch Grenzübergang aus der für trigonometrische Polynome gültigen Formel (22) kann nur $\geqq$ an Stelle von $>$ gefolgert werden. Würde aber ein Wert x_0 existieren, so beschaffen, daß

$$U(x_0)V'(x_0) - U'(x_0)V(x_0) = 0$$

wäre, so könnte man zwei reelle Zahlen λ, μ bestimmen, so daß $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ und

$$\lambda U(x_0) - \mu V(x_0) = 0,$$
$$\lambda U'(x_0) - \mu V'(x_0) = 0$$

wäre. Dann hätte die Funktion $\lambda U(x) - \mu V(x)$ für $x = x_0$ eine mehrfache Nullstelle. Dies ist bei allgemeinem $f(t)$ ausgeschlossen, und damit der Satz III bewiesen.

IV. Hat $f_1(t)$ die von $f(t)$ vorausgesetzten Eigenschaften, und wird

$$U_1(z) = \int_0^1 f_1(t)\cos zt\,dt, \quad V_1(z) = \int_0^1 f_1(t)\sin zt\,dt$$

gesetzt, so haben die Funktionen

$$U(z)U_1(z) - V(z)V_1(z), \quad U(z)V_1(z) + V(z)U_1(z)$$

nur reelle Nullstellen.

Man beweist IV durch Betrachtung des Polynoms

$$\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right)z + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}\right)\left(f_1(0) + f_1\left(\frac{1}{n}\right)z + \ldots + f_1\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}\right)$$

und anschließenden Grenzübergang.

Man sieht, wie man dieselben Überlegungen noch auf mannigfache Weisen kombinieren kann[5]). — Um die Resultate zu erläutern, kann man zu der Funktion von Typus $U(z)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^2},$$

d. h. zu der 0-ten Besselschen Funktion, die Funktion

$$\int_0^1 \frac{\sin zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(3\cdot 5\cdot 7\ldots 2n+1)^2}$$

vom Typus $V(z)$ als „Gefährten" zuordnen. Diese Funktionen haben nur reelle Nullstellen, die einfach sind und sich gegenseitig trennen usw.

---

[5]) Die Sätze III und IV sind im folgenden Satz enthalten, dessen Beweis uns jetzt zu weit vom Wege ablenken würde: Die positiven Nullstellen von $U(z)$ seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, die von $V(z)$ etwa $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ Dann sind die Partialbruchentwicklungen

$$-\frac{V(z)}{U(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{-2V(\alpha_n)z}{U'(\alpha_n)(z^2-\alpha_n^2)}, \quad \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{U(0)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2U(\beta_n)z}{V'(\beta_n)(z^2-\beta_n^2)}$$

durchgehends gültig und haben nur positive Residuen. Dabei ist, der Einfachheit halber, vorausgesetzt, daß $f(t)$ sich im allgemeinen Falle befindet.

§ 4.

Nachträge und Beispiele zu § 1.

Es ist häufig bequem, einen Teil der Ergebnisse des § 1 so zu formulieren:

I. *Die Funktion $f(t)$ sei für $a < t < b$ stetig, positiv (d. h. > 0) und, abgesehen ev. von endlich vielen Punkten, differenzierbar. Ist für $a < t < b$*

$$\alpha \leqq -\frac{f'(t)}{f(t)} \leqq \beta, \tag{26}$$

so kann das Integral

$$\int_a^b f(t)e^{zt}\,dt \tag{27}$$

nur für solche Werte z verschwinden, die im offenen Streifen

$$\alpha < x < \beta \tag{28}$$

liegen ($z = x + iy$), abgesehen von dem einzigen Ausnahmefall

$$f(t) = e^{ct+d}. \tag{29}$$

(c und d konstant

D. h. der einzige Ausnahmefall stellt sich dann ein, wenn der Streifen (28) sich auf eine vertikale Gerade reduziert. Wie man leicht nachrechnet, liegen in diesem Ausnahmefall alle Nullstellen auf der betreffenden Geraden, oder diese Gerade ist die Konvergenzgrenze für das Integral (27).

Sind a und b beide endlich, so kann man sich auf die Betrachtung von $a = 0$, $b = 1$ beschränken, wie die Formel

$$\int_a^b f(t)e^{zt}\,dt = (b-a)\,e^{az}\int_0^1 f(a+(b-a)t)e^{(b-a)zt}\,dt$$

zeigt. Lineare ganze reelle Transformationen von z und t fügen nicht Neues dem ausgesprochenen Satze hinzu.

Nun ist,

$$F(z) = \int_0^1 f(t)e^{zt}\,dt$$

gesetzt,

$$F(\beta + z) = \int_0^1 f(t)e^{\beta t}e^{zt}\,dt,$$

$$F(\alpha - z) = \int_0^1 f(t)e^{\alpha t}e^{-zt}\,dt = e^{\alpha - z}\int_0^1 f(1-t)e^{-\alpha t}e^{zt}\,dt.$$

Die eine oder die andere dieser Formeln kann versagen, wenn α oder β unendlich ist. Dann ist aber auch der betreffende Teil des Satzes nichtssagend. Nach Voraussetzung (26) ist

$$\frac{d}{dt} f(t) e^{\beta t} = f(t) e^{\beta t} \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + \beta \right) \geqq 0,$$

$$\frac{d}{dt} f(1-t) e^{-\alpha t} = -f(1-t) e^{-\alpha t} \left(\frac{f'(1-t)}{f(1-t)} + \alpha \right) \geqq 0,$$

und zwar nicht identisch gleich 0, wenn der Fall (29) ausgeschlossen ist. Dies vorausgesetzt, sind also beide positive Funktionen

$$f(t) e^{\beta t}, \qquad f(1-t) e^{-\alpha t}$$

nicht abnehmend und nicht konstant. Damit ist aber auch die einzig mögliche Art ausgeschlossen, auf die sich der anfangs definierte Ausnahmefall für stetige Funktionen einstellen kann. Die Nullstellen von $F(\beta + z)$ und $F(\alpha - z)$ haben also negativen reellen Teil, w. z. b. w.

Ist a oder b unendlich, so ergibt sich der Satz durch die Überlegungen in § 1, I und § 1, III, wie ich das hier nicht ins einzelne ausführen will. Wenn man sich mit $\leqq$ an Stelle von $<$ zufrieden gibt, folgt er auch durch Grenzübergang aus dem schon bewiesenen Teil. Anwendbar ist er selbstverständlich nur im Innern des Konvergenzgebietes des Integrals (27).

Als Beispiel diene die ganze Funktion

$$\int_1^\infty u^{z-1} e^{-u} du = \int_0^\infty e^{zt - e^t} dt,$$

die man hie und da in Zusammenhang mit der Γ-Funktion zu betrachten pflegt. Man hat in diesem Falle

$$\frac{d}{dt}(-\lg f(t)) = e^t,$$

also ist $\alpha = 1$ und $\beta = \infty$. Daher liegen alle Nullstellen in der Halbebene $x > 1$.

Man kann zeigen, daß die obere Grenze der Realteile der Nullstellen wirklich $+\infty$ ist. Der Maximalbetrag der Funktion auf dem Kreise $|z| = r$ ist nach der Stirlingschen Formel $\sim \sqrt{2\pi}\, e^{(r-\frac{1}{2})\lg r - r}$. Daraus schließt man nach den Elementen der Hadamardschen Theorie, daß es unendlich viele Nullstellen gibt (oder genauer, daß der Konvergenzexponent der Nullstellen gleich 1 ist und daß die Summe der reziproken Nullstellen absolut divergiert). Man hat

$$\int_1^\infty u^{z-1} e^{-u} du = -\frac{1}{ez} - \frac{1}{ez(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \int_1^\infty u^{z+1} e^{-u} du,$$

und daher ist in jedem vertikalen Streifen $1 \leqq x \leqq a$, gleichmäßig in x,

$$\lim_{y=\infty} (x + iy) \int_1^\infty u^{(x+iy)-1} e^{-u} du = -\frac{1}{e}.$$

Folglich gibt es in einem solchen Streifen von endlicher Dicke $a-1$ nur endlich viele Nullstellen. So gibt es beliebig weit nach rechts gelegene Nullstellen, w. z. b. w.

II. Man bezeichne mit γ die obere Grenze von $\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|$. Dann liegen die Nullstellen des Integrals

$$U(z)=\int_0^a f(t)\cos zt\,dt,$$

$z=x+iy$ gesetzt, im offenen Streifen $-\gamma<y<+\gamma$.

Ein Ausnahmefall stellt sich ein für

$$\int_0^a c\cos zt\,dt=c\frac{\sin az}{z},$$

wo $\gamma=0$ und kein offener Streifen vorhanden ist.

Wird $f(t)$ als eine gerade Funktion aufgefaßt, $f(-t)=f(t)$, so ist

$$U(iz)=\tfrac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(t)e^{zt}\,dt,$$

und II kommt auf I zurück.

Z. B. liegen alle Nullstellen der Funktion

$$(30)\qquad \int_0^{\infty} e^{-t}\cos zt\,dt=\frac{e^{-a}(z\sin az-\cos az)+1}{z^2+1}$$
$$=\frac{i}{2}\left\{\frac{e^{a(-1-iz)}-1}{z-i}-\frac{e^{a(-1+iz)}-1}{z+i}\right\}$$

im horizontalen Streifen

$$(31)\qquad -1<y<+1.$$

Ich will zeigen, daß die Ungleichung (31) nicht verbessert werden kann, wenn man a frei variieren läßt.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, daß die Funktion (30) nur endlich viele imaginäre Nullstellen hat. Sie ist für großes z (a wird fest gedacht) $\sim\frac{e^{-a}\sin az}{z}$, also stimmen ihre Nullstellen asymptotisch mit denjenigen von $\sin az$ überein; sie sind, abgesehen von endlich vielen, einfach und reell, letzteres aus Symmetriegründen[6]). Die Anzahl der imaginären Nullstellen wächst aber mit a ins Unendliche. Man betrachte

[6]) Die durch (1) gegebene Funktion $U(z)$ hat nur endlich viele imaginäre Nullstellen, wenn $f(t)$ reell, $f(1)\gtrless 0$, $f'(t)$ existiert und gewisse einfache Regularitätsbedingungen erfüllt. Auf die rechte Seite von (30) ist auch die bei Hurwitz, Über die Wurzeln einiger transzendenter Gleichungen, Mitteilungen d. Mathem. Gesellschaft in Hamburg, II (1890), S. 25—31, dargelegte Methode anwendbar.

nämlich die Punkte $z = i + \frac{2n\pi}{a}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ und man schlage um jeden einen Kreis vom Radius $\frac{1}{a}$. Auf der Peripherie dieser Kreise ist

32) $$z = i + \frac{2n\pi}{a} - \frac{i\zeta}{a}$$

$$\zeta = e^{i\varphi} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Auf den Kreislinien (32) wird die Funktion (30) gleich

$$\frac{ia}{2}\left\{\frac{e^{-\zeta}-1}{2n\pi - i\zeta} - \frac{e^{\zeta-2a}-1}{2n\pi - i\zeta + 2ai}\right\} = \frac{ia}{2}\{\Phi(\zeta) - \varphi(\zeta)\}.$$

Die Funktion $\Phi(\zeta)$ verschwindet für $\zeta = 0$, also als Funktion von z im Mittelpunkte des Kreises (32). Auf der Peripherie ist aber

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = \frac{2n\pi - i\zeta}{2n\pi + 2ai - i\zeta}\,\frac{e^{\zeta-2a}-1}{e^{-\zeta}-1}.$$

Bezeichnet man mit M das Maximum von $\frac{1}{|e^{-\zeta}-1|}$ auf dem Kreisrand (32), so ist von einem gewissen a an sicher

33) $$\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\right| < \frac{2n\pi + 1}{\sqrt{4n^2\pi^2 + 4a^2 - 1}}(M + 1).$$

Es gibt mit wachsendem a immer mehr ganze Zahlen n, für welche die rechte Seite der Ungleichung (33), und folglich auch die linke < 1 wird. Also gibt es, wenn a wächst, immer mehr Kreise (32), in deren Innern die Funktion (30) sicher verschwindet. Die Anzahl der imaginären Nullstellen der Funktion (30) wächst also mit a über alle Grenzen und gewisse dieser Nullstellen schmiegen sich immer enger den beiden Geraden $y = \pm 1$ an.

Übrigens kann die Funktion (30) in irgendeinem festen, endlichen, abgeschlossenen Bereiche, das ganz im Streifen (31) liegt, keine Nullstellen haben, wenn a genügend groß ist. Man hat nämlich in diesem Streifen

$$\lim_{a=\infty} \int_0^\infty e^{-t}\cos zt\,dt = \frac{1}{z^2+1},$$

und die Grenzfunktion hat überhaupt keine Nullstellen. Dies Zusammendrängen der Nullstellen an der Konvergenzgrenze steht im Einklang mit gewissen neueren Untersuchungen über Folgen analytischer Funktionen [7]).

[7]) Vgl. E. Lindwart und G. Pólya, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo, Bd. 37 (1914), S. 297–304; R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, Acta Mathematica, Bd. 41, S. 219–251.

§ 5.

Über einen Satz von Hurwitz.

Herr Hurwitz machte mich, als ich ihm meine bisher dargelegten Untersuchungen mitteilte, auf einen verwandten Satz aufmerksam, den er vor Jahren fand und der so lautet:

Die im Intervalle $-1 < t < +1$ *definierte Funktion* $f(t)$ *sei gerade,* $f(-t) = f(t)$. *Ihre Fourier-Koeffizienten seien alternierend, d. h.*

$$(34) \qquad f(t) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \pi t + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 3\pi t + \dots$$

gesetzt, sei

$$(35) \qquad a_0 > 0, \quad a_1 < 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0, \quad \dots$$

Dann hat die ganze Funktion $U(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt\, dt$ *nur reelle einfache Nullstellen, die so verteilt sind, daß jedes der Intervalle*

$$(36) \qquad \dots (-2\pi, -\pi), \quad (-\pi, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 2\pi), \quad \dots$$

genau eine Nullstelle enthält, und zwar im Innern.

Dieser Satz scheint auf den ersten Blick in einer andern Richtung zu liegen als die bisher behandelten Fragen. Sein Beweis eröffnet aber, wie wir bald sehen werden, einen neuen Weg, auf dem die Ergebnisse von § 3 teilweise neu bewiesen und sehr verfeinert werden können. Diesen Beweis will ich im vorliegenden Paragraphen darlegen mit einigen leichten aber für den vorliegenden Zweck nicht belanglosen Erweiterungen.

Nur eine Bemerkung sei vorausgeschickt. Daß die Funktion $U(z)$ unendlich viele reelle Nullstellen hat, ist in der Voraussetzung des Satzes sozusagen unmittelbar enthalten, denn die „Äquivalenz" (34) bedeutet nur das Bestehen der Gleichungen

$$a_n = \int_{-1}^{+1} f(t) \cos n\pi t\, dt = 2U(n\pi) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Die Voraussetzung (35) besagt also eigentlich, daß

$$(37) \qquad U(0) > 0, \quad U(\pi) < 0, \quad U(2\pi) > 0, \quad U(3\pi) < 0, \quad \dots$$

Daher ist evident, daß sich in jedem der Intervalle (36) mindestens eine Nullstelle von $U(z)$ befindet. Der springende Punkt ist zu zeigen, daß die so erhaltenen Nullstellen überhaupt alle Nullstellen von $U(z)$ ausmachen.

Der Beweis von Herrn Hurwitz stützt sich auf die Partialbruchentwicklung

$$(38) \qquad \frac{U(z)}{\sin z} = \frac{U(0)}{z} - U(\pi)\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + U(2\pi)\left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \dots$$

Ich will diese Entwicklung unter der Voraussetzung beweisen, daß die (Riemannschen, eventuell uneigentlichen) Integrale

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \qquad \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

existieren.

I. Zu gegebenem $\eta > 0$ kann man eine Konstante $M = M(\eta)$ finden, derart, daß für solche z, die allen Ungleichungen

(39) $$|z - n\pi| \geqq \eta \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

genügen,

(40) $$\left|\frac{U(z)}{\sin z}\right| \leqq M.$$

Mit anderen Worten: Schneidet man aus der komplexen Ebene unendlich viele Kreise aus, die alle mit demselben Radius η um die Nullstellen von $\sin z$ herum beschrieben sind, so ist in der übrigbleibenden durchlöcherten Ebene die Funktion $\frac{U(z)}{\sin z}$ beschränkt.

In der Halbebene $y \geqq 1$ ist

$$|\sin(x+iy)| = \left|\frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}\right| \geqq \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}),$$

$$|U(x+iy)| = \left|\tfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,(e^{(ix-y)t} + e^{(-ix+y)t})\,dt\right| < e^y \int_0^1 |f(t)|\,dt,$$

$$\left|\frac{U(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right| \leqq \frac{2\int_0^1 |f(t)|\,dt}{1-e^{-2y}} \leqq \frac{2\int_0^1 |f(t)|\,dt}{1-e^{-2}},$$

also beschränkt. Ähnlich in der Halbebene $y \leqq -1$.

In dem übrigbleibenden durchlöcherten Streifen ist $\frac{1}{\sin z}$ regulär und periodisch, also sicher beschränkt. Und sogar im vollen Streifen $-1 \leqq y \leqq +1$ ist

$$|U(x+iy)| \leqq e\int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Damit ist der Beweis von I. erbracht.

II. Die Reihe

$$\frac{U(0)}{z} - U(\pi)\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + U(2\pi)\left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \cdots$$

konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen abgeschlossenen Bereich, der die Punkte $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ nicht enthält.

Die Folge $U(0), U(\pi), U(2\pi), \ldots$ ist beschränkt, nach einer Bemerkung am Ende von I. So kommt man auf die Reihe

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2},$$

deren absolute und gleichmäßige Konvergenz genügend bekannt ist.

III. Die in der ganzen Ebene analytische Funktion

$$\varphi(z)=\frac{U(z)}{\sin z}-\left\{\frac{U(0)}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu 2\,U(\nu\pi)\,z}{z^2-\nu^2\pi^2}\right\}$$

ist eine Konstante.

Man bezeichne mit C_n die Kreislinie $|z|=(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Wenn z innerhalb C_n liegt, was von einem gewissen n an sicher der Fall ist, so besteht

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{U(w)}{\sin w}\,\frac{dw}{w-z}=\frac{U(z)}{\sin z}+\sum_{\nu=-n}^{+n}\frac{U(\nu\pi)}{\cos\nu\pi\,(\nu\pi-z)},$$

das Integral in positivem Umlaufssinn erstreckt. Anders ausgedrückt, ist

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{U(w)}{\sin w}\,\frac{dw}{w-z}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu 2\,U(\nu\pi)\,z}{z^2-\nu^2\pi^2}. \tag{41}$$

Auf sämtlichen Kreisen C_n besteht nach I. eine Ungleichung (40). Daher ist

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{U(w)}{\sin w}\,\frac{dw}{w-z}\right|\leqq\frac{1}{2\pi}M\,\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})\pi}{(n+\frac{1}{2})\pi-|z|},$$

woraus man auf Grund von II. leicht schließt, daß in der ganzen Ebene

$$|\varphi(z)|\leqq M.$$

Die Funktion $\varphi(z)$ ist also eine Konstante, und zwar die Null, da sie ungerade ist, $\varphi(-z)=-\varphi(z)$. Damit ist die Partialbruchentwicklung (38) bewiesen.

Das eben Bewiesene kann auch durch die Formel

$$\frac{U(z)}{\sin z}=\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{+n}\frac{(-1)^\nu U(\nu\pi)}{z-\nu\pi} \tag{42}$$

ausgedrückt werden. Die rationale Funktion, die unter dem Limes-Zeichen an der rechten Seite von (42) steht, kann für höchstens $2n$ verschiedene Werte von z verschwinden und variiert von $+\infty$ bis $-\infty$, wenn z die reelle Achse entlang von $\nu\pi$ bis $(\nu+1)\pi$ wandert, $\nu=-n, \ldots -2, -1, 0, 1, \ldots n-1$. Daher liegt je eine ihrer Nullstellen in diesen Intervallen $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$, und sie hat außer diesen $2n$ einfachen Nullstellen keine anderen. Überträgt man diese Verhältnisse durch Grenzübergang auf die Funktion $\frac{U(z)}{\sin z}$, so erhält man den vorausgeschickten Satz von Her-

Hurwitz. Daß sich die Nullstellen während des Grenzübergangs auf die Endpunkte eines Intervalls $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$ heranschieben, ist durch die Voraussetzung (37) a priori ausgeschlossen.

Verschiedene Erweiterungen des eben dargelegten Hurwitzschen Gedankenganges liegen auf der Hand. Der Partialbruchentwicklung (38) lassen sich mehrere ähnliche zur Seite stellen, z. B. die folgenden (man beachte, daß $U(z)$ gerade und $V(z)$ ungerade ist):

$$(43)\quad \frac{U(z)}{z\cos z} = \frac{U(0)}{z} - \frac{U\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{U\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{z+\frac{3\pi}{2}}\right) - \dots,$$

$$(44)\quad \frac{V(z)}{z\sin z} = \frac{V'(0)}{z} - \frac{V(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + \frac{V(2\pi)}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \dots,$$

die sich besonders nützlich erweisen werden und ebenso oder noch etwas kürzer bewiesen werden können als (38). Man kann ferner mit denselben Hilfsmitteln, d. h. durch Beachtung der Vorzeichenänderungen der Funktion zwischen zwei konsekutiven Polen und durch Abzählung der Nullstellen noch manche andere Sätze über die Nullstellen rationaler Funktionen aufstellen, die geeignet sind, auf gewisse meromorphe Funktionen durch Grenzübergang übertragen zu werden. Ich will hier einen einfachen Fall durchdiskutieren, der uns später nützlich sein wird.

IV. Es sei

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n,$$

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \dots, A_n > 0$$

und B reell. Die rationale Funktion

$$(45)\quad \frac{A_n}{z+a_n} + \dots + \frac{A_2}{z+a_2} + \frac{A_1}{z+a_1} + \frac{B}{z} + \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \dots + \frac{A_n}{z-a_n}$$

hat eine und nur eine Nullstelle in jedem der Intervalle

$$(-a_n, -a_{n-1}), \dots, (-a_3, -a_2), (-a_2, -a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n),$$

wie auch B beschaffen sein mag. Außer diesen $2n-2$ kann es noch zwei Nullstellen geben, die entgegengesetzt gleich sind und sich folgendermaßen nach B richten:

1. $$B > 0.$$

Beide Nullstellen sind reell, die positive liegt im Intervalle $(0, a_1)$.

2. $$-2(A_1 + A_2 + \dots + A_n) < B < 0.$$

Beide Nullstellen sind rein imaginär.

3. $$B < -2(A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

Beide Nullstellen reell, die positive liegt im Intervalle $(a_n, +\infty)$.

Zum Beweise ist es am einfachsten, (45) mit z zu multiplizieren und dann als Funktion von z^2 zu betrachten. Man erhält IV., indem man die Vorzeichenänderungen beim Einsetzen von $z^2 = -\infty$, 0, $a_1^2 - 0$, $a_1^2 + 0$, $a_2^2 - 0$, $a_2^2 + 0$, ..., $a_n^2 - 0$, $a_n^2 + 0$, $+\infty$ beachtet. Der Fall 1) ist uns kürzlich auf der rechten Seite von (42) begegnet.

Die Entscheidung darüber, ob der Fall 2) oder ob der Fall 3) vorliegt, wird in einigen nachfolgenden Anwendungen nicht eben bequem sein. Achten wir aber nur auf die Nullstellen der Grenzfunktion, so kann uns folgende einfache Bemerkung aus der Verlegenheit helfen:

V. Die Funktion $U(z)$ hat keine rein imaginäre Nullstelle, wenn alle Glieder der Folge

$$\int_0^1 f(t)dt, \quad \int_0^1 f(t)t^2dt, \quad \int_0^1 f(t)t^4dt, \ldots \tag{46}$$

gleiches Vorzeichen haben, und sie hat genau zwei rein imaginäre Nullstellen, wenn die Folge (46) einen Vorzeichenwechsel aufweist.

Die erste Behauptung leuchtet aus der Formel

$$U(iy) = \int_0^1 f(t)\cos iyt\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n!} \int_0^1 f(t)t^{2n}dt \tag{47}$$

ohne weiteres ein. Hat aber die Folge (46) einen Zeichenwechsel, so lehrt dieselbe Formel (47), daß $U(0)$ und $U(i\infty)$ entgegengesetztes Zeichen haben und es mindestens zwei rein imaginäre Nullstellen gibt. Daß es nicht mehr gibt, ist eine Folge der von Laguerre[8]) verallgemeinerten Descartesschen Zeichenregel. (Dieser letzte Teil ist für unsern Zweck nicht so wesentlich.) Man kann in bezug auf $V(z)$ analoge Betrachtungen anstellen. Insbesondere gilt: ist $f(t)$ positiv, so hat keine der beiden Funktionen $U(z)$ und $V(z)$ rein imaginäre Nullstellen.

§ 6.

Die Trennung der Nullstellen.

Ich werde in diesem Paragraphen die Nullstellen der Funktionen

$$U(z) = \int_0^1 f(t)\cos zt\,dt, \tag{1}$$

$$V(z) = \int_0^1 f(t)\sin zt\,dt \tag{2}$$

separieren, d. h. ich werde Intervalle angeben, in denen eine und nur eine Nullstelle liegt. Da $U(z)$ gerade und $V(z)$ ungerade ist, genügt es in

[8]) Laguerre, Œuvres, Bd. I, S. 3–5.

beiden Fällen, nur die Lage der positiven Nullstellen festzustellen. Über die Funktion $f(t)$ werde ich verschiedene Voraussetzungen machen, aber bis zur Erwähnung des Gegenteils sollen die folgenden festgehalten werden:

$f(t)$ ist für $0 < t < 1$ definiert und das Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert.

I. Es sei $f(t) > 0$ und nicht abnehmend. Dann hat $U(z)$ nur reelle einfache Nullstellen. Das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ enthält keine Nullstelle und jedes der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

genau eine, und zwar im Innern.

Man hat

$$U(0) = \int_0^1 f(t)\,dt > 0.$$

Ferner ist für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^1 f(t)\cos(4n+1)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt = \int_0^{\frac{1}{4n+1}} f(t)\cos(4n+1)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\frac{4\nu-3}{4n+1}}^{\frac{4\nu+1}{4n+1}} f(t)\cos(4n+1)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt \geqq \int_0^{\frac{1}{4n+1}} f(t)\cos(4n+1)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt > 0,$$

$$\int_0^1 f(t)\cos(4n+3)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt = \left(\int_0^{\frac{2}{4n+3}} + \int_{\frac{2}{4n+3}}^{\frac{3}{4n+3}} + \sum_{\nu=1}^{n}\int_{\frac{4\nu-1}{4n+3}}^{\frac{4\nu+3}{4n+3}}\right) f(t)\cos(4n+3)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt$$

$$\leqq \int_{\frac{2}{4n+3}}^{\frac{3}{4n+3}} f(t)\cos(4n+3)\tfrac{\pi}{2}t\cdot dt < 0.$$

D. h. es ist

(48) $U(0) > 0, \; U\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \; U\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \; U\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0, \; U\left(\frac{7\pi}{2}\right) < 0, \ldots$

In der Partialbruchentwicklung

(43) $$\frac{U(z)}{z\cos z} = \frac{U(0)}{z} - \frac{U\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{U\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{z+\frac{3\pi}{2}}\right) - \ldots$$

ist also das Residuum im Pole $z = 0$ positiv, in allen übrigen Polen negativ. Die bei einem beliebigen n abgebrochene Partialbruchentwicklung ist also, abgesehen von einem unwesentlichen Faktor -1, vom Typus (45), und der Satz § 5, IV. wird anwendbar, wobei es nur unentschieden bleibt, ob

wir uns im Falle 2) oder 3) befinden. Die reellen Nullstellen von $U(z)$ sind also auf alle Fälle so verteilt, wie angegeben wurde; es bleibt (vom Standpunkte des § 5) vorderhand nur noch unentschieden, ob $U(z)$ noch ein paar rein imaginäre Nullstellen hat oder nicht. Der Satz § 5, V. entscheidet aber dafür, daß $U(z)$ nur reelle Nullstellen hat [9]).

II. Es sei $f(t) > 0$ und nicht abnehmend. Wenn $f(t)$ nicht dem Ausnahmefall (im Sinne von § 1) angehört, so hat $V(z)$ nur reelle einfache Nullstellen. Das Intervall $(0, \pi)$ enthält nur die Nullstelle $z = 0$, und jedes der Intervalle

$$(\pi, 2\pi), \quad (2\pi, 3\pi), \quad (3\pi, 4\pi), \ldots$$

enthält genau eine Nullstelle, und zwar im Innern.

Es ist zuerst

$$V(\pi) = \int_0^1 f(t) \sin \pi t \cdot dt > 0,$$

ersichtlicherweise. Ferner ist

$$V(2\pi) = \int_0^1 f(t) \sin 2\pi t \cdot dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi t \, (f(t) - f(1-t)) \, dt.$$

Die Funktion $-f(t) + f(1-t)$ ist definiert und nicht zunehmend für $0 < t \leqq \frac{1}{2}$ und verschwindet für $t = \frac{1}{2}$. Da $f(t)$ keine Konstante ist, so muß

$$\lim_{t=0} (f(t) - f(1-t)) < 0$$

sein. Daraus leuchtet dann

$$V(2\pi) < 0$$

(nicht $= 0$) ein. Nun sieht man, daß allgemein für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$V((2n+1)\pi) = \int_0^{\frac{1}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1)\pi t \cdot dt + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\frac{2\nu-1}{2n+1}}^{\frac{2\nu+1}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1)\pi t \cdot dt$$

$$\geqq \int_0^{\frac{1}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1)\pi t \cdot dt > 0$$

---

[9]) Definiert man $f(t)$ durch $f(-t) = f(t)$, $f(t+2) = -f(t)$ für alle reellen nicht ganzzahligen Werte von t, so ist

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2U\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \cos \frac{2n+1}{2} \pi t,$$

$$U(0) = \int_0^1 f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2U\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\frac{2n+1}{2}\pi}.$$

Letztere Formel zeigt, daß die annähernden rationalen Funktionen sich im Falle des § 5, IV. befinden. — Man könnte dieselbe Formel auch durch Residuenrechnung finden.

und

$$V(2n\pi)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{0}^{\frac{1}{2n}}\sin 2n\pi t\left\{f\left(\frac{\nu-1}{n}+t\right)-f\left(\frac{\nu}{n}-t\right)\right\}dt<0$$

ist. Denn $V(2n\pi)$ könnte nur dann gleich 0 sein, wenn die Funktion $f(t)$ in jedem Intervall von der Form $\frac{\nu-1}{n}<t<\frac{\nu}{n}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ konstant wäre, also dem Ausnahmefall angehörte.

Zusammenfassend ist

(49) $\quad V(\pi)>0, \quad V(2\pi)<0, \quad V(3\pi)>0, \quad V(4\pi)<0, \quad \ldots$

Nimmt man noch

$$V'(0)=\int_{0}^{1}tf(t)dt>0$$

hinzu, so sieht man, daß die Partialbruchentwicklung

(44) $$\frac{V(z)}{z\sin z}=\frac{V'(0)}{z}-\frac{V(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}\right)+\frac{V(2\pi)}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}\right)-\cdots$$

im Pole $z=0$ ein positives Residuum, in den übrigen Polen $z=\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$ negative Residua hat. Satz II ergibt sich, wie I, aus § 5, IV. und § 5, V.[10]).

III. Es sei $f(t)$ wachsend, nirgends konkav und

$$\lim_{t=0}f(t)=0.$$

Dann hat $V(z)$ in jedem der Intervalle

(50) $$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right), \quad \left(4\pi, \frac{9\pi}{2}\right), \ldots$$

eine einfache Nullstelle, und zwar im Innern, außerhalb derselben keine positive Nullstelle und überhaupt keine imaginäre Nullstelle.

In III. werden sowohl die Voraussetzungen wie die Behauptungen von II. vermehrt. Daß $f(t)$ (von unten gesehen) nirgends konkav ist, bedeutet das Bestehen der Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}\{f(t)+f(t')\}\geqq f\{\tfrac{1}{2}(t+t')\}$$

für beliebige t, t'. Es folgt[11]), daß $f(t)$ für $0<t<1$ eine bestimmte

[10]) Man kann mit Benutzung Fourierscher Reihen oder Cauchyschen Integralsatzes die Beziehung

$$V'(0)=\frac{2V(\pi)}{\pi}-\frac{2V(2\pi)}{2\pi}+\frac{2V(3\pi)}{3\pi}-\cdots$$

beweisen, wodurch direkt gezeigt wird, daß die annähernden rationalen Funktionen sich im Falle 3) des § 5, IV. befinden.

[11]) Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica, Bd. 30 (1906), S. 175–198. Vgl. S. 190.

rechte Derivierte hat, die ich kurz mit $f'(t)$ bezeichne, und daß $f'(t)$ eine nicht abnehmende Funktion ist. Die Voraussetzung, daß $f(t)$ wachsend sei, übersetzt sich daher in die Ungleichung

$$f'(t) > 0.$$

Man beachte, daß aus der ständigen Voraussetzung der Existenz des Integrals $\int_0^1 f(t)dt$

$$\lim_{t=1} (1-t) f(t) = 0$$

folgt, da $f(t)$ beständig zunimmt. Nun ergibt sich durch partielle Integration

$$V\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f'(t) \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Die Funktion $f'(t)$ unterliegt denselben Bedingungen wie $f(t)$ in I. Daher wird

$$V\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \quad V\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0, \quad V\left(\frac{7\pi}{2}\right) < 0, \quad V\left(\frac{9\pi}{2}\right) > 0, \ldots.$$

Diese Ungleichungen zusammen mit denen unter (49) ergeben die Ergänzung, die III. dem Satz II hinzufügt.

Satz III ergibt die bekannte Verteilung der Nullstellen der Funktionen

$$\int_0^1 t \sin zt\, dt = -\frac{\cos z}{z} + \frac{\sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z^2}(\operatorname{tg} z - z),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t \sin zt}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\, n+1!} = J_1(z).$$

Die Nullstellen der ersteren nähern sich asymptotisch dem rechten Ende die der letzteren der Mitte der Intervalle (50).

IV. Es sei $f(t)$ wachsend, nirgends konkav, und seine rechte Derivierte $f'(t)$ gehöre nicht dem Ausnahmefalle des § 1 an. Dann sind die positiven Nullstellen von $U(z)$ in dem Innern der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right), \ldots$$

enthalten, und zwar liegt in jedem Intervall genau eine einfache Nullstelle.

Man erhält durch partielle Integration

$$(51) \qquad U(n\pi) = \int_0^1 f(t) \cos n\pi t \cdot dt = -\frac{1}{n\pi} \int_0^1 f'(t) \sin n\pi t \cdot dt.$$

Da $f'(t)$ denselben Bedingungen genügt, wie $f(t)$ unter II., so erhält man nun

$$U(\pi) < 0, \quad U(2\pi) > 0, \quad U(3\pi) < 0, \quad U(4\pi) > 0, \ldots. \tag{52}$$

Diese Ungleichungen zusammen mit denen unter (48) setzen uns in Stand, den Satz I zu IV zu ergänzen.

Satz IV. kann auf die Besselsche Funktion

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\, n!} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

angewandt werden[12]).

V. Es sei $f(t)$ positiv, abnehmend, nirgends konvex; wird mit $f'(t)$ die rechte Derivierte von $f(t)$ bezeichnet, so gehöre $-f'(t)$ dem allgemeinen Fall vom § 1 an. Dann hat $U(z)$ nur reelle Nullstellen, von denen jedes Intervall

$$(\pi, 2\pi), \quad (2\pi, 3\pi), \quad (3\pi, 4\pi), \ldots$$

eine und zwar im Innern enthält, während für $-\pi \leqq z \leqq +\pi$ die Funktion $U(z) > 0$ ist.

Satz V behandelt einen Typus von Funktionen, über den der § 3 nichts aussagt. Der Beweis ist ähnlich wie in den vorangehenden Fällen: durch partielle Integration wird für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$U(n\pi) = \int_0^1 f(t) \cos n\pi t\, dt = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \left(-f'(t)\right) \sin n\pi t\, dt,$$

also nach den Entwicklungen unter II.

$$U(\pi) > 0, \quad U(2\pi) < 0, \quad U(3\pi) > 0, \quad U(4\pi) < 0, \ldots.$$

Selbstverständlich ist $U(0) > 0$; jetzt schließt man aus der Hurwitzschen Partialbruchentwicklung (38), aus § 5, IV. und § 5, V., wie unter I. und II.

Um zu zeigen, wie viele Möglichkeiten es noch gibt, die vorangehenden Überlegungen mit andern zu kombinieren, gebe ich noch folgenden Satz:

VI. Es sei $f(t)$ zunehmend, konvex, und $f(\alpha) = 0$ $(0 < \alpha < 1)$. Die Funktion $U(z)$ hat dann keine oder zwei imaginäre Nullstellen, je nachdem

$$\int_0^1 f(t)\, dt \gtrless 0. \tag{53}$$

---

[12]) Für diese Verteilung der Nullstellen der Besselschen Funktion hat auch Herr Hurwitz einen Beweis gegeben, der ebenfalls auf seinem Prinzip des Grenzübergangs vom Algebraischen aus beruht. Vgl. l. c. [6]).

Die Ungleichungen (52) folgen ebenso, wie unter IV. aus der durch partielle Integration gewonnenen Formel (51). Wendet man die Partialbruchzerlegung (38) an, so ergibt sich aus § 5, IV., daß nur die beiden in VI. genannten Möglichkeiten für die Nullstellen von $U(z)$ vorliegen können. Um diese auseinanderzuhalten, denke man sich ν von 0 bis $+\infty$ stetig variierend. Dann wächst die Funktion von ν

$$\frac{1}{\alpha^\nu}\int_0^1 f(t)t^\nu\,dt = -\int_0^\alpha |f(t)|\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\nu dt + \int_\alpha^1 |f(t)|\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\nu dt$$

beständig und strebt offenbar gegen $+\infty$. Die in § 5, V. betrachtete Folge (46) zeigt also keinen oder einen Zeichenwechsel, nach dem ersten oder zweiten Fall der Alternative (53). Somit ist VI. bewiesen.

Z. B. hat die transzendente Gleichung

$$J_0(z) - c\frac{\sin z}{z} = \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} - c\right)\cos zt\cdot dt = 0$$

keine imaginären Nullstellen, wenn $c < 1$, und genau zwei, wenn $c > 1$.

Endlich will ich noch einen sehr einfachen Fall betrachten, wo das Integrationsintervall unendlich ist.

VII. Es sei $f(t) > 0$ und beständig abnehmend. Dann kann das Integral

$$\int_0^\infty f(t)\sin zt\,dt$$

für keinen positiven Wert von z verschwinden. Ist $f(t)$ zugleich konvex, so kann das Integral

$$\int_0^\infty f(t)\cos zt\,dt$$

für keinen reellen Wert von z verschwinden.

Man hat

$$\int_0^\infty f(t)\sin zt\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{z}} \sin zt\left\{f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{z}\right) + f\left(t+\frac{2\pi}{z}\right) - f\left(t+\frac{3\pi}{z}\right) + \ldots\right\}dt > 0,$$

$$z\int_0^\infty f(t)\cos zt\,dt = \int_0^\infty \left(-f'(t)\right)\sin zt\,dt.$$

Man könnte leicht, wie in vorangehenden Fällen, genau die sehr enge Funktionenklasse bestimmen, die den Ausnahmefall von VII. bildet.

Als Beispiel zu verschiedenen Sätzen dieses Paragraphen betrachte ch die ganze Funktion von z

$$1 - \frac{z^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{z^4}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)} - \cdots$$

$$= (\alpha+1)\int_0^1 (1-t)^\alpha \cos zt\, dt$$

nd ich will die Veränderungen ihrer Nullstellen verfolgen, wenn der eelle Parameter α von $+\infty$ bis -1 abnimmt. Man hat, von einem ositiven Faktor abgesehen,

$f(t) = (1-t)^\alpha > 0$, $f'(t) = -\alpha(1-t)^{\alpha-1}$, $f''(t) = \alpha(\alpha-1)(1-t)^{\alpha-2}$.

1. $\alpha > 1$. Demnach $f'(t) < 0$, $f''(t) > 0$.

Keine reellen Nullstellen nach den Schlüssen in VII.

2. $\alpha = 1$.

Die Funktion $2\frac{1-\cos z}{z^2}$ hat nur reelle doppelte Nullstellen. Die posiiven sind $z = 2\pi$, 4π, 6π, ...

3. $0 < \alpha < 1$. Demnach $f'(t) < 0$, $f''(t) < 0$.

In Anwendung von V., nur reelle einfache Nullstellen, je eine posiive im Innern der Intervalle $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ...

4. $\alpha = 0$.

Die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ hat nur reelle einfache Nullstellen, $z = \pi$, 2π, 3π, ...

5. $-1 < \alpha < 0$. Demnach $f'(t) > 0$, $f''(t) > 0$.

In Anwendung von IV., nur reelle einfache Nullstellen, je eine posiive im Innern der Intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{\pi}, 2\pi\right)$, ...

6. $\alpha = -1$. (Nur die Reihendarstellung gültig.)

Die Funktion $\cos z$ hat nur reelle einfache Nullstellen in $z = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ...

Beachtet man den Weg der kleinsten positiven Nullstelle bei variierendem α, so sieht man, daß die Sätze IV und V möglichst enge Grenzen angeben. Von I., II., III. kann man dasselbe durch ebenso einfache Beispiele zeigen.

§ 7.

Bestimmung des Konvergenzexponenten.

Es sei $f(t)$ im Intervalle $0 < t < 1$ definiert. Ich setze die Existenz der (Riemannschen, ev. uneigentlichen) Integrale

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \qquad \int_0^1 |f(t)|\,dt > 0$$

voraus. Die von 0 verschiedenen Nullstellen der ganzen Funktion

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt}\,dt \tag{5}$$

seien, mehrfache mit ihrer Vielfachheit angeschrieben, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bezeichnet. Es ist

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|\alpha_3|^{1+\varepsilon}} + \cdots \tag{54}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergent, und

$$\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|} + \frac{1}{|\alpha_3|} + \cdots \tag{55}$$

divergent.

In diesem Satze ist die Voraussetzung der Endlichkeit des Intervalls wesentlich, wie das Beispiel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{zt}\,dt = \sqrt{2\pi}\, e^{+\frac{z^2}{2}}$$

zeigt. — Von $f(t)$ ist nicht vorausgesetzt, daß es nur reelle Werte annimmt.

Es ist

$$|F(z)| \leqq e^{|z|} \int_0^1 |f(t)|\,dt. \tag{56}$$

Aus dieser Ungleichung folgt schon bekanntlich die Konvergenz der Reihe (54).

Der Ungleichung (56) zufolge ist $F(z)$ auf alle Fälle eine Funktion vom Geschlecht 0 oder 1. Wäre die Reihe (55) konvergent, so würde $F(z)$ die Form

$$F(z) = e^{cz} g(z) \tag{57}$$

haben, wo c eine Konstante und

$$g(z) = C z^r \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right)\cdots \tag{58}$$

eine Funktion vom Geschlecht 0 ist, die alle Nullstellen von $F(z)$ mit

richtiger Vielfachheit ebenfalls zu Nullstellen hat. Als ganze Funktion vom Geschlecht 0, hätte $g(z)$ bekanntlich die Eigenschaft, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R = R(\varepsilon)$ auf die Weise anzugeben ist, daß für $|z| > R$ die Ungleichung

$$|g(z)| < e^{\varepsilon|z|}$$

besteht. Daher definierte nach einem wichtigen Satze des Herrn Wigert[13]) die für $|x| < |e^{-c}|$ konvergente Potenzreihe

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= g(0) + g(1)e^{c}x + g(2)e^{2c}x^2 + g(3)e^{3c}x^3 + \ldots \\ &= F(0) + F(1)x + F(2)x^2 + F(3)x^3 + \ldots,\end{aligned}$$

eine Funktion, die in der ganzen x-Ebene eindeutig und, ausgenommen im Punkte $x = e^{-c}$, überall regulär wäre.

Diese letzte Folge der Voraussetzung (57) ist aber sicher unrichtig. Denn nach (5) kann

$$\Phi(x) = \int_0^1 f(t)(1 + xe^{t} + x^2e^{2t} + x^3e^{3t} + \ldots)\,dt \tag{59}$$

$$= \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{1 - xe^{t}} = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{f(-\lg u)\,du}{u - x}$$

gesetzt werden. Man schließt zuerst, daß die Darstellung (59) im Kreise $|x| < 1$ und dann, nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung, daß sie überall gültig ist, ausgenommen höchstens die Punkte der Strecke $\frac{1}{e} < x < 1$ auf der positiven reellen Achse. Nun kann man aber sicher an dieser Strecke einen von e^{-c} verschiedenen Punkt γ finden, derart, daß $t = -\lg\gamma$ ein Stetigkeitspunkt der Funktion $f(t)$ und

$$f(-\lg\gamma) \neq 0$$

wird. Es ist aber bekanntlich, wenn η durch positive Werte gegen 0 strebt,

$$\lim_{\eta=0}\big(\Phi(\gamma + i\eta) - \Phi(\gamma - i\eta)\big) = 2\pi i f(-\lg\gamma) \neq 0,$$

also entweder ist die Funktion $\Phi(x)$ mehrdeutig, oder sie ist im Punkte $x = \gamma \neq e^{-c}$ singulär. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn man die Voraussetzung (57) fallen läßt und damit die Divergenz der Reihe (55) zugibt, w. z. b. w.

---

[13]) Vgl. S. Wigert, Sur les fonctions entières, Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar (1900), S. 1001–1011. Vgl. auch G. Faber, Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen, Mathem. Annalen, Bd. 57 (1903), S. 369–388, oder auch das Lehrbuch von G. Vivanti, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen (deutsch von A. Gutzmer), Leipzig (1906), S. 452 ff.

Durch den bewiesenen Satz haben wir zugleich Aufklärung über die Nullstellen der ganzen Funktionen von der Form $\lambda U(z) - \mu V(z)$ gewonnen. Denn setzt man

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + i\mu}{2} f(t) & \text{für } t > 0, \\ \frac{\lambda - i\mu}{2} f(-t) & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

so ist

$$\int_0^1 f(t)(\lambda \cos zt - \mu \sin zt)\,dt = \int_{-1}^{+1} h(t) e^{zt}\,dt.$$

Daß die Funktionen $\lambda U(z) - \mu V(z)$ unendlich viele Nullstellen mit dem Konvergenzexponenten 1 haben, und daß die Summe der reziproken Nullstellen nicht absolut konvergieren kann, war schon aus § 3 und § 6 in vielen Fällen ersichtlich[14]).

Ich will noch eine kleine Bemerkung über die benutzte Methode machen. Daß aus der Ungleichung (56) und aus der Annahme der Konvergenz der Reihe (55) die Gleichung (57) folgt — wobei

$$(58) \qquad g(z) = C z^r \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right)\dots$$

eine Funktion vom Geschlecht 0 bedeutete —, wird in der Hadamardschen Theorie durch eine Reihe von Schlüssen hergeleitet, deren wichtigster auf folgendem Satze beruht: zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es Kreise $|x| = r_1$, $|x| = r_2$, ... mit unendlich wachsenden Radien ($\lim_{n=\infty} r_n = \infty$), auf deren Peripherie die Ungleichung

$$(60) \qquad |g(z)| > e^{-\varepsilon|z|}$$

besteht. Ich will zeigen, daß dieser Satz auch als Folgerung des zitierten Wigertschen Satzes aufgefaßt werden kann. In der Tat, man betrachte neben der Funktion (58) die Funktion

$$G(z) = |C| z^r \left(1 - \frac{z}{|\alpha_1|}\right)\left(1 - \frac{z}{|\alpha_2|}\right)\left(1 - \frac{z}{|\alpha_3|}\right)\dots.$$

die ebenfalls vom Geschlecht 0 ist und nur reelle positive Nullstellen hat. Die Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ sind durch die Ungleichungen

$$(61) \qquad |G(|z|)| \leqq |g(z)| \leqq (-1)^r G(-|z|)$$

verbunden. Nach dem Wigertschen Satze hat die Potenzreihe

---

[14]) Hat $\lambda U(z) - \mu V(z)$ nur reelle Nullstellen, so ist es ein Grenzwert von Polynomen mit nur reellen Nullstellen. Vgl. G. Pólya und I. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Journal für Mathematik, Bd. 144, (1914), S. 89–113. Durch die Methoden dieser Arbeit lassen sich manche Einzelheiten in § 3 und § 6 von einer neuen Seite auffassen.

$$G(0)+G(1)z+G(2)z^2+\ldots$$

nur den Punkt $z=1$, diesen aber ganz gewiß zum singulären Punkte. Darum muß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|G(n)|}=1$$

sein. Also gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ unendlich viele ganze Zahlen n, so daß

$$|G(n)|>e^{-\varepsilon n}$$

gilt. Vergleicht man dies mit der linken Seite von (61), so findet man, daß die Ungleichung (60) auf unendlich vielen Kreisen (sogar mit ganzzahligen Radien) erfüllt ist, w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. April 1918.)

Reine Infinitesimalgeometrie.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

§ 1. Einleitung. Über das Verhältnis von Geometrie und Physik

Die wirkliche Welt, in die wir kraft unseres Bewußtseins hineingestellt sind, *ist nicht da*, schlechthin und in Einem Schlag, sondern *geschieht*; sie durchläuft, in jedem Augenblick vernichtet und neu geboren, eine kontinuierliche eindimensionale Folge von Zuständen in der *Zeit*. Der Schauplatz dieses zeitlichen Geschehens ist ein dreidimensionaler Euklidischer *Raum*. Seine Eigenschaften untersucht die *Geometrie*; hingegen ist es die Aufgabe der *Physik*, das im Raum existierende Reale begrifflich zu erfassen und die in der Flucht seiner Erscheinungen beharrenden Gesetze zu ergründen. Physik ist demnach eine Wissenschaft, welche die Geometrie zu ihrem Fundament hat; die Begriffe aber, durch welche sie das Wirkliche darstellt — Materie, Elektrizität, Kraft, Energie, elektromagnetisches Feld, Gravitationsfeld usf. — gehören einer ganz anderen Sphäre an als die geometrischen.

Diese alte Anschauung über das Verhältnis von Form und Inhalt der Wirklichkeit, von Geometrie und Physik ist durch die Einsteinsche Relativitätstheorie[1]) umgestürzt worden. Die *spezielle Relativitätstheorie* führte zu der Erkenntnis, daß Raum und Zeit zu einer unlöslichen Einheit verschmolzen sind, die als *Welt* bezeichnet werde; die Welt ist diese Theorie zufolge eine vierdimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit — Euklidisch mit der Modifikation, daß die der Weltmetrik zugrundeliegende quadratische Form nicht positiv-definit ist, sondern vom Trägheitsindex 1. Die *allgemeine Relativitätstheorie* gibt das, ganz im Geiste der moderne Nahewirkungsphysik, nur im Unendlichkleinen als gültig zu, nimmt für die Weltmetrik also den von Riemann in seinem Habilitationsvortrag

[1]) Ich verweise auf die Darstellung in meinem Buch „Raum, Zeit, Materie" Springer 1918 (im folgenden als RZM zitiert), und die dort angegebene Literatur.

aufgestellten allgemeineren Begriff der auf einer quadratischen *Differential*form beruhenden Maßbestimmung in Anspruch. Das prinzipiell Neue an ihr ist aber die Einsicht: die Metrik ist nicht eine Eigenschaft der Welt an sich; vielmehr ist Raum-Zeit als Form der Erscheinungen ein völlig gestaltloses vierdimensionales Kontinuum im Sinne der Analysis situs, die Metrik aber bringt etwas Reales zum Ausdruck, das in der Welt existiert, das durch Zentrifugal- und Gravitationskräfte physikalische Wirkungen auf die Materie ausübt und dessen Zustand auch umgekehrt durch die Verteilung und Beschaffenheit der Materie naturgesetzlich bedingt ist. Indem ich die Riemannsche Geometrie, die doch reine „Nahe-Geometrie" sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreite, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit her noch bei sich führte, gelangte ich zu einer Weltmetrik, aus welcher nicht nur die Gravitations-, sondern auch die elektromagnetischen Wirkungen hervorgehen, die somit, wie man mit gutem Grund annehmen darf, über alle physikalischen Vorgänge Rechenschaft gibt [2]). Nach dieser Theorie ist *alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik*; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. Der einzige Unterschied, der zwischen Geometrie und Physik besteht, ist der, daß die Geometrie allgemein ergründet, was im Wesen der metrischen Begriffe liegt [3]), die Physik aber das Gesetz zu ermitteln und in seine Konsequenzen zu verfolgen hat, durch welches die wirkliche Welt unter allen der Geometrie nach möglichen vierdimensionalen metrischen Räumen ausgezeichnet ist [4]).

In dieser Note möchte ich jene *reine Infinitesimalgeometrie* entwickeln, die nach meiner Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift. Der Aufbau der Nahegeometrie vollzieht sich sachgemäß in drei Stufen. Auf der ersten Stufe steht das aller Maßbestimmung bare *Kontinuum* im Sinne der Analysis situs — physikalisch gesprochen, *die leere Welt*; auf der zweiten das *affin zusammenhängende* Kontinuum — so nenne ich eine Mannigfaltigkeit, in welcher der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung von Vektoren einen Sinn hat; in

[2]) Eine erste Mitteilung darüber ist unter dem Titel „Gravitation und Elektrizität" in den Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, S. 465, erschienen.

[3]) Freilich geht die traditionelle Geometrie von dieser ihrer eigentlichen Aufgabe alsbald zu einer weniger prinzipiellen über, indem sie nun nicht mehr den Raum selbst zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht, sondern die im Raume möglichen Gebilde, spezielle Klassen solcher und deren Eigenschaften, die ihnen auf Grund der Raummetrik zukommen.

[4]) Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

der Physik erscheint der affine Zusammenhang als *Gravitationsfeld* —; auf der dritten endlich das *metrische* Kontinuum — physikalisch: *der „Äther"*, dessen Zustände sich in den Erscheinungen der Materie und Elektrizität kundgeben.

§ 2. Situs-Mannigfaltigkeit (leere Welt).

Infolge der Schwierigkeit, das anschauliche Wesen des stetigen Zusammenhangs durch eine rein logische Konstruktion zu erfassen, ist eine voll befriedigende Analyse des Begriffs der *n-dimensionalen Mannigfaltigkeit* heute nicht möglich[5]). Uns genügt folgendes: Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich auf n Koordinaten $x_1 x_2 \dots x_n$ beziehen, deren jede in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen bestimmten Zahlwert besitzt; verschiedenen Punkten entsprechen verschiedene Wertsysteme der Koordinaten; ist $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ ein zweites System von Koordinaten, so bestehen zwischen den x- und den $\bar{x}$-Koordinaten desselben willkürlichen Punktes gesetzmäßige Beziehungen

$$x_i = f_i(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo f_i rein logisch-arithmetisch konstruierbare Funktionen bedeuten; von ihnen setzen wir nicht nur voraus, daß sie stetig sind, sondern auch, daß sie stetige Ableitungen

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k}$$

besitzen, deren Determinante nicht verschwindet. Die letzte Bedingung ist notwendig und hinreichend, damit im Unendlichkleinen die affine Geometrie gilt, damit nämlich zwischen den Koordinatendifferentialen in beiden Systemen umkehrbare lineare Beziehungen statthaben:

$$(1) \qquad dx_i = \sum_k \alpha_{ik} d\bar{x}_k.$$

Die Existenz und Stetigkeit höherer Ableitungen nehmen wir an, wo wir ihrer im Laufe der Untersuchung bedürfen. Auf jeden Fall hat also der Begriff der stetigen und stetig differentiierbaren Ortsfunktion, ev. auch der der 2, 3, ... mal stetig differentiierbaren einen invarianten, vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn; die Koordinaten selber sind derartige Funktionen. — Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, an der wir keine andern Eigenschaften in Betracht ziehen außer denjenigen, die im Begriff der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegen, nennen wir — in physikalischer Terminologie — eine (n-dimensionale) *leere Welt.*

---

[5]) Vgl. darüber H. Weyl, Das Kontinuum (Leipzig 1918), namentlich S. 77 ff.

Die relativen Koordinaten dx_i eines zu dem Punkte $P = (x_i)$ unendlich benachbarten Punktes $P' = (x_i + dx_i)$ sind die Komponenten eines *Linienelementes* in P oder einer *infinitesimalen Verschiebung* $\overrightarrow{PP'}$ von P. Bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem gelten für diese Komponenten die Formeln (1), in denen α_{ik} die Werte der betreffenden Ableitungen im Punkte P bedeuten. Allgemeiner charakterisieren im Punkte P — bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems für die Umgebung von P — irgend n in bestimmter Reihenfolge gegebene Zahlen ξ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einen *Vektor* (oder eine *Verschiebung*) in P; die Komponenten ξ^i, bzw. $\bar{\xi}^i$ desselben Vektors in irgend zwei Koordinatensystemen, dem „ungestrichenen" und „gestrichenen", hängen durch die gleichen linearen Transformationsformeln (1) zusammen:

$$\xi^i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Vektoren in P kann man addieren und mit Zahlen multiplizieren; sie bilden also eine „lineare" oder „affine" Gesamtheit. Mit jedem Koordinatensystem sind n „Einheitsvektoren" $\mathfrak{e}_i$ in P verbunden, nämlich diejenigen, welche in dem betreffenden Koordinatensystem die Komponenten

$\mathfrak{e}_1$	$1, 0, 0, \ldots, 0$
$\mathfrak{e}_2$	$0, 1, 0, \ldots, 0$
..	. . . . .
$\mathfrak{e}_n$	$0, 0, 0, \ldots, 1$

besitzen.

Je zwei (linear unabhängige) Linienelemente in P mit den Komponenten dx_i, bzw. δx_i spannen ein (zweidimensionales) Flächenelement in P auf mit den Komponenten

$$dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i = \Delta x_{ik},$$

je drei (unabhängige) Linienelemente dx_i, δx_i, $\mathfrak{d} x_i$ in P ein (dreidimensionales) Raumelement mit den Komponenten

$$\begin{vmatrix} dx_i & dx_k & dx_l \\ \delta x_i & \delta x_k & \delta x_l \\ \mathfrak{d} x_i & \mathfrak{d} x_k & \mathfrak{d} x_l \end{vmatrix} = \Delta x_{ikl};$$

usw. Eine von einem willkürlichen Linien- oder Flächen- oder Raum- oder ... Element in P abhängige Linearform heißt ein *linearer Tensor* 1., bzw. 2., 3., ... Stufe. Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems können die Koeffizienten a dieser Linearform

$$\sum_i a_i dx_i, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2!} \sum_{ik} a_{ik} \Delta x_{ik}, \quad \frac{1}{3!} \sum_{ikl} a_{ikl} \Delta x_{ikl}, \ \ldots$$

eindeutig durch die Forderung des Alternierens normiert werden; diese besagt in dem letzten hingeschriebenen Fall z. B., daß Indextripeln (ikl), die durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen, derselbe Koeffizient a_{ikl} entspricht, während bei ungerader Permutation der Koeffizient in sein Negatives umschlägt, also

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = -a_{kil} = -a_{lki} = -a_{ilk}.$$

Die so normierten Koeffizienten werden als die *Komponenten* des betreffenden Tensors bezeichnet. Aus einem Skalarfeld f entspringt durch Differentiation ein lineares Tensorfeld 1. Stufe mit den Komponenten

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

aus einem linearen Tensorfeld 1. Stufe f_i ein solches 2. Stufe:

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i};$$

aus einem solchen 2. Stufe ein lineares Tensorfeld 3. Stufe:

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l};$$

usf. Diese Operationen sind von dem benutzten Koordinatensystem unabhängig[6]).

Ein linearer Tensor 1. Stufe in P möge eine dort angreifende *Kraft* heißen. Eine solche wird also bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems charakterisiert durch n Zahlen ξ_i, die sich bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem kontragredient zu den Verschiebungskomponenten transformieren:

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k.$$

Sind η^i die Komponenten einer willkürlichen Verschiebung in P, so ist $\sum_i \xi_i \eta^i$ eine Invariante. Unter *Tensor* in P wird allgemein eine Linearform einer oder mehrerer willkürlicher Verschiebungen und Kräfte in P verstanden. Liegt z. B. eine Linearform dreier willkürlicher Verschiebungen ξ, η, ζ und zweier willkürlicher Kräfte ϱ, σ vor:

$$\sum a_{ikl}^{pq} \xi^i \eta^k \zeta^l \varrho_p \sigma_q,$$

so sprechen wir von einem Tensor 5. Stufe mit den in bezug auf die Indizes ikl kovarianten, in bezug auf die Indizes pq kontravarianten Komponenten a. Eine Verschiebung ist selber ein kontravarianter, ein

[6]) RZM, § 13.

Kraft ein kovarianter Tensor 1. Stufe. Die Fundamentaloperationen der Tensoralgebra sind[7]):

1. Addition von Tensoren und Multiplikation mit einer Zahl;
2. Multiplikation von Tensoren;
3. Verjüngung.

Die Tensoralgebra läßt sich demnach schon in der leeren Welt begründen — sie setzt keine Maßbestimmung voraus —, von der Tensoranalysis hingegen nur die der „linearen" Tensoren. —

Eine „*Bewegung*" in unserer Mannigfaltigkeit ist gegeben, wenn jedem Wert s eines reellen Parameters in stetiger Weise ein Punkt zugeordnet ist; bei Benutzung eines Koordinatensystems x_i drückt sich die Bewegung durch Formeln $x_i = x_i(s)$ aus, in denen rechts die x_i als Funktionszeichen zu verstehen sind. Setzen wir stetige Differentiierbarkeit voraus, so erhalten wir, unabhängig vom Koordinatensystem, zu jedem Punkte $P = (s)$ der Bewegung einen Vektor in P mit den Komponenten

$$u^i = \frac{dx_i}{ds},$$

die *Geschwindigkeit*. Zwei Bewegungen, die durch stetige monotone Transformation des Parameters s auseinander hervorgehen, beschreiben dieselbe *Kurve*.

§ 3. Affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit (Welt mit Gravitationsfeld).

I. Begriff des affinen Zusammenhangs.

Ist P' ein zu dem festen Punkt P unendlich benachbarter, so *hängt P' mit P affin zusammen*, wenn von jedem Vektor in P feststeht, in welchen Vektor in P' er durch *Parallelverschiebung* von P nach P' übergeht. Die Parallelverschiebung der sämtlichen Vektoren in P von dort nach P' muß dabei selbstverständlich der folgenden Forderung genügen.

A. *Die Verpflanzung der Gesamtheit der Vektoren von P nach dem unendlich benachbarten Punkte P' durch Parallelverschiebung liefert eine affine Abbildung der Vektoren in P auf die Vektoren in P'.*

Benutzen wir ein Koordinatensystem und hat P darin die Koordinaten x_i, P' die Koordinaten $x_i + dx_i$, ein beliebiger Vektor in P die Komponenten ξ^i, der Vektor in P', der aus ihm durch Parallelverschiebung nach P' hervorgeht, die Komponenten $\xi^i + d\xi^i$, so muß also $d\xi^i$ linear von den ξ^i abhängen:

---

[7]) RZM, § 6.

$$d\xi^i = -\sum_r d\gamma^i{}_r \xi^r.$$

$d\gamma^i{}_r$ sind infinitesimale Größen, die nur vom Punkte P und der Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ mit den Komponenten dx_i abhängen, nicht aber von dem der Parallelverschiebung unterworfenen Vektor ξ. Wir betrachten fortan affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten; in einer solchen steht jeder Punkt P mit all seinen unendlich benachbarten in affinem Zusammenhang. An den Begriff der Parallelverschiebung ist noch eine zweite Forderung, die der *Kommutativität*, zu stellen.

B. *Sind P_1, P_2 zwei zu P unendlich benachbarte Punkte und geht der infinitesimale Vektor $\overrightarrow{PP_1}$ durch Parallelverschiebung von P nach P_2 in $\overrightarrow{P_2P_{21}}$ über, $\overrightarrow{PP_2}$ aber durch Parallelverschiebung nach P_1 in $\overrightarrow{P_1P_{12}}$, so fallen P_{12} und P_{21} zusammen.* (Es entsteht eine unendlich kleine Parallelogrammfigur.)

Bezeichnen wir die Komponenten von $\overrightarrow{PP_1}$ mit dx_i, die von $\overrightarrow{PP_2}$ mit δx_i, so besagt diese Forderung offenbar, daß

$$d\delta x_i = -\sum_r d\gamma^i{}_r \cdot \delta x_r \tag{2}$$

eine symmetrische Funktion der beiden Linienelemente d und δ ist. Folglich muß $d\gamma^i{}_r$ eine Linearform der Differentiale dx_i sein,

$$d\gamma^i{}_r = \sum_s \Gamma^i{}_{rs} dx_s,$$

und es müssen die nur von der Stelle P abhängigen Koeffizienten Γ, die „*Komponenten des affinen Zusammenhangs*", der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i{}_{sr} = \Gamma^i{}_{rs}$$

genügen.

Wegen der Art und Weise, wie in der Formulierung der Forderung B mit infinitesimalen Größen umgegangen wird, könnte dieser vorgeworfen werden, daß sie eines präzisen Sinns entbehre. Wir wollen deshalb noch ausdrücklich durch einen strengen Beweis feststellen, daß die Symmetrie von (2) eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedingung ist. Zu dem Zwecke ziehen wir ein (zweimal stetig differentiierbares) Skalarfeld f heran. Aus der Formel für das totale Differential

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

entnehmen wir, daß, wenn ξ^i die Komponenten eines willkürlichen Vektors in P sind,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi^i$$

ne vom Koordinatensystem unabhängige Invariante ist. Wir bilden eren Änderung bei einer zweiten infinitesimalen Verschiebung δ, bei elcher der Vektor ξ parallel mit sich von P nach P_2 verschoben werden oll, und erhalten

$$\delta df = \sum_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi^i \delta x_k - \sum_{ir} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta \gamma^i{}_r \, \xi^r .$$

Ersetzen wir hierin ξ^i wieder durch dx_i und ziehen von dieser Gleichung ie durch Vertauschung von d und δ entstandene ab, so ergibt sich die nvariante

$$\Delta f = (\delta d - d\delta) f = \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_r (d\gamma^i{}_r \delta x_r - \delta \gamma^i{}_r dx_r) \right\}.$$

Die Beziehungen

$$\sum_r (d\gamma^i{}_r \delta x_r - \delta \gamma^i{}_r dx_r) = 0$$

nthalten die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für edes Skalarfeld f die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt ist.

In physikalischer Ausdrucksweise ist ein affin zusammenhängendes Kontinuum als eine Welt zu bezeichnen, in der ein *Gravitationsfeld* errscht. Die Größen $\Gamma^i{}_{rs}$ sind die Komponenten des Gravitationsfeldes. Die Formeln, nach denen sich diese Komponenten beim Übergang von dem inen zum andern Koordinatensystem transformieren, brauchen wir hier nicht anzugeben. $\Gamma^i{}_{rs}$ verhalten sich gegenüber linearer Transformation wie die in bezug auf r und s kovarianten, in bezug auf i kontravarianten Komponenten eines Tensors, verlieren diesen Charakter jedoch bei nichtinearen Transformationen. Wohl aber sind die Änderungen $\delta \Gamma^i{}_{rs}$, welche die Größen Γ erfahren, wenn man den affinen Zusammenhang der Mannigaltigkeit willkürlich abändert, die Komponenten eines allgemein-invarianten Tensors von dem angegebenen Charakter.

Was unter *Parallelverschiebung einer Kraft* in P von dort nach dem unendlich benachbarten Punkte P' zu verstehen ist, ergibt sich aus der Forderung, daß das invariante Produkt dieser Kraft und eines willkürlichen Vektors in P bei Parallelverschiebung erhalten bleibe. Sind ξ_i die Komponenten der Kraft, η^i die der Verschiebung, so liefert[8])

$$d(\xi_i \eta^i) = (d\xi_i \cdot \eta^i) + \xi_r d\eta^r = (d\xi_i - d\gamma^r{}_i \xi_r) \eta^i = 0$$

die Formel

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma^r{}_i \xi_r .$$

[8]) Wir verwenden im folgenden die Einsteinsche Festsetzung, daß über Indizes, die in einem Formelglied doppelt auftreten, stets zu summieren ist, ohne daß wir es nötig erachten, jedesmal ein Summenzeichen davor zu setzen.

Zu jeder Stelle P kann man ein Koordinatensystem x_i von solcher Art einführen — ich nenne es *geodätisch* in P —, daß in ihm die Komponenten Γ^i_{rs} des affinen Zusammenhangs an der Stelle P verschwinden. Sind zunächst x_i beliebige Koordinaten, die in P verschwinden, und bedeuten Γ^i_{rs} die Komponenten des affinen Zusammenhangs an der Stelle P in diesem Koordinatensystem, so erhält man ein geodätisches $\bar{x}_i$ durch die Transformation

$$x_i = \bar{x}_i - \tfrac{1}{2} \sum_{rs} \Gamma^i_{rs} \bar{x}_r \bar{x}_s. \tag{3}$$

Betrachten wir nämlich die $\bar{x}_i$ als unabhängige Variable und deren Differentiale $d\bar{x}_i$ als Konstante, so gilt im Sinne Cauchys an der Stelle $P(\bar{x}_i = 0)$:

$$dx_i = d\bar{x}_i, \qquad d^2 x_i = -\Gamma^i_{rs} d\bar{x}_r d\bar{x}_s,$$

also

$$d^2 x_i + \Gamma^i_{rs} dx_r dx_s = 0.$$

Wegen ihrer invarianten Natur lauten die letzten Gleichungen im Koordinatensystem $\bar{x}_i$:

$$d^2 \bar{x}_i + \bar{\Gamma}^i_{rs} d\bar{x}_r d\bar{x}_s = 0.$$

Diese sind aber für beliebige konstante $d\bar{x}_i$ nur erfüllt, wenn alle $\bar{\Gamma}^i_{rs}$ verschwinden. *Das Gravitationsfeld kann demnach durch geeignete Wahl des Koordinatensystems an einer einzelnen Stelle stets zum Verschwinden gebracht werden.* Durch die Forderung der „Geodäsie" in P sind Koordinaten in der Umgebung von P, wenn man lineare Transformation frei gibt, bestimmt bis auf Glieder 3. Ordnung; d. h. sind x_i, $\bar{x}_i$ zwei in P geodätische Koordinatensysteme und verschwinden sowohl die x_i wie die $\bar{x}_i$ in P, so gelten unter Vernachlässigung von Gliedern, die in den $\bar{x}_i$ von 3. und höherer Ordnung sind, lineare Transformationsformeln $x_i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{x}_k$ mit konstanten Koeffizienten α_{ik}.

II. Tensoranalysis. Gerade Linie.

Erst im affin zusammenhängenden Raum läßt sich die *Tensoranalysis* vollständig begründen. Sind beispielsweise f^k_i die in i kovarianten, in k kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 2. Stufe, so nehmen wir im Punkte P eine willkürliche Verschiebung ξ und eine Kraft η zu Hilfe, bilden die Invariante

$$f^k_i \xi^i \eta_k$$

und ihre Änderung bei einer unendlich kleinen Verrückung d des Argumentpunktes P, bei welcher ξ und η parallel mit sich verschoben werden. Es ist

$$d(f^k_i \xi^i \eta_k) = \frac{\partial f^k_i}{\partial x_l} \xi^i \eta_k dx_l - f^k_r \eta_k d\gamma^r_i \xi^i + f^r_i \xi^i d\gamma^k_r \eta_k,$$

also sind

$$f^k_{il} = \frac{\partial f^k_i}{\partial x_l} - \Gamma^r_{il} f^k_r + \Gamma^k_{rl} f_i$$

die in il kovarianten, in k kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe, das aus dem gegebenen Tensorfeld 2. Stufe in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt.

Im affin zusammenhängenden Raum gewinnt der Begriff der *geraden oder geodätischen Linie* einen bestimmten Sinn. Die Gerade entsteht, wenn man einen Vektor beständig parallel mit sich in seiner eigenen Richtung verschiebt, als Bahnkurve des Anfangspunktes dieses Vektors; sie kann daher als diejenige Kurve bezeichnet werden, die ihre Richtung ungeändert beibehält. Sind u^i die Komponenten jenes Vektors, so sollen also im Verlaufe der Bewegung beständig die Gleichungen

$$du^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha dx_\beta = 0,$$

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = u^1 : u^2 : \ldots : u^n$$

gelten. Den zur Darstellung der Kurve zu benutzenden Parameter s können wir demnach so normieren, daß identisch in s

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

ist, und die Differentialgleichungen der geraden Linie lauten dann

$$w^i \equiv \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Für jede beliebige Bewegung $x_i = x_i(s)$ sind die linken Seiten dieser Gleichungen die Komponenten eines mit der Bewegung invariant verknüpften Vektors im Punkte s, der *Beschleunigung*. In der Tat gilt, wenn ξ_i eine willkürliche Kraft in jenem Punkte ist, die beim Übergang zum Punkte $s + ds$ parallel mit sich verschoben wird,

$$\frac{d(u^i \xi_i)}{ds} = w^i \xi_i.$$

Eine Bewegung, deren Beschleunigung identisch verschwindet, heißt eine *Translation*. Unter gerader Linie — so kann man unsere obige Erklärung auch fassen — ist die Bahnkurve einer Translation zu verstehen.

III. Krümmung.

Sind P und Q zwei durch eine Kurve verbundene Punkte, in deren erstem ein Vektor gegeben ist, so kann man diesen parallel mit sich längs der Kurve von P nach Q schieben. Die so zustande kommende *Vektorübertragung* ist jedoch im allgemeinen *nicht integrabel*; d. h. der Vektor,

zu dem man in Q gelangt, ist abhängig von dem Verschiebungswege, auf dem die Übertragung vollzogen wird. Nur in dem besonderen Fall, wo Integrabilität stattfindet, hat es einen Sinn, von dem *gleichen* Vektor in zwei verschiedenen Punkten P und Q zu sprechen; es sind darunter solche Vektoren zu verstehen, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Alsdann heißt die Mannigfaltigkeit *Euklidisch*. In einer solchen lassen sich besondere, „lineare" Koordinatensysteme einführen, die dadurch ausgezeichnet sind, daß bei ihrer Benutzung gleiche Vektoren in verschiedenen Punkten gleiche Komponenten besitzen. Je zwei solche lineare Koordinatensysteme hängen durch lineare Transformationsformeln zusammen. In einem linearen Koordinatensystem verschwinden die Komponenten des Gravitationsfeldes identisch.

In der oben (§ 3, I., **B.**) konstruierten unendlichkleinen Parallelogrammfigur bringen wir im Punkte P einen beliebigen Vektor mit den Komponenten ξ^i an, verschieben ihn einmal parallel mit sich nach P_1 und von da nach P_{12}, ein andermal zunächst nach P_2 und von dort nach P_{21}. Da P_{12} mit P_{21} zusammenfällt, können wir die Differenz dieser beiden Vektoren in jenem Punkte bilden und erhalten dadurch offenbar einen Vektor mit den Komponenten

$$\Delta\xi^i = \delta d\xi^i - d\delta\xi^i$$

daselbst. Aus

$$d\xi^i = -d\gamma^i_k \xi^k = -\Gamma^i_{kl}\, dx_l \xi^k$$

folgt

$$\delta d\xi^i = -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} dx_l \delta x_m \xi^k - \Gamma^i_{kl}\, \delta dx_l \cdot \xi^k + d\gamma^i_r\, \delta\gamma^r_k\, \xi^k$$

und wegen der Symmetrie von δdx_l:

$$\Delta\xi^i = \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} \right) dx_l \delta x_m + (d\gamma^i_r\, \delta\gamma^r_k - d\gamma^r_k\, \delta\gamma^i_r) \right\} \xi^k .$$

Wir erhalten also

$$\Delta\xi^i = \Delta R^i_k\, \xi^k ,$$

wo ΔR^i_k von dem verschobenen Vektor ξ unabhängige Linearformen der beiden Verrückungen d und δ oder vielmehr des von ihnen aufgespannten Flächenelements mit den Komponenten

$$\Delta x_{lm} = dx_l \delta x_m - dx_m \delta x_l .$$

sind:

$$(4) \qquad \Delta R^i_k = R^i_{klm}\, dx_l \delta x_m = \tfrac{1}{2} R^i_{klm}\, \Delta x_{lm} \qquad (R^i_{kml} = -R^i_{klm})$$

$$(5) \qquad R^i_{klm} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} \right) + (\Gamma^i_{lr}\, \Gamma^r_{km} - \Gamma^i_{mr}\, \Gamma^r_{kl}).$$

Sind η_i die Komponenten einer willkürlichen Kraft in P, so ist $\eta_i \Delta\xi$

eine Invariante; R^i_{klm} sind folglich die in klm kovarianten, in i kontravarianten Komponenten eines Tensors 4. Stufe in P, der *Krümmung*. Das identische Verschwinden der Krümmung ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Mannigfaltigkeit Euklidisch ist. Außer der neben (4) verzeichneten Bedingung der „schiefen" erfüllen die Krümmungskomponenten noch die Bedingung der „zyklischen" Symmetrie:

$$R^i_{klm} + R^i_{lmk} + R^i_{mkl} = 0.$$

Von Hause aus ist die Krümmung in einem Punkte P eine lineare Abbildung oder Transformation $\Delta\mathsf{P}$, welche jedem Vektor ξ daselbst einen Vektor $\Delta\xi$ zuordnet; diese Transformation hängt selber linear von einem Flächenelement in P ab:

$$\Delta\mathsf{P} = \mathsf{P}_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \tfrac{1}{2}\mathsf{P}_{ik}\, \Delta x_{ik} \qquad (\mathsf{P}_{ki} = -\mathsf{P}_{ik}).$$

Die Krümmung ist demnach am besten als ein „linearer Transformationen-Tensor 2. Stufe" zu bezeichnen.

Um den Beweis für die Invarianz des Krümmungstensors gegen Einwände sicherzustellen, die etwa gegen die obige Infinitesimalüberlegung erhoben werden könnten, benutze man ein Kraftfeld f_i, bilde die Änderung $d(f_i\xi^i)$ des invarianten Produkts $f_i\xi^i$ in solcher Weise, daß bei der unendlichkleinen Verrückung d der Vektor ξ parallel mit sich verschoben wird. Ersetzt man in dem erhaltenen Ausdruck die infinitesimale Verrückung dx durch einen beliebigen Vektor ϱ in P, so erhält man eine invariante Bilinearform zweier willkürlicher Vektoren ξ und ϱ in P. Von ihr bilde man die Änderung, welche einer zweiten unendlichkleinen Verrückung δ entspricht, indem man dabei die Vektoren ξ, ϱ parallel mitnimmt, und ersetze hernach die zweite Verrückung durch einen Vektor σ in P. Man findet die Form

$$\delta d(f_i\xi^i) = \delta df_i \cdot \xi^i + df_i\, \delta\xi^i + \delta f_i\, d\xi^i + f_i\, \delta d\xi^i.$$

Durch Vertauschung von d und δ und nachfolgende Subtraktion ergibt sich daraus wegen der Symmetrie von δdf_i die Invariante

$$\Delta(f_i\xi^i) = f_i\, \Delta\xi^i,$$

und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

§ 4. Metrische Mannigfaltigkeit (der Äther).

I. Begriff der metrischen Mannigfaltigkeit.

Eine Mannigfaltigkeit *trägt im Punkte P eine Maßbestimmung*, wenn die Linienelemente in P sich ihrer Länge nach vergleichen lassen; wir nehmen dabei im Unendlichkleinen die Gültigkeit der Pythagoreisch-

Euklidischen Gesetze an. Es soll also je zwei Vektoren ξ, η in P eine Zahl $\xi \cdot \eta$ als *skalares Produkt* entsprechen, die in ihrer Abhängigkeit von beiden eine symmetrische Bilinearform ist; diese Bilinearform ist freilich nicht absolut, sondern nur bis auf einen willkürlichen, von 0 verschiedenen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Es ist also nicht eigentlich die Form $\xi \cdot \eta$, sondern nur die Gleichung $\xi \cdot \eta = 0$ gegeben; zwei Vektoren, welche sie erfüllen, heißen zueinander *senkrecht*. Wir setzen voraus, daß jene Gleichung nicht-ausgeartet sei, d. h. daß der einzige Vektor in P, auf welchem alle Vektoren in P senkrecht stehen, der Vektor 0 ist. Wir setzen dagegen nicht voraus, daß die zugehörige quadratische Form $\xi \cdot \xi$ positiv-definit ist. Hat sie den Trägheitsindex q und ist $n - q = p$, so sagen wir kurz, die Mannigfaltigkeit sei in dem betrachteten Punkte $(p+q)$-dimensional; wegen des willkürlichen Proportionalitätsfaktors sind die beiden Zahlen p, q nur bis auf ihre Reihenfolge bestimmt. Wir nehmen jetzt an, daß unsere Mannigfaltigkeit in jedem Punkte eine Maßbestimmung trägt. Zum Zwecke der analytischen Darstellung denken wir uns 1. ein bestimmtes Koordinatensystem und 2. den an jeder Stelle willkürlich zu wählenden Proportionalitätsfaktor im skalaren Produkt festgelegt; damit ist ein „*Bezugssystem*“[9]) für die analytische Darstellung gewonnen. Hat dann der Vektor ξ im Punkte P mit den Koordinaten x_i die Komponenten ξ^i, η die Komponenten η^i, so wird

$$(\xi \cdot \eta) = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k \qquad (g_{ki} = g_{ik})$$

sein, wo die Koeffizienten g_{ik} Funktionen der x_i sind. Die g_{ik} sollen nicht nur stetig, sondern zweimal stetig differentiierbar sein. Da sie stetig sind und ihre Determinante g nach Voraussetzung nirgendwo verschwindet, hat die quadratische Form $(\xi \cdot \xi)$ an allen Stellen den gleichen Trägheitsindex q; wir können daher die Mannigfaltigkeit in ihrem ganzen Verlaufe als $(p+q)$-dimensional bezeichnen. Behalten wir das Koordinatensystem bei, legen aber eine andere Wahl des unbestimmten Proportionalitätsfaktors zugrunde, so bekommen wir statt der g_{ik} als Koeffizienten des skalaren Produkts Größen

$$g'_{ik} = \lambda \cdot g_{ik},$$

wo λ eine nirgendwo verschwindende stetige (und zweimal stetig differentiierbare) Ortsfunktion ist.

Zufolge der bisherigen Annahme ist die Mannigfaltigkeit nur mit einer *Winkelmessung* ausgestattet; die Geometrie, welche auf sie allein sich stützt, wäre als „*konforme Geometrie*“ zu bezeichnen; sie hat be-

[9]) Ich unterscheide also zwischen „Koordinatensystem“ und „Bezugssystem“.

kanntlich im Gebiete der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten („Riemann-schen Flächen") wegen ihrer Wichtigkeit für die komplexe Funktionen-theorie eine weitgehende Ausbildung erfahren. Machen wir keine weitere Voraussetzung, so bleiben die einzelnen Punkte der Mannigfaltigkeit in metrischer Hinsicht vollständig gegeneinander isoliert. Ein metrischer Zusammenhang von Punkt zu Punkt wird erst dann in sie hineingetragen, wenn ein *Prinzip der Übertragung der Längeneinheit von einem Punkte P zu seinen unendlich benachbarten* vorliegt. Statt dessen machte Riemann die viel weitergehende Annahme, daß sich Linienelemente nicht nur an derselben Stelle, sondern auch an irgend zwei endlich entfernten Stellen ihrer Länge nach miteinander vergleichen lassen. *Die Möglichkeit einer solchen „ferngeometrischen" Vergleichung kann aber in einer reinen Infinitesimalgeometrie durchaus nicht zugestanden werden.* Die Riemann-sche Annahme ist auch in die Einsteinsche Weltgeometrie der Gravita-tion übergegangen. Hier soll diese Inkonsequenz beseitigt werden.

Sei P ein fester Punkt, P_* ein unendlich benachbarter, der aus ihm durch die Verschiebung mit den Komponenten dx_i hervorgeht. Wir legen ein bestimmtes Bezugssystem zugrunde. Im Verhältnis zu der damit in P sowie in allen übrigen Punkten des Raumes) festgelegten Längeneinheit wird das Quadrat der Länge eines beliebigen Vektors ξ in P gegeben sein durch

$$\sum_{ik} g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k.$$

Das Längenquadrat eines beliebigen Vektors ξ_* in P_* aber wird, *wenn wir die in P gewählte Längeneinheit von P nach P_* übertragen*, wie wir das als möglich voraussetzen, gegeben werden durch

$$(1+d\varphi)\sum_{ik}(g_{ik}+dg_{ik})\,\xi_*^i\,\xi_*^k,$$

wo $1+d\varphi$ einen unendlich wenig von 1 abweichenden Proportionalitäts-faktor bedeutet; $d\varphi$ muß eine homogene Funktion der Differentiale dx_i von der Ordnung 1 sein. Verpflanzen wir nämlich die im Punkte P gewählte Längeneinheit von Punkt zu Punkt längs einer Kurve, die von P nach dem endlich entfernten Punkte Q führt, so erhalten wir für das Quadrat der Länge eines beliebigen Vektors in Q, unter Zugrundelegung der so in Q gewonnenen Längeneinheit, den Ausdruck $g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k$, multipli-ziert mit einem Proportionalitätsfaktor, der sich als Produkt der unend-lich vielen einzelnen Faktoren von der Form $1+d\varphi$ ergibt, die jeweils beim Übergang von einem Punkt der Kurve zum nächsten hinzutreten:

$$\Pi(1+d\varphi) = \Pi e^{d\varphi} = e^{\Sigma d\varphi} = e^{\int_P^Q d\varphi}.$$

Damit das im Exponenten auftretende Integral einen Sinn hat, muß $d\varphi$ eine Funktion der Differentiale von der behaupteten Art sein.

Ersetzt man g_{ik} durch $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$, so wird an Stelle von $d\varphi$ eine andere Größe $d\varphi'$ treten. Es muß dabei, wenn λ den Wert dieses Faktors im Punkte P bedeutet,

$$(1 + d\varphi')(g'_{ik} + a g_{ik}) = \lambda(1 + d\varphi)(g_{ik} + dg_{ik})$$

sein, und das ergibt

$$d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{6}$$

Von den zunächst über $d\varphi$ möglichen Annahmen, daß es eine lineare Differentialform ist oder die Wurzel aus einer quadratischen oder die Kubikwurzel aus einer kubischen usf., hat, wie wir jetzt aus (6) erkennen, nur die erste einen invarianten Sinn. Wir sind damit zu folgendem Resultat gelangt.

Die Metrik einer Mannigfaltigkeit beruht auf einer quadratischen und einer linearen Differentialform

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \quad \text{und} \quad d\varphi = \varphi_i dx_i. \tag{7}$$

Umgekehrt sind aber durch die Metrik diese Formen nicht absolut festgelegt, sondern jedes Formenpaar ds'^2, $d\varphi'$, das aus (7) nach den Gleichungen

$$ds'^2 = \lambda \cdot ds^2, \qquad d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{8}$$

entspringt, ist dem ersten Paar in dem Sinne äquivalent, daß beide die gleiche Metrik zum Ausdruck bringen. λ ist darin eine beliebige, nirgendwo verschwindende stetige (genauer: zweimal stetig differentiierbare) *Ortsfunktion.* In alle Größen oder Beziehungen, welche metrische Verhältnisse analytisch darstellen, müssen demnach die Funktionen g_{ik}, φ_i in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet 1. gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation („Koordinaten-Invarianz") und 2. gegenüber der Ersetzung von (7) durch (8) („Maßstab-Invarianz"). $\frac{d\lambda}{\lambda} = d \lg \lambda$ ist ein totales Differential. Während also in der quadratischen Form ds^2 ein Proportionalitätsfaktor an jeder Stelle willkürlich bleibt, besteht die Unbestimmtheit von $d\varphi$ in einem additiven totalen Differential.

Eine metrische Mannigfaltigkeit bezeichnen wir in physikalischer Ausdrucksweise als eine vom *Äther* erfüllte Welt. Die bestimmte, in der Mannigfaltigkeit herrschende Metrik zeigt einen bestimmten Zustand des die Welt erfüllenden Äthers an. Dieser Zustand ist also relativ zu einem Bezugssystem durch Angabe (arithmetische Konstruktion) der Funktionen g_{ik}, φ_i zu beschreiben.

Aus (6) geht hervor, daß der lineare Tensor 2. Stufe mit den Komponenten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

durch die Metrik der Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist; ich nenne ihn den *metrischen Wirbel*. Er ist, wie ich glaube, dasselbe, was in der Physik *elektromagnetisches Feld* heißt. Er genügt dem „ersten System der Maxwellschen Gleichungen"

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Sein Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Längenübertragung integrabel ist, daß also jene Voraussetzungen Platz greifen, welche Riemann der metrischen Geometrie zugrunde legte. Wir verstehen daher, wie Einstein durch seine Weltgeometrie, die sich in mathematischer Hinsicht an Riemann anschließt, nur von den Gravitations-, nicht aber von den elektromagnetischen Erscheinungen Rechenschaft geben konnte.

II. Affiner Zusammenhang einer metrischen Mannigfaltigkeit.

Im metrischen Raum tritt an Stelle der in § 3, I. an den Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung gestellten Forderung **A** die weitergehende

A*: *daß die Parallelverschiebung der sämtlichen Vektoren in einem Punkte P nach einem unendlich benachbarten P' nicht nur eine affine, sondern eine kongruente Verpflanzung dieser Vektorgesamtheit sein muß.*

Unter Verwendung der damaligen Bezeichnungen ergibt diese Forderung die Gleichung

$$(9) \qquad (1 + d\varphi)(g_{ik} + dg_{ik})(\xi^i + d\xi^i)(\xi^k + d\xi^k) = g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

Bei allen Größen a^i, die einen oberen Index (i) tragen, definieren wir das „Herunterziehen" dieses Index durch die Gleichungen

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k$$

(und den umgekehrten Prozeß des Heraufziehens eines Index durch die dazu inversen Gleichungen). Für (9) können wir, diese Symbolik benutzend, schreiben:

$$(g_{ik}\xi^i\xi^k)d\varphi + \xi^i\xi^k dg_{ik} + 2\xi_i d\xi^i = 0.$$

Der letzte Term ist

$$= -2\xi_i\xi^k d\gamma^i{}_k = -2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik} = -\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki});$$

es muß somit

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi \tag{10}$$

sein. Diese Gleichung läßt sich gewiß nur erfüllen, wenn $d\varphi$ eine lineare Differentialform ist; eine Annahme, zu der wir schon oben als der einzig vernünftigen gedrängt wurden. Aus (10) oder

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r \tag{10*}$$

folgt in Anbetracht der Symmetrieeigenschaft $\Gamma_{r,ik} = \Gamma_{r,ki}$:

$$\Gamma_{r,ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \tfrac{1}{2}(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r); \tag{11}$$

$$(\Gamma_{r,ik} = g_{rs}\Gamma^{s}_{ik}).$$

Es zeigt sich somit, daß in einer metrischen Mannigfaltigkeit der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung eines Vektors durch die aufgestellten Forderungen eindeutig festgelegt wird[10]). Ich betrachte dies als die *Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie*, daß mit der Metrik auch der affine Zusammenhang einer Mannigfaltigkeit gegeben ist, *das Prinzip der Längenübertragung ohne weiteres ein solches der Richtungsübertragung mit sich führt*, oder physikalisch ausgedrückt, *der Zustand des Äthers das Gravitationsfeld bestimmt.*

Unter den geodätischen Linien sind, wenn die quadratische Form $g_{ik}dx_i dx_k$ indefinit ist, die *Nullinien* ausgezeichnet, längs deren jene Form verschwindet. Sie hängen nur vom Verhältnis der g_{ik}, dagegen überhaupt nicht von den φ_i ab, sind also Gebilde der konformen Geometrie[11]).

Wir hatten an den Begriff der Parallelverschiebung gewisse axiomatische Forderungen gestellt und gezeigt, daß ihnen in einer metrischen Mannigfaltigkeit auf eine und nur eine Weise genügt werden kann. Es ist aber auch möglich, jenen Begriff in einfacher Weise explizite zu definieren. Ist P ein Punkt unserer metrischen Mannigfaltigkeit, so wollen wir ein Bezugssystem *geodätisch* im Punkte P nennen, wenn bei seiner Benutzung die φ_i in P verschwinden und die g_{ik} stationäre Werte annehmen:

$$\varphi_i = 0, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0.$$

---

[10]) Vgl. hierzu Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917), S. 187–217, insb. S. 208.

[11]) Mit dieser Bemerkung möchte ich ein Versehen auf Seite 183 meines Buches „Raum, Zeit, Materie“ berichtigen.

D. *Zu jedem Punkt P gibt es geodätische Bezugssysteme. Ist ξ ein gegebener Vektor in P, P' aber ein zu P unendlich benachbarter Punkt, so verstehen wir unter dem aus ξ durch Parallelverschiebung nach P' entstehenden Vektor denjenigen Vektor in P', der in dem zu P gehörigen geodätischen Bezugssystem dieselben Komponenten wie ξ besitzt. Diese Definition ist von der Wahl des geodätischen Bezugssystems unabhängig.*

Es ist nicht schwer, die in dieser Erklärung mitausgesprochenen Behauptungen unabhängig von dem hier befolgten Gedankengang durch direkte Rechnung zu erweisen und auf demselben Wege zu zeigen, daß der so definierte Prozeß der Parallelverschiebung in einem beliebigen Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$d\xi^r = -\Gamma^r_{ik}\xi^i dx_k \tag{12}$$

mit den aus (11) zu entnehmenden Koeffizienten Γ beschrieben wird[12]). Hier aber, wo die invariante Bedeutung der Gleichungen (12) bereits feststeht, schließen wir einfacher so. In einem geodätischen Bezugssystem verschwinden nach (11) die Γ^r_{ik}, und die Gleichungen (12) reduzieren sich auf $d\xi^r = 0$. Der von uns aus axiomatischen Forderungen hergeleitete Begriff der Parallelverschiebung stimmt also mit dem in **D.** definierten überein. Es handelt sich nur noch darum, die Existenz eines geodätischen Bezugssystems nachzuweisen. Wir wählen zu diesem Zweck ein in P geodätisches Koordinatensystem x_i, das den Punkt P selbst zum Anfangspunkt ($x_i = 0$) hat. Ist die Längeneinheit in P und seiner Umgebung zunächst beliebig gewählt und bedeuten dann φ_i die Werte dieser Größen in P, so braucht man nur noch den Übergang von (7) zu (8) zu vollziehen mit

$$\lambda = e^{\sum_i \varphi_i x_i},$$

um zu erreichen, daß außer den Γ^i_{rs} auch die φ_i in P verschwinden. Daraus folgt dann — siehe (10*) — die geodätische Natur des so gewonnenen Bezugssystems. — Die Koordinaten eines in P geodätischen Bezugssystems sind in der unmittelbaren Umgebung von P, wenn man lineare Transformation freigibt, bis auf Glieder 3. Ordnung bestimmt, die Längeneinheit aber bis auf Glieder 2. Ordnung, falls die Hinzufügung eines konstanten Faktors freigegeben wird.

---

[12]) Man könnte dabei denjenigen Weg einschlagen, den ich in RZM §14 gegangen bin.

III. Rechenbequeme Erweiterung des Tensorbegriffs.

Diejenigen Größen, welche wir in § 2 als Tensoren eingeführt haben, sind dimensionslos; ihre Komponenten hängen wohl ab von der Wahl des Koordinatensystems, nicht aber von der Wahl der Längeneinheit. In der metrischen Geometrie erweist sich eine Begriffserweiterung als zweckmäßig: unter einem Tensor vom Gewichte e soll eine vom Koordinatensystem unabhängige Linearform einer oder mehrerer Verschiebungen und Kräfte in einem Punkte verstanden werden, die aber in der Weise von der Wahl der Längeneinheit abhängt, daß die Form bei Ersetzung von (7) durch (8) den Faktor λ^e annimmt. Die g_{ik} selber sind die Komponenten eines kovarianten Tensors 2. Stufe vom Gewichte 1. Übrigens sehen wir diesen erweiterten Tensorbegriff nur als einen Hilfsbegriff an, den wir lediglich um seiner rechnerischen Bequemlichkeit willen einführen; sachliche Bedeutung schreiben wir nur den Tensoren vom Gewichte 0 zu. Wo daher im folgenden von Tensoren die Rede ist ohne Zusatz einer Gewichtsangabe, ist der Begriff immer in diesem ursprünglichen Sinne zu verstehen.

Jene Bequemlichkeit aber beruht auf folgendem: Üben wir beispielsweise an den Komponenten a_{ik} eines kovarianten Tensors vom Gewichte e den Prozeß des Heraufziehens eines oder beider Indizes aus, so erhalten wir in a_i^k oder $a^i{}_k$ die gemischten Komponenten eines Tensors vom Gewichte $e-1$, in a^{ik} die Komponenten eines kontravarianten Tensors vom Gewichte $e-2$. Wir können uns nicht entschließen, wie dies sonst geschieht, die so entstehenden Tensoren mit dem ursprünglichen zu identifizieren, da sie außer von ihm noch von der Metrik, dem Zustand des Weltäthers abhängen und wir diesen durchaus nicht als a priori fest gegeben betrachten, sondern uns die Möglichkeit vorbehalten, ihn beliebigen virtuellen Veränderungen zu unterwerfen.

IV. Krümmung im metrischen Raum.

Sind ξ^i, η^i zwei willkürliche Verschiebungen im Punkte P, f_i aber die Komponenten eines Kraftfeldes, so folgt aus

$$f_i\eta^i = f^i\eta_i:$$
$$\Delta(f_i\eta^i) = f_i\Delta\eta^i = \Delta(f^i\eta_i) = f^i\Delta\eta_i,$$

also

$$\xi_i\Delta\eta^i = \xi^i\Delta\eta_i. \tag{13}$$

Andererseits ist, wenn wie immer bei virtuellen Verrückungen die Vektoren parallel verschoben werden,

$$d(\xi^i\eta_i) + (\xi^i\eta_i)d\varphi = 0,$$
$$\delta d(\xi^i\eta_i) + \delta(\xi^i\eta_i)d\varphi + (\xi^i\eta_i)\delta d\varphi = 0.$$

Das mittlere Glied in der letzten Gleichung ist

$$= -(\xi^i \eta_i)\,\delta\varphi\, d\varphi,$$

das erste

$$= \eta_i\,\delta d\xi^i + \delta\eta_i\, d\xi^i + d\eta_i\,\delta\xi^i + \xi^i\,\delta d\eta_i.$$

Vertauscht man d und δ und subtrahiert, so kommt daher

$$(\eta_i \Delta\xi^i + \xi^i \Delta\eta_i) + (\xi^i \eta_i)\,\Delta\varphi = 0$$

oder wegen (13)

$$(\eta_i \Delta\xi^i + \xi_i \Delta\eta^i) + (\xi^i \eta_i)\,\Delta\varphi = 0.$$

Setzen wir also

$$\Delta\xi^i = \bar{\Delta}\xi^i - \tfrac{1}{2}\xi^i \Delta\varphi, \tag{14}$$

so haben wir $\Delta\xi^i$ in eine zu ξ^i senkrechte und eine zu ξ^i parallele Komponente gespalten. Es ist

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2} F_{ik}\,\Delta x_{ik},$$

und wir schreiben

$$\bar{\Delta}\xi^i = \Delta \bar{R}^i{}_k \xi^k, \qquad \Delta \bar{R}^i{}_k = \tfrac{1}{2} \bar{R}^i{}_{klm}\,\Delta x_{lm}.$$

Dann gilt

$$R^i{}_{klm} = \bar{R}^i{}_{klm} - \tfrac{1}{2}\delta^i_k F_{lm}, \qquad \delta^i_k = \begin{cases} 1\,(i=k) \\ 0\,(i \neq k) \end{cases}. \tag{15}$$

Ziehen wir den Index i herunter, so sind die Größen $\bar{R}_{iklm}$ nicht nur in l und m, sondern auch in i und k schiefsymmetrisch. In der Zerspaltung (15) bezeichnen wir den ersten Summanden als Richtungs-, den zweiten als Längenkrümmung. Längenkrümmung = metrischer Wirbel. Aus der Natur der entsprechenden Zerspaltung (14) von $\Delta\xi^i$ geht folgender Satz hervor, der zugleich unsere Terminologie rechtfertigt: Dann und nur dann, wenn die durch Parallelverschiebung eines Vektors vollzogene Richtungsübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor $\bar{R}$ der Richtungskrümmung; dann und nur dann, wenn die ebenso vollzogene Längenübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor F der Längenkrümmung.

Wir geben hier noch den expliziten Ausdruck der Richtungskrümmung an. Führen wir in üblicher Weise die Christoffelschen Dreiindizes-Symbole und die Riemannschen Krümmungskomponenten durch die Gleichungen ein:

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right), \qquad \begin{bmatrix} i\,k \\ r \end{bmatrix} = \sum_s g_{rs} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix},$$

$$G^i{}_{klm} = \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} k\,m \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{Bmatrix} k\,l \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,m \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m\,r \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,l \\ r \end{Bmatrix},$$

setzen ferner für ein beliebiges quadratisches System von Zahlen a_{ik}:

$$\tfrac{1}{2}(g_{il}a_{km} + g_{km}a_{il} - g_{im}a_{kl} - g_{kl}a_{im}) = \tilde{a}_{iklm}$$

und bilden

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_r = \Phi_{ik},$$

$$\varphi_i \varphi_k - \tfrac{1}{2} g_{ik} (\varphi_r \varphi^r) = \varphi_{ik},$$

so ist

$$\bar{R}_{iklm} = G_{iklm} - \tilde{\Phi}_{iklm} + \tfrac{1}{2} \tilde{\varphi}_{iklm}.$$

Man beachte, daß hier den einzelnen Bestandteilen auf der rechten Seite keine selbständige Bedeutung zukommt: sie besitzen zwar die „Koordinaten"-, nicht aber die „Maßstab"-Invarianz Für die verjüngten Tensoren

$$\bar{R}^i{}_{kim} = \bar{R}_{km}, \qquad G^i{}_{kim} = G_{km}$$

gilt

$$\bar{R}_{ik} = G_{ik} - \frac{n-2}{2} (\Phi_{ik} - \tfrac{1}{2} \varphi_{ik}) - \tfrac{1}{2} g_{ik} (\Phi - \tfrac{1}{2} \varphi),$$

wo

$$\Phi = \Phi^i_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \varphi^i)}{\partial x_i}, \qquad \varphi = \varphi^i_i = -\frac{n-2}{2} (\varphi_i \varphi^i)$$

ist. Abermalige Verjüngung ergibt, wenn wir

$$\bar{R}^i_i = \bar{R} = R, \qquad G^i_i = G$$

setzen,

$$R = G - (n-1) \left\{ \Phi + \frac{n-2}{4} (\varphi_i \varphi^i) \right\}.$$

Aus der Richtungskrümmung kann man einen nur von den g_{ik} abhängigen Tensor in folgender Weise herleiten. Man setze

$$^*R_{iklm} = (n-2) \bar{R}_{iklm} - (g_{il} \bar{R}_{km} + g_{km} \bar{R}_{il} - g_{im} \bar{R}_{kl} - g_{kl} \bar{R}_{im}) + \frac{1}{n-1} (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \bar{R}.$$

Diese Zahlen $^*R_{iklm}$ sind gleich den in analoger Weise aus den G_{iklm} zu bildenden $^*G_{iklm}$; bringt man also den Index i wieder nach oben, so sind $^*G^i{}_{klm} = {}^*R^i{}_{klm}$ die Komponenten eines invarianten Tensors der konformen Geometrie. Dieser Tensor verschwindet für $n = 2$ und $n = 3$ stets, erst für $n \geqq 4$ spielt er eine Rolle. Sein Verschwinden ist eine notwendige (aber keine hinreichende) Bedingung dafür, daß die Mannigfaltigkeit sich winkeltreu auf eine Euklidische abbilden läßt.

§ 5. Skalare und tensorielle Dichten.

I. Im Situs-Raum.

Ist $\int \mathfrak{W} dx$ — ich schreibe kurz dx für das Integrationselement $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ — eine Integralinvariante, so ist $\mathfrak{W}$ eine Größe, die vom Koordinatensystem in der Weise abhängt, daß sie sich bei Übergang zu

einem andern Koordinatensystem mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante multipliziert. Fassen wir jenes Integral als Maß eines das Integrationsgebiet erfüllenden Substanzquantums auf, so ist $\mathfrak{W}$ dessen Dichte. Eine Größe der beschriebenen Art möge deshalb als *skalare Dichte* bezeichnet werden. Das ist ein wichtiger Begriff, der gleichberechtigt neben den des Skalars tritt und sich durchaus nicht auf ihn reduzieren läßt [13]). Eine Linearform einer oder mehrerer Verschiebungen und Kräfte, die vom Koordinatensystem in solcher Weise abhängt, daß sie bei Übergang zu einem andern sich mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante multipliziert, nennen wir analog eine *Tensor-Dichte*. Es ist gerechtfertigt, die Tensoren als *Intensitäts-*, die Tensordichten als *Quantitäts-Größen* zu bezeichnen. Die Ausdrücke kovariant und kontravariant werden wie für Tensoren verwendet. Der allgemeine Begriff der Tensordichte gehört der reinen Situsgeometrie an. Hingegen läßt sich in dieser Geometrie die Analysis der Tensordichten nur in einem analogen Umfange begründen wie die Analysis der Tensoren.

Einen Tensor hatten wir in § 2 linear genannt, wenn er kovariant ist und seine Komponenten der Forderung des Alternierens genügen. Eine Tensordichte wollen wir linear heißen, wenn sie kontravariant ist und alternierende Komponenten besitzt. Eine lineare Tensordichte 1. Stufe kann als „Stromstärke" aufgefaßt werden. Ist $\mathfrak{w}^i$ eine solche, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = \mathfrak{w} \tag{16}$$

eine mit ihr invariant verknüpfte skalare Dichte; ist $\mathfrak{w}^{ik}$ eine lineare Tensordichte 2. Stufe, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{w}^i \tag{17}$$

eine lineare Tensordichte 1. Stufe; usf. (16) beweist man in bekannter Weise, indem man zeigt, daß die linke Seite die zur Stromstärke $\mathfrak{w}^i$ gehörige Quellstärke darstellt. Daraus ergibt sich (17), indem man ein Kraftfeld $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ zu Hilfe nimmt, das aus einem Potential f entspringt, und die Divergenz von $\mathfrak{w}^{ik} f_i$ bildet:

$$\frac{\partial (\mathfrak{w}^{ik} f_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} \cdot f_i$$

usf.

---

[13]) Die Gegenüberstellung von Skalar und skalarer Dichte entspricht vollständig derjenigen von Funktion und Abelschem Differential in der Theorie der algebraischen Funktionen.

II. Im affin zusammenhängenden und im metrischen Raum.

In einer affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit kann man nicht nur von einer linearen, sondern von jedweder Tensordichte deren Divergenz bilden. — Ein Vektorfeld ξ^i werden wir in einem Punkte P stationär zu nennen haben, wenn die Vektoren ξ in den Nachbarpunkten P' von P durch Parallelverschiebung aus dem Vektor ξ in P hervorgehen, d. h. wenn in P die totalen Differentialgleichungen

$$d\xi^i + \Gamma^i_{rs}\xi^r dx_s = 0 \quad \left(\text{oder } \frac{\partial \xi^i}{\partial x_s} + \Gamma^i_{rs}\xi^r = 0\right)$$

bestehen. Offenbar gibt es solche in P stationäre Vektorfelder, welche dem Punkte P einen willkürlich vorgegebenen Vektor ξ zuordnen. Ein analoger Begriff ist für Kraftfelder aufzustellen. Will man nun z. B. die Divergenz einer gemischten Tensordichte $\mathfrak{w}^k_i$ 2. Stufe bilden, so nimmt man ein in P stationäres Vektorfeld ξ^i zu Hilfe und konstruiert von der Tensordichte $\xi^i \mathfrak{w}^k_i$ die Divergenz:

$$\frac{\partial(\xi^i \mathfrak{w}^k_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k}\mathfrak{w}^k_r + \xi^i \frac{\partial \mathfrak{w}^k_i}{\partial x_k} = \xi^i\left(-\Gamma^r_{ik}\mathfrak{w}^k_r + \frac{\partial \mathfrak{w}^k_i}{\partial x_k}\right).$$

Diese Größe ist eine skalare Dichte und demnach

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^k_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{is}\mathfrak{w}^s_r$$

eine kovariante Tensordichte 1. Stufe, die aus $\mathfrak{w}^k_i$ in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt.

Aber man kann nicht nur durch *Divergenzbildung* einer Tensordichte zu einer solchen von einer um 1 geringeren Stufenzahl herabsteigen, sondern auch durch *Differentiation* aus ihr eine Tensordichte bilden, deren Stufenzahl um 1 höher ist. Bedeutet $\mathfrak{s}$ zunächst eine skalare Dichte, die wir als Dichte einer die Mannigfaltigkeit erfüllenden Substanz auffassen und ist $dV = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ ein unendlich kleines Volumelement, so ist $\mathfrak{s}\, dV$ das dieses Element erfüllende Substanzquantum. Wir unterwerfen jetzt dV der infinitesimalen Verschiebung δ (mit den Komponenten δx_i) darunter verstehen wir einen Prozeß, bei welchem die einzelnen Punkte von dV infinitesimale Verschiebungen erfahren, die selbst durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Der Unterschied zwischen der Substanzquanten, welche dV und dieses durch Verschiebung aus dV entstehende Weltgebiet erfüllen, beträgt

$$(\delta\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\,\Gamma^r_{ir}\delta x_i)\,dV = (\delta\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\,\delta\gamma^r_r)\,dV.$$

Es sind also

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir}\mathfrak{s} \tag{18}$$

ie Komponenten einer kovarianten Tensordichte 1. Stufe, die in einer om Koordinatensystem unabhängigen Weise aus der skalaren Dichte $\mathfrak{z}$ ntspringt. Ihr Verschwinden an einer Stelle zeigt an, daß die Substanz aselbst gleichförmig verteilt ist. (18) kann übrigens in einer mehr rechnerischen Weise auch folgendermaßen hergeleitet werden. Man nehme ein n P stationäres Vektorfeld ξ^i zu Hilfe und bilde die Divergenz der tromstärke $\mathfrak{z}\xi^i$:

$$\frac{\partial(\mathfrak{z}\xi^i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_i}\xi^i + \mathfrak{z}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir}\mathfrak{z}\right)\xi^i.$$

Um die Differentiation von der skalaren auf eine beliebige Tensordichte, B. die gemischte $\mathfrak{w}^k_i$ von 2. Stufe auszudehnen, bedient man sich in un schon geläufiger Weise eines in P stationaren Vektorfeldes ξ^i und ines daselbst stationären Kraftfeldes η_i und differentiiert die skalare ichte $\mathfrak{w}^k_i \xi^i \eta_k$. Verjüngung der durch Differentiation entsprungenen Tensorichte nach dem Differentiationsindex und einem kontravarianten führt ur Divergenz zurück.

Die Analysis der Tensordichten ist demnach schon in der Affingeometrie vollendet. Was die *metrische* Geometrie neu liefert, ist lediglich folgende *Methode zur Erzeugung* von Tensordichten: man multipliziere inen beliebigen Tensor vom Gewichte $-\frac{n}{2}$ mit $\sqrt{g}$, wo g die Determiante der g_{ik} ist. — Beispiel: Die wirkliche Welt ist eine $(3+1)$-dimenionale Mannigfaltigkeit; g ist daher negativ und wir benutzen an seiner telle das positive $-g$. Aus dem kovarianten metrischen Wirbeltensor F_{ik}, er vom Gewichte 0 ist, erhalten wir den kontravarianten F^{ik} vom Gewichte -2 und daraus durch Multiplikation mit $\sqrt{-g}$ die Größen

$$\sqrt{-g}\,F^{ik} = \mathfrak{F}^{ik}.$$

Das sind also die Komponenten einer durch den Zustand des Äthers invariant bestimmten linearen Tensordichte 2. Stufe; sie wird als *metrische Wirbeldichte (elektromagnetische Felddichte)* zu bezeichnen sein.

19) $$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i$$

t daher eine Stromstärke (lineare Tensordichte 1. Stufe). In (19) haben ir das zweite System der Maxwellschen Gleichungen vor uns, das freich erst einen bestimmten Inhalt gewinnt, wenn der „*elektrische Strom*“ $\mathfrak{s}^i$ och in einer zweiten Weise durch den Zustand des Äthers ausgedrückt ird. Jedenfalls kann es aber nach unserer Deutung des elektromagneschen Feldes nur in einer vierdimensionalen Welt so etwas wie eine ektromagnetische Felddichte und einen elektrischen Strom geben. Das ber irgendein Weltgebiet zu erstreckende Integral von

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{4} F_{ik} \mathfrak{F}^{ik}$$

tritt in der Physik als die in diesem Gebiet enthaltene *elektromagnetische Wirkungsgröße* auf. Ihre Bedeutung beruht darauf, daß die unendlich kleine Änderung, welche sie bei einer infinitesimalen, an den Grenzen des Weltgebiets verschwindenden Variation δg_{ik}, $\delta \varphi_i$ des Ätherzustandes erfährt

$$= \int (\mathfrak{s}^i \delta \varphi_i + \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}^{ik} \delta g_{ik}) dx \qquad (\mathfrak{S}^{ki} = \mathfrak{S}^{ik})$$

ist, wo $\mathfrak{s}^i$ die durch (19) definierten Komponenten der Stromstärke sind und die gemischte Tensordichte 2. Stufe mit den Komponenten

$$\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{S} \delta_i^k - F_{ir} \mathfrak{F}^{kr}$$

die *Energie-Impulsdichte* des elektromagnetischen Feldes darstellt. *Die Existenz aller dieser Größen ist durchaus an die Dimensionszahl 4 gebunden. Zum erstenmal läßt die hier befürwortete Deutung der physikalischen Erscheinungen einen vernünftigen Grund dafür erkennen, daß die Welt vierdimensional ist.*

$$\Delta \varphi = F_{ik} dx_i \delta x_k$$

ist die „Spur" jener Transformation

$$\Delta \mathsf{P} = \mathsf{P}_{ik} dx_i \delta x_k,$$

welche als Krümmung auftrat. Nach dem Muster von $\mathfrak{S}$ können wir die Transformation bilden

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{-g}\, \mathsf{P}_{ik} \mathsf{P}^{ik}$$

(wobei die Multiplikation als Zusammensetzung zu deuten ist). Die Spur $\mathfrak{M}$ derselben ist eine skalare Dichte, die gleichberechtigt neben $\mathfrak{S}$ tritt.

III. Die Wirkungsgröße und ihre Variation.

Wir kehren zur reinen Mathematik zurück. Ist $\mathfrak{W}$ irgendeine durch den Zustand des Äthers (unabhängig vom Koordinatensystem) eindeutig bestimmte skalare Dichte, so wollen wir (nach dem Vorbild der Maxwellschen Theorie) die Integralinvariante $\int \mathfrak{W} dx$ als die in dem Integrationsgebiet enthaltene *Wirkungsgröße* bezeichnen. Bei einer beliebigen Variation des Ätherzustandes von der eben geschilderten Art werde

$$\delta \int \mathfrak{W} dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta \varphi_i + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik}) dx \qquad (\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}) \tag{20}$$

gesetzt. $\mathfrak{w}^i$ sind die Komponenten einer kontravarianten, $\mathfrak{W}_i^k$ die einer gemischten Tensordichte der 1. bzw. 2. Stufe. *Zwischen diesen „Lagrangeschen Ableitungen" der Wirkungsfunktion $\mathfrak{W}$ bestehen $n+1$ Identitäten, die aus der Invarianz der Wirkungsgröße entspringen.* Zunächst muß Invarianz statthaben, wenn man g_{ik} durch λg_{ik} und gleichzeitig φ durch

$\dots - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ ersetzt; nehmen wir darin für λ eine unendlich wenig von 1 bweichende Größe $1 + \delta\lambda$, so muß demnach (20) verschwinden für

$$\delta g_{ik} = g_{ik}\,\delta\lambda, \qquad \delta\varphi_i = -\frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial x_i}.$$

Das ergibt die erste jener $n+1$ Identitäten:

21) $$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i = 0.}$$

Zweitens nutzen wir die Invarianz der Wirkungsgröße gegenüber Koordinatentransformation durch eine infinitesimale Deformation des Äthers aus[14]). Wir verschieben die Ätherstelle $P = (x_i)$ nach $\overline{P} = (\bar{x}_i)$. Dabei möge aber die Verschiebung $P\overline{P}$ an der Grenze des betrachteten Gebiets verschwinden, so daß dieses Gebiet nach der Verschiebung von demselben Ätherquantum erfüllt ist. In einem zweiten Koordinatensystem schreiben wir dem Punkte $\overline{P}$ die Koordinaten x_i zu. Verschieben wir den Äther ohne Änderung seines Zustandes, so wird nach der Verschiebung in diesen neuen Koordinaten die Metrik an der Stelle $\overline{P}$ durch

$$g_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k \quad \text{und} \quad \varphi_i(x)\,dx_i$$

festgelegt sein, oder, wenn wir auf die alten Koordinaten zurücktransformieren, durch

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x})\,d\bar{x}_i\,d\bar{x}_k \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_i(\bar{x})\,d\bar{x}_i;$$

also an der Stelle P durch

$$\bar{g}_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_i(x)\,dx_i.$$

Für den so erhaltenen Zustand des Äthers muß die Wirkungsgröße wegen ihrer Invarianz den gleichen Wert besitzen wie für den ursprünglichen. Ist jene Deformation infinitesimal: $\bar{x}_i = x_i + \delta x_i$, so ergibt sich

$$\delta g_{ik} = \bar{g}_{ik}(x) - g_{ik}(x) = -\left\{ g_{ir}\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_k} + g_{kr}\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\delta x_r \right\},$$

$$\delta\varphi_i = \bar{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x) = -\left\{ \varphi_r\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\delta x_r \right\}.$$

Für diese Variation muß (20) verschwinden. Beseitigt man die Ableitungen der Verrückungskomponenten δx_i durch partielle Integration, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{ \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i}\mathfrak{W}^{rs} \right\} + \left\{ \frac{\partial(\mathfrak{w}^k \varphi_i)}{\partial x_k} - \mathfrak{w}_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right\} = 0.$$

---

[14]) Weyl, Ann. d. Physik Bd. 54 (1917), S. 117 (§ 2); F. Klein, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Kl., Sitzung v. 25. Jan. 1918.

Benutzen wir (21), so finden wir für den zweiten der beiden durch die geschweifte Klammer zusammengefaßten Teile

$$-\tfrac{1}{2}\, g_{rs}\varphi_i \cdot \mathfrak{W}^{rs} + F_{ik}\mathfrak{w}^k.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} + g_{rs}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{rs} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{r,\,is} + \Gamma_{s,\,ir})\,\mathfrak{W}^{rs}$$

wegen der Symmetrie von $\mathfrak{W}^{rs}$

$$= \Gamma_{r,\,is}\,\mathfrak{W}^{rs} = \Gamma^r_{is}\,\mathfrak{W}^s_r.$$

Damit nehmen die Gleichungen schließlich die folgende Gestalt an, in der ihr invarianter Charakter zutage tritt:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}^k_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{is}\,\mathfrak{W}^s_r\right) + F_{ik}\mathfrak{w}^k = 0. \tag{22}$$

IV. Überleitung zur Physik.

In einer metrischen Mannigfaltigkeit, deren Äther sich im Zustand extremaler Wirkung befindet, so daß also für jedes Weltgebiet bei beliebiger, an den Grenzen verschwindender infinitesimaler Variation der φ_i und g_{ik}

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = 0 \tag{23}$$

ist, gelten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathfrak{w}^i = 0, \qquad \mathfrak{W}^k_i = 0. \tag{24}$$

In der Physik werden die ersten als die *elektromagnetischen*, die zweiten als die *Gravitationsgesetze* bezeichnet. Wie die Mechanik, mündet auch die Physik in einem Hamiltonschen Prinzip[15]): *die wirkliche Welt ist eine solche, deren Äther sich im Zustand extremaler Wirkung befindet.* Wir kennen die in ihr gültigen, durch das Hamiltonsche Prinzip (23) zusammengefaßten Naturgesetze, wenn wir die Wirkungsdichte $\mathfrak{W}$ in ihrer Abhängigkeit vom Zustande des Äthers kennen. Die Gleichungen (24) sind nicht unabhängig voneinander, sondern zwischen ihnen bestehen die fünf ($n = 4$) Identitäten (21), (22). In der Tat können ja durch die Gesetze (24) die Größen g_{ik}, φ_i nur so weit bestimmt sein, daß der Übergang von einem Bezugssystem zu einem beliebigen andern noch frei bleibt; ein solcher Übergang hängt aber von fünf willkürlichen Funktionen ab. Das Verschwinden der aus den linken Seiten der elektromagnetischen

---

[15]) Vgl. dazu G. Mie, Annalen der Physik, Bd. 37, 39. 40 (1912/13), oder die Darstellung der Mieschen Theorie in RZM § 25; D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik (1. Mitteilung), Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Sitzung vom 20. Nov. 1915.

Gleichungen gebildeten Divergenz $\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}$ ist also eine Folge der Gravitationsgesetze und umgekehrt das Verschwinden von deren Divergenz

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma_{is}^r \mathfrak{W}_r^s$$

eine Folge der elektromagnetischen. Jene fünf Identitäten stehen in engstem Zusammenhang mit den sog. *Erhaltungssätzen*, nämlich dem (einkomponentigen) Satz von der Erhaltung der Elektrizität und dem (vierkomponentigen) Energie-Impulsprinzip. Sie lehren nämlich: die Erhaltungssätze (auf deren Gültigkeit die *Mechanik* beruht) folgen auf doppelte Weise aus den elektromagnetischen sowie den Gravitationsgleichungen; man möchte sie daher als die gemeinsame Eliminante dieser beiden Gesetzesgruppen bezeichnen.

Der einzige Ansatz für die Wirkungsdichte in der $(3+1)$-dimensionalen Welt, den man vernünftigerweise in Betracht zu ziehen hat, ist der folgende

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{M} + \alpha \mathfrak{S},$$

wobei α eine numerische Konstante ist und die Bedeutung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ aus Abschnitt II dieses Paragraphen zu entnehmen ist. Man sieht, wie eng der Spielraum ist, welcher durch unsere Theorie dem Weltgesetz gelassen wird. Als erste Approximation, bei Beschränkung auf die linearen Glieder, ergeben sich dann in der Tat aus dem Hamiltonschen Prinzip die Maxwellschen Gesetze des elektromagnetischen Feldes und das Newtonsche Gravitationsgesetz. Darin, daß die Wirkungsgröße eine reine Zahl ist, liegt die Möglichkeit eines *Wirkungsquantums* begründet, dessen Existenz nach der heutigen Physik als die fundamentale atomistische Struktur des Kosmos anzusehen ist.

Doch werde hier, wo es sich nur um die systematische Entwicklung der reinen Infinitesimalgeometrie handelt und der mit ihr verbundenen Analysis der Tensoren und Tensordichten, auf die physikalische Ausdeutung der Theorie nicht näher eingegangen. Heben wir noch einmal jene Punkte hervor, in denen diese über das bisher Vorliegende hinausgeht! Das sind: der stufenweise Aufbau in den drei Stockwerken der Situs-, Affin- und metrischen Geometrie, die Befreiung der letzteren von einer ihr in der Riemannschen Fassung noch anhaftenden ferngeometrischen Inkonsequenz und die Ergänzung der Lehre von den Tensoren (Intensitätsgrößen) durch ihr Gegenstück, die Lehre von den Tensordichten (oder Quantitätsgrößen).

(Eingegangen am 8. Juni 1918.)

Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche.

Von

P. Epstein in Straßburg i. E.

§ 1.

Unter dem *Möbiuskettenbruch*[1]) (abgekürzt $\mathfrak{MK}$) für eine reelle Zahl ω verstehen wir die Entwicklung

$$\omega = k - \frac{1}{k_1 - \frac{1}{k_2 - \ddots}},$$

worin k die kleinste ganze Zahl $> \omega$ ist und $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ganze Zahlen $\geqq 2$ bedeuten. Wir bezeichnen einen solchen Kettenbruch durch

$$\omega = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, k_3, \ldots) \tag{1}$$

und nennen ihn einen eigentlichen $\mathfrak{MK}$. Daneben werden wir auch uneigentliche $\mathfrak{MK}$ betrachten, bei denen einzelne der Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots = 1$ sind. Sie lassen sich immer in eigentliche $\mathfrak{MK}$ verwandeln mit Hilfe der folgenden leicht abzuleitenden Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}(\ldots a, 1, b, c, \ldots) = \mathfrak{M}(\ldots a-1, b-1, c, \ldots), \\ \mathfrak{M}(\ldots a, 1, 1, b, c, \ldots) = \mathfrak{M}(\ldots a+b-1, c, \ldots), \\ \mathfrak{M}(\ldots a, 1, 1, 1, b, c, \ldots) = \mathfrak{M}(\ldots a, b, c, \ldots). \end{cases}$$

Man erhält den eigentlichen $\mathfrak{MK}$ für die Zahl ω durch den Algorithmus

$$\omega = k - \frac{1}{\omega_1}, \qquad \omega_1 = k_1 - \frac{1}{\omega_2}, \qquad \omega_2 = k_2 - \frac{1}{\omega_3}, \quad \ldots.$$

Hierbei ist k_i die kleinste ganze Zahl $\geqq \omega_i$ und die vollständigen Quotienten ω_i sind sämtlich > 1.

Ist $\omega = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so wird der $\mathfrak{MK}$ durch einen *Euklidischen Algorithmus* mit lauter negativen Resten erhalten, d. h. durch eine Kette von Gleichungen

[1]) Möbius, Werke, Bd. 4, S. 505. Perron (Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 168) nennt diese Kettenbrüche reduziert-regelmäßig.

$$(3)\qquad \begin{cases} a = kb - r_1, & 0 < r_1 < b \\ b = k_1 r_1 - r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = k_2 r_2 - r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots \\ r_{m-1} = k_m r_m, \end{cases}$$

und es wird

$$\frac{a}{b} = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_m).$$

Für die letzte Gleichung in (3) kann man auch $r_{m-1} = (k_m + 1) r_m - r_m$, dann beliebig oft die Gleichung $r_m = 2r_m - r_m$ und schließlich $r_m = 1 \cdot r_m$ schreiben, also folgt[2]):

Für das letzte Element k_m eines endlichen $\mathfrak{MK}$ kann man auch

$$k_m + 1, 2, 2, 2, \ldots, 2, 1$$

mit beliebig vielen Teilquotienten 2 setzen. Der Kettenbruch wird dann ein uneigentlicher $\mathfrak{MK}$.

Eine irrationale Zahl ω besitzt immer eine unendliche $\mathfrak{MK}$-Entwicklung und umgekehrt stellt jeder unendliche $\mathfrak{MK}$ eine irrationale Zahl vor *mit Ausnahme der $\mathfrak{MK}$, welche mit einer unendlichen Folge von Teilquotienten 2 schließen.* Diese konvergieren gegen rationale Grenzwerte und es ist

$$\mathfrak{M}(2, 2, 2, \ldots) = 1,$$

$$\mathfrak{M}(k, k_1, \ldots, k_m, 2, 2, 2, \ldots) = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_m - 1).$$

Dies sind uneigentliche unendliche $\mathfrak{MK}$.

Die Näherungsbrüche $\frac{P_i}{Q_i}$ eines $\mathfrak{MK}$ werden mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(4)\qquad \begin{cases} P_{i+1} = k_i P_i - P_{i-1}; & P_0 = 1, \; P_1 = k \\ Q_{i+1} = k_i Q_i - Q_{i-1}; & Q_0 = 0, \; Q_1 = 1 \end{cases}$$

berechnet und für je zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche besteht die Beziehung

$$(5)\qquad P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = -1.$$

Ist ω_i ein vollständiger Quotient in der $\mathfrak{MK}$-Entwicklung von ω, also

$$\omega = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, \omega_i),$$

so ist

$$(6)\qquad \omega = \frac{P_i \omega_i - P_{i-1}}{Q_i \omega_i - Q_{i-1}},$$

[2]) Vgl. Fueter, Über unimodulare lineare Substitutionen, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. 21 (1910), S. 97.

es sind also ω und ω_i miteinander verknüpft durch die *eigentliche* lineare Substitution [3])

$$\begin{pmatrix} P_i, -P_{i-1} \\ Q_i, -Q_{i-1} \end{pmatrix} = S^k T S^{k_1} T \dots S^{k_{i-1}} T,$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

§ 2.

Neben dem $\mathfrak{MR}$ betrachten wir den gewöhnlichen *regulären Kettenbruch* für eine Zahl ω, den wir durch

$$\omega = \mathfrak{R}(q, q_1, q_2, q_3, \dots)$$

bezeichnen. Er läßt sich leicht in einen $\mathfrak{MR}$ verwandeln [4]). Der $\mathfrak{MR}$ mit dem vollständigen Quotienten x:

$$\mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \dots, k_m, x)$$

ist gleichbedeutend mit der linearen Substitution

$$S^k T S^{k_1} T \dots S^{k_m} T(x).$$

Für $x = \infty$ bedeutet dies den mit k_m schließenden endlichen $\mathfrak{MR}$.

Nun ist der reguläre Kettenbruch mit einer geraden Anzahl von Teilnennern q_i und dem vollständigen Quotienten x:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(q, q_1, q_2, \dots, q_n, x) &= \mathfrak{M}(q, -q_1, q_2, -q_3, \dots, q_{n-1}, -q_n, x) \\ &= S^q T S^{-q_1} T S^{q_2} T S^{-q_3} T \dots S^{-q_n} T(x). \end{aligned}$$

Aus der zwischen S und T bestehenden Beziehung

$$STSTST = 1$$

zusammen mit

$$T^2 = 1$$

findet man leicht

$$S^{-m} = TS^{\cdot}T(S^2T)^{m-1}ST, \tag{8}$$

folglich wird

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}(q, q_1, \dots, q_n, x) \\ &= S^{q+1}T(S^2T)^{q_1-1}S^{q_2+2}T(S^2T)^{q_3-1}\dots S^{q_{n-1}+2}T(S^2T)^{q_n-1}(x+1). \end{aligned} \tag{9}$$

---

[3]) Dabei werden die Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ als wesentlich identisch angesehen.

[4]) Ein Verfahren zur Verwandlung der halbregelmäßigen Kettenbrüche, zu denen die $\mathfrak{MR}$ gehören, in reguläre Kettenbrüche findet sich bereits in dem Handbuch von Perron, § 37. Es kann natürlich ebenfalls zur Herleitung unserer Formel (10) benutzt werden.

Hierin ist die Verwandlung des regulären Kettenbruchs in einen $\mathfrak{MK}$ enthalten. Um sie übersichtlich schreiben zu können, bezeichnen wir zur Abkürzung einen *Komplex von ν aufeinanderfolgenden Teilnennern* 2 in einem $\mathfrak{MK}$ mit $[2]_\nu$ und nennen ihn einen ν-gliedrigen *Zweierkomplex*. Nehmen wir nun $x = \infty$, so haben wir den Satz:

Der Zusammenhang zwischen einem regulären Kettenbruch und dem zugehörigen $\mathfrak{MK}$ ist durch die Formel gegeben (n ungerade):

$$(10) \qquad \mathfrak{K}(q, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$= \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots, q_{n-1}+2, [2]_{q_n-1}).$$

Da man die Gliederzahl in einem regulären Kettenbruch nach Belieben gerade oder ungerade machen kann, so ist eine weitere Formel für einen regulären Kettenbruch mit ungerader Gliederzahl, die sich leicht aufstellen ließe, nicht erforderlich.

Diese Formel bleibt bestehen, auch wenn einige der Zahlen $q_1, q_3, q_5, \ldots$ gleich 1 sind. Man sieht sofort:

Sobald eine Zahl q_i mit ungeradem Index gleich 1 *ist, fehlt in dem $\mathfrak{MK}$ der entsprechende Zweierkomplex und es folgen die Elemente $q_{i-1}+2$ und $q_{i+1}+2$ aufeinander.*

So ist z. B.

$$\mathfrak{K}(2, 3, 1, 1, 5, 1, 4) = \mathfrak{K}(2, 3, 1, 1, 5, 1, 3, 1) = \mathfrak{M}(3, 2, 2, 3, 7, 5).$$

Ferner aber bleibt Formel (10) auch für *unendliche Kettenbrüche* bestehen, da sie für jeden Näherungsbruch gilt, d. h. es ist

$$(11) \quad \mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots) = \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots).$$

So ist z. B. der Kettenbruch für die Zahl e[5])

$$\mathfrak{K}(2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots)$$
$$= \mathfrak{M}(3, 4, 3, [2]_3, 3, 8, 3, [2]_7, 3, 12, 3, [2]_{11}, \ldots).$$

Umgekehrt kann man mit Hilfe von Formel (10) einen $\mathfrak{MK}$ in einen regulären Kettenbruch verwandeln. Schreibt man, was immer möglich ist, einen allgemeinen $\mathfrak{MK}$ in der Form

$$\mathfrak{M}(k, [2]_{k_1}, k_2, [2]_{k_3}, k_4, \ldots, [2]_{k_n}),$$

worin die ganzen Zahlen $k_2, k_4, k_6, \ldots$ sämtlich > 2 sind[6]), während von den Zahlen $k_1, k_3, k_5, \ldots$ einige (oder alle) Null sein können, so ist

---

[5]) Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S 134.

[6]) Das Anfangselement k kann eine beliebige ganze Zahl, auch $= 2$ sein, d. h. ein Anfangselement 2 ist nicht mit etwa darauffolgenden Elementen 2 zu einem Zweierkomplex zu vereinigen.

$$(12)\qquad \begin{aligned}&\mathfrak{M}(k, [2]_{k_1}, k_2, [2]_{k_3}, \ldots, [2]_{k_n})\\ &= \mathfrak{K}(k-1, k_1+1, k_2-2, k_3+1, k_4-2, \ldots, k_n+1).\end{aligned}$$

Die regulären Kettenbrüche für zwei *reziproke Zahlen* besitzen dieselben Teilnenner[7]), nämlich

$$\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots) \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}(0, q, q_1, q_2, q_3, \ldots).$$

Dagegen sind ihre $\mathfrak{MK}$-Entwicklungen gänzlich voneinander verschieden; sie sind

$$(13\,a)\qquad \omega = \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots)$$

und

$$(13\,b)\qquad \frac{1}{\omega} = \mathfrak{M}(1, [2]_{q-1}, q_1+2, [2]_{q_2-1}, q_3+2, \ldots).$$

So ist z. B.

$$\frac{509}{228} = \mathfrak{M}(3, 2, 2, 3, 7, 5),$$
$$\frac{223}{509} = \mathfrak{M}(1, 2, 5, 3, [2]_4, 3, [2]_3).$$

Wir beweisen den Satz:

Der $\mathfrak{MK}$ für $-\omega$ stimmt von einer gewissen Stelle an mit dem $\mathfrak{MK}$ für $\frac{1}{\omega}$ überein.

Sei nämlich

$$\frac{1}{\omega} = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, k_3, \ldots),$$

so ist

$$-\omega = -\frac{1}{1/\omega} = \mathfrak{M}(0, k, k_1, k_2, \ldots).$$

Dies ist ein eigentlicher $\mathfrak{MK}$, sobald $0 < \omega < 1$ ist, denn alsdann ist $k > 1$. Ist aber $\omega > 1$, so ist $k = 1$ und der $\mathfrak{MK}$ für $-\omega$ ist ein uneigentlicher $\mathfrak{MK}$. Sei $q < \omega < q+1$, so hat der $\mathfrak{MK}$ für $\frac{1}{\omega}$ die Gestalt (13 b) und es wird

$$-\omega = \mathfrak{M}(0, 1, [2]_{q-1}, q_1+2, \ldots)$$

oder mit wiederholter Anwendung von Formel (2)

$$(14)\qquad \begin{aligned}-\omega &= \mathfrak{M}(-1, 1, [2]_{q-2}, q_1+2, \ldots)\\ &= \mathfrak{M}(-2, 1, [2]_{q-3}, q_1+2, \ldots)\\ &\vdots\\ &= \mathfrak{M}(-(q-1), 1, q_1+2, [2]_{q_2-1}, \ldots)\\ &= \mathfrak{M}(-q, q_1+1, [2]_{q_2-1}, q_3+2, \ldots).\end{aligned}$$

[7]) Für negative Zahlen gilt dies erst von einer bestimmten Stelle der beiden Kettenbrüche ab, z. B.

$$-\frac{187}{73} = \mathfrak{K}(-3, 2, 3, 1, 1, 4); \qquad -\frac{73}{187} = \mathfrak{K}(-1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 4).$$

Damit ist aber der obige Satz bewiesen. Aus (13 b) und (14) ergibt sich die folgende Formel, die wir noch zu benutzen haben werden:

Es ist für jeden eigentlichen $\mathfrak{MR}$ *mit einem negativen Anfangselement*:

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots) = -\frac{1}{\mathfrak{M}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots)}. \tag{15}$$

§ 3.

Die gegenseitigen Beziehungen der regulären und der Möbiuskettenbrüche werden besonders durchsichtig, wenn man noch die Theorie der *Elementarkettenbrüche*[8]) heranzieht. Der Elementarkettenbruch (abgekürzt $\mathfrak{ER}$) für eine reelle Zahl ω beruht auf dem Algorithmus

$$\omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|}, \qquad \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \quad \ldots$$

Ist eine der Zahlen $\omega_i < 1$, so folgt auf sie eine Zahl $\omega_{i+1} > 1$. Man kann daher die Zahlen ω_i in Abschnitte

$$\begin{array}{llll} \omega, & \omega_1, & \omega_2, \ldots & \omega_{\alpha-1}, \\ \omega_\alpha, & \omega_{\alpha+1}, & \omega_{\alpha+2}, \ldots & \omega_{\alpha+\beta-1}, \\ \omega_{\alpha+\beta}, & \omega_{\alpha+\beta+1}, & \omega_{\alpha+\beta+2}, \ldots & \omega_{\alpha+\beta+\gamma-1}, \\ \vdots & & & \end{array}$$

derart unterbringen, daß die letzte Zahl in jedem Abschnitt < 1, alle übrigen Zahlen > 1 sind. Ist die gegebene Zahl positiv, aber < 1, so bildet sie für sich den ersten Abschnitt, alle folgenden Abschnitte enthalten mindestens zwei Zahlen, d. h. es ist bei einer positiven Zahl ω immer

$$\alpha \geqq 1, \qquad \beta, \gamma, \delta, \ldots > 1.$$

Ist ω negativ, so ist $0 < \omega_1 < 1$; es bilden dann ω und ω_1 für sich die beiden ersten Abschnitte, d. h. es ist bei einer negativen Zahl ω immer

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots > 1.$$

Ist ω eine rationale Zahl, so gelangt man immer zu einer Zahl $\omega_i = \frac{1}{2}$ als Schlußzahl eines Abschnitts; mit dieser brechen wir den Algorithmus ab. Bei einer irrationalen Zahl ω ist der Algorithmus unbegrenzt.

Auf Grund dieses Algorithmus erhält man für ω einen Kettenbruch von der Form

$$\omega = \underbrace{1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots + \frac{1|}{|1}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots + \frac{1|}{|1}}_{\beta} - \underbrace{\frac{1|}{|1} + \ldots + \frac{1|}{|1}}_{\gamma} - \frac{1|}{|1} + \ldots$$

[8]) Die Theorie dieser Kettenbrüche und ihre Anwendungen auf lineare Substitutionen und quadratische Formen habe ich ausführlich in zwei Arbeiten dargestellt, die in Crelles Journal, Bd. 148, erscheinen werden. Sie werden im folgenden kurz als $\mathfrak{ER}$ I und $\mathfrak{ER}$ II angeführt.

Ein solcher Kettenbruch, bei dem *alle Teilnenner* $= 1$, *alle Teilzähler* $= \pm 1$ sind und niemals zwei negative Teilzähler unmittelbar aufeinander folgen (außer wenn ω negativ ist, wo dann die beiden ersten Teilzähler -1 sind[9]), heißt ein *Elementarkettenbruch*. Er ist durch die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ völlig bestimmt; wir nennen sie die *Abschnitte* des $\mathfrak{EK}$ und bezeichnen ihn mit

$$\mathfrak{E}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Jede rationale Zahl läßt sich durch einen endlichen, jede irrationale Zahl durch einen unendlichen konvergenten $\mathfrak{EK}$ darstellen[10]). Die Näherungsbrüche des $\mathfrak{EK}$ stimmen mit den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen des regulären Kettenbruchs, also auch des $\mathfrak{MK}$ überein.

Zu jedem $\mathfrak{EK}$ gehört eine *Indexkette*, die Elementarindexkette ($\mathfrak{EJ}$). Sie besteht aus einer Folge von *abwechselnden* $+$- und $-$-Zeichen, mit $-$ beginnend, welche durch Trennungsstriche in Abschnitte geteilt ist, so daß im ersten Abschnitt α Zeichen, in den folgenden Abschnitten $\beta - 1$, $\gamma - 1$, $\delta - 1, \ldots$ Zeichen stehen.

Entsprechend gehört zu einem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots)$ eine *Charakteristik*[11]), bestehend aus Abschnitten von *untereinander gleichen* Zeichen, so daß der 1., 3., 5., ... Abschnitt aus q, q_2, q_4, ... Minuszeichen, der 2., 4., 6., ... Abschnitt aus q_1, q_3, q_5, ... Pluszeichen gebildet ist. Ist $q = 0$, so fehlt der entsprechende Abschnitt, und umgekehrt gehört zu einer mit einem Plusabschnitt beginnenden Charakteristik ein Kettenbruch mit dem Anfangselement 0. Kehrt man alle Vorzeichen in der Charakteristik um, so erhält man die reziproke Charakteristik. Die zu beiden Charakteristiken gehörigen Kettenbrüche sind reziprok.

Einem Möbiuskettenbruch $\mathfrak{M}(a, b, c, d, \ldots)$ ordnen wir wiederum eine Indexkette, die *Möbiusindexkette* ($\mathfrak{MJ}$) zu, die genau so wie die $\mathfrak{EJ}$ aus *abwechselnden* $+$- und $-$-Zeichen, mit $-$ beginnend, besteht und im ersten Abschnitt a Zeichen, in den folgenden Abschnitten $b-1$, $c-1$, $d-1, \ldots$ Zeichen aufweist.

Von der $\mathfrak{EJ}$ geht man, wie in $\mathfrak{EK}$ I, § 2 gezeigt ist, ganz einfach zur Charakteristik in der Weise über, daß man jedes Vorzeichen am Ende eines Abschnitts umkehrt. Damit ist gleichzeitig ein $\mathfrak{EK}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch verwandelt. Umgekehrt erhält man aus der Charakteristik die zugehörige Indexkette, indem man unter die Charakteristik eine ebenso lange Reihe von abwechselnden Vorzeichen $- + - + \ldots$ schreibt

---

[9]) Wo nichts anderes bemerkt ist, nehmen wir im folgenden immer ω als *positiv* an.

[10]) Das Umgekehrte ist nicht richtig. Die mit 3, 3, 3, ... endigenden $\mathfrak{EK}$ konvergieren entweder gegen einen rationalen Wert oder sie divergieren. Hierüber, sowie über den Begriff der Konvergenz eines $\mathfrak{EK}$ vgl. $\mathfrak{EK}$ I, § 3.

[11]) Vgl. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 44 (1894), S. 417.

und hinter jedes Vorzeichen, welches von dem darüberstehenden verschieden ist, einen Trennungsstrich setzt.

Läßt man in einer Indexkette die Trennungsstriche fort und setzt dafür neue Trennungsstriche, wo bisher keine waren, so erhält man die *reziproke Indexkette.* (ℭℜ I, § 2.) *Die reziproke* ℭℑ *gehört zum reziproken* ℭℜ. Wir ordnen nun auch einer Charakteristik eine neue Charakteristik zu, die wir die *assoziierte Charakteristik* nennen, indem wir festsetzen:

Wo die eine Charakteristik einen Zeichenwechsel hat, hat die assoziierte Charakteristik eine Zeichenfolge und umgekehrt.

Die Beziehung zwischen beiden Charakteristiken ist gegenseitig; jede ist zur andern assoziiert. So sind z. B.

(16)
$$\begin{array}{l} - - - - + + - + + + + - + - - - \\ - + - + + - - - + - + + + + - + \end{array}$$

assoziierte Charakteristiken; ihnen entsprechen die assoziierten regulären Kettenbrüche $\mathfrak{K}\,(4, 2, 1, 4, 1, 1, 3)$ und $\mathfrak{K}\,(1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 1)$.

Zu der assoziierten Charakteristik gehört wiederum eine bestimmte Indexkette. Die beiden zu assoziierten Charakteristiken gehörigen Indexketten heißen *assoziierte Indexketten.* Zu den obigen Charakteristiken gehören die assoziierten Indexketten:

(17)
$$\begin{array}{l} - + | - + | - | + - + - | + - | + | - | + | - + \\ - + - + - | + | - + | - | + | - | + - | + - + \end{array}$$

Es seien nun in dem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}\,(q, q_1, q_2, q_3, \ldots)$ alle Teilnenner vom zweiten ab > 1. Bildet man die Charakteristik und ihre assoziierte Charakteristik, so überzeugt man sich leicht, *daß die zur assoziierten Charakteristik gehörige Indexkette gerade die Indexkette des Möbiuskettenbruchs in Formel* (10) *ist,* und dieses bleibt auch bestehen, wenn einige der Teilnenner des regulären Kettenbruchs $= 1$ sind. Es gilt also der Satz:

1. *Die zur assoziierten Charakteristik gehörige Indexkette ist die Möbiusindexkette.*

Oder, was dasselbe bedeutet:

2. *Ein Elementarkettenbruch und der ihm gleiche Möbiuskettenbruch haben assoziierte Indexketten.*

Es zeigt sich hier eine merkwürdige Reziprozität zwischen ℭℜ und $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$, die noch deutlicher in dem folgenden Satz zum Ausdruck kommt:

3. *Ist*

$$\mathfrak{E}\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots) = \mathfrak{M}\,(a, b, c, d, \ldots),$$

so ist

$$\mathfrak{E}(a, b, c, d, \ldots) = \mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots).$$

So ersieht man aus den Charakteristiken (16) und den zugehörigen Indexketten (17) die Gleichheit der folgenden Kettenbrüche:

$$\mathfrak{K}(4, 2, 1, 4, 1, 1, 3) = \mathfrak{E}(2, 3, 2, 5, 3, 2, 2, 2, 3) = \mathfrak{M}(5, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 4),$$
$$\mathfrak{K}(1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 1) = \mathfrak{E}(5, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 4) = \mathfrak{M}(2, 3, 2, 5, 3, 2, 2, 2, 3).$$

Der erste Kettenbruch hat den Wert $\frac{479}{110}$, der zweite den Wert $\frac{628}{895}$.

So kann man mit Hilfe der assoziierten Charakteristiken und Indexketten sehr einfach die drei Kettenbrucharten ineinander überführen.

Die assoziierten Charakteristiken und die zugehörigen Indexketten sind gleichlang. Nennen wir in einem endlichen $\mathfrak{EK}$ $\mathfrak{E}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu)$ die Summe $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu = \lambda$ die *Länge*, μ die *Ordnung* und entsprechend in dem gleichwertigen $\mathfrak{MK}$ $\mathfrak{M}(a, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ebenfalls $a + a_1 + \ldots + a_m = l$ die Länge, m die Ordnung, und ist $\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, \ldots q_n)$ der den beiden Kettenbrüchen gleiche reguläre Kettenbruch, so ist[12])

$$\lambda - \mu = l - m = q + q_1 + q_2 + \ldots + q_n, \tag{18}$$

Diese für jeden der drei Kettenbrüche gleiche Zahl möge der *Rang* ϱ des Kettenbruchs und der durch ihn dargestellten rationalen Zahl heißen.

Aus Satz 3 ergibt sich, daß *zu reziproken Indexketten auch reziproke* $\mathfrak{MK}$ gehören und daß zwischen den Längen und Ordnungen von reziproken $\mathfrak{MK}$ dieselben Beziehungen wie bei reziproken $\mathfrak{EK}$ ($\mathfrak{EK}$ I, § 2) bestehen. Sind l', m' Länge und Ordnung des reziproken $\mathfrak{MK}$, so haben zunächst beide $\mathfrak{MK}$ gleichen Rang, weil ihre Indexketten gleich lang sind, also

$$l - m = l' - m' = \varrho.$$

Ferner ist die Summe der Ordnungen gleich der Anzahl der Trennungsstriche in den beiden reziproken Indexketten, also

$$m + m' = \varrho - 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$l + l' = 3\varrho - 1$$

und

$$l' = 2l - 3m - 1, \qquad m' = l - 2m - 1. \tag{19}$$

§ 4.

Die Theorie der Elementarkettenbrüche führt zu einer Einteilung der ganzzahligen linearen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ von der Determinante ± 1 in

[12]) Der auf den $\mathfrak{MK}$ bezügliche Teil dieses Satzes ist ein besonderer Fall eines Satzes von Herrn Vahlen (Crelles Journ., Bd. 115 (1895), S. 226).

wei Arten, in *gerade* und *ungerade* Substitutionen[13]). Die geraden Substitutionen sind am einfachsten dadurch gekennzeichnet[14]), daß sie mod 2 iner der drei Substitutionen

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

ongruent sind, d. h. entweder α, δ ungerade, β, γ gerade oder α, β, γ ngerade oder β, γ, δ ungerade. Alle anderen Substitutionen, die also nod 2 den Substitutionen

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

ongruent sind, sind ungerade Substitutionen.

Sei G die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ der Determiante ± 1. Die Gesamtheit der *geraden* Substitutionen bildet eine *Untergruppe* von G vom Index 2. Sie wird mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet und ist isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{A}$ der *eigentlichen* Substitutionen. Das Produkt von 2 geraden oder von 2 ungeraden Substitutionen ergibt eine gerade Substitution, eine gerade mit einer ungeraden Substitution ergibt eine ungerade Substitution.

Zwei irrationale Zahlen ω, ω', die durch eine Substitution der Gruppe G miteinander verknüpft sind, so daß

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = \pm 1 = \varepsilon$$

st, heißen äquivalent und es besteht der bekannte Satz:

4. *Die regulären Kettenbruchentwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen von einer gewissen Stelle an überein.*

Die beiden Zahlen ω und ω' sind entweder eigentlich oder uneigentlich äquivalent. Gleichzeitig aber sind sie entweder *gerade* oder *ungerade* äquivalent, je nachdem die sie verknüpfende Substitution $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ gerade oder ungerade ist. In der Theorie der $\mathfrak{EK}$ entspricht nun dem Satz 4. der folgende Satz:

5. *Die $\mathfrak{EK}$-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer gewissen Stelle an überein oder sie sind von einer gewissen Stelle an zueinander reziprok, je nachdem die Zahlen gerade oder ungerade äquivalent sind.*

---

[13]) Vgl. $\mathfrak{EK}$ I, § 4.

[14]) Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn I. Schur. In $\mathfrak{EK}$ I werden die geraden Substitutionen durch die erzeugenden Substitutionen U und V (s. u.) definiert.

Wir wollen nun den entsprechenden Satz in der Theorie des $\mathfrak{MK}$ aufsuchen. Wir setzen zunächst die beiden Zahlen ω und ω' als positiv voraus und denken uns die Vorzeichen der Substitutionskoeffizienten so gewählt, daß $\alpha\omega+\beta$, also auch $\gamma\omega+\delta$ positiv ist. Sei nun die $\mathfrak{MK}$-Entwicklung von ω

$$\omega=\mathfrak{M}(a,a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},\xi)=\frac{P_m\xi-P_{m-1}}{Q_m\xi-Q_{m-1}}, \tag{20}$$

so ist

$$\omega'=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_m,&-P_{m-1}\\ Q_m,&-Q_{m-1}\end{pmatrix}(\xi)=\frac{A\xi-B}{C\xi-D},$$

worin

$$A=\alpha P_m+\beta Q_m,\qquad B=\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1},$$
$$C=\gamma P_m+\delta Q_m,\qquad D=\gamma P_{m-1}+\delta Q_{m-1}$$

und

$$AD-BC=-\varepsilon.$$

Es ist also

$$\frac{A}{B}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}\,\frac{\alpha\frac{P_m}{Q_m}+\beta}{\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta},\qquad \frac{C}{D}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}\,\frac{\gamma\frac{P_m}{Q_m}+\delta}{\gamma\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\delta},$$

folglich wird, wenn man m groß genug wählt, schließlich sicher[15])

$$\frac{A}{B}>1,\qquad \frac{C}{D}>1.$$

Sei nun

$$\frac{A}{C}=\mathfrak{M}(b,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$$

und $\frac{A'}{C'}$ der vorletzte Näherungsbruch, so ist

$$AC'-CA'=-1.$$

---

[15]) Es ist nämlich wegen (5)

$$\alpha\frac{P_m}{Q_m}+\beta=\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta-\frac{\alpha}{Q_mQ_{m-1}},$$

also

$$\frac{A}{B}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}-\frac{\alpha}{Q_{m-1}(\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1})}.$$

Von einem bestimmten m ab wird $\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta>0$, also $\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1}\geqq 1$.

Ist $\alpha\leqq 0$, so wird $\frac{A}{B}\geqq\frac{Q_m}{Q_{m-1}}>1$. Ist aber $\alpha>0$, so wird

$$\frac{A}{B}\geqq\frac{Q_m-\alpha}{Q_{m-1}}.$$

Nun folgt aus $Q_m-Q_{m-1}=(k_m-1)\,Q_{m-1}-Q_{m-2}$, daß bei wachsendem m, da immer wieder Werte $k_m>2$ vorkommen, die Differenzen Q_m-Q_{m-1} schließlich jeden Betrag überschreiten, es wird also von einem bestimmten m ab $\alpha<Q_m-Q_{m-1}$, folglich wiederum $\frac{A}{B}>1$. Entsprechend für $\frac{C}{D}$.

st

1. $\varepsilon = +1$, also $AD - BC = -1$, so folgt

$$A(C' - D) = C(A' - B)$$

nd hieraus in bekannter Weise

$$B = A', \quad D = C',$$

lglich ist

21a) $$\omega' = \frac{A\xi - A'}{C\xi - C'} = \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \xi).$$

st aber

2. $\varepsilon = -1$, also $AD - BC = +1$,

folgt

$$A(C' + D) = C(A' + B),$$

lso muß $A' + B$ durch A teilbar sein. Da aber $A' + B < 2A$ ist, so rgibt sich

$$A' + B = A, \quad C' + D = C,$$

$$B = A - A', \quad D = C - C',$$

nd daher

$$\frac{B}{D} = \frac{A - A'}{C - C'} = \mathfrak{M}(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1),$$

lso ist $\frac{A}{C}$ der vorletzte Näherungsbruch dieses uneigentlichen $\mathfrak{MK}$.

Es wird dann

$$\omega' = \frac{A\xi - B}{C\xi - D} = \frac{B \cdot \frac{1}{\xi} - A}{D \cdot \frac{1}{\xi} - C},$$

lglich

$$\omega' = \mathfrak{M}\left(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1, \frac{1}{\xi}\right).$$

ei nun der $\mathfrak{MK}$ für ξ:

$$\xi = \mathfrak{M}(c, c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Da $\xi > 1$ ist, so hat der $\mathfrak{MK}$ für $\frac{1}{\xi}$ die Form

$$\frac{1}{\xi} = \mathfrak{M}(1, d, d_1, d_2, \ldots)$$

nd es ist daher

$$\omega' = \mathfrak{M}(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1, 1, d, d_1, d_2, \ldots)$$

der nach der zweiten Formel (2):

21b) $$\omega' = \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} + d - 1, d_1, d_2, \ldots).$$

n den Formeln (20) und (21) haben wir nunmehr den folgenden Satz:

6. *Die $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer gewissen Stelle an überein oder sie sind von einer gewissen Stelle an zueinander reziprok, je nachdem die Zahlen eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind.*

Der Satz bleibt auch bestehen, wenn eine der Zahlen ω, ω' oder beide Zahlen negativ sind. Denn seien z. B. ω und ω' eigentlich äquivalent und ω negativ, so sind ω' und $-\omega$ uneigentlich äquivalent, also ist der $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω' von einer gewissen Stelle an reziprok zum $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für $-\omega$. Dieser letztere aber ist selbst, wie oben gezeigt wurde, von einer gewissen Stelle an reziprok zum $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω, folglich stimmen die $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω und ω' von einer gewissen Stelle an überein.

Durch die Sätze 4, 5, 6 ist die systematische Stellung der drei Kettenbrucharten vom gruppentheoretischen Standpunkt aus sehr deutlich gekennzeichnet. *Die regulären Kettenbrüche gehören zur Gesamtgruppe G aller ganzzahligen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Determinante ± 1, die Möbiuskettenbrüche gehören zur Untergruppe $\mathfrak{A}$ der eigentlichen Substitutionen, die Elementarkettenbrüche zur Untergruppe $\mathfrak{B}$ der geraden Substitutionen.*

§ 5.

Durch die Sätze 1, 2, 3 ist eine Beziehung zwischen je zwei positiven reellen Zahlen hergestellt. Zwei solche Zahlen nennen wir *assoziierte Zahlen*. Ihre regulären Kettenbrüche sind assoziiert und der $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ der einen Zahl liefert, mit denselben Elementen geschrieben, den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ der andern, d. h. ist

$$\omega = \mathfrak{M}(a, b, c, \ldots) = \mathfrak{E}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

so ist die assoziierte Zahl

$$\bar{\omega} = \mathfrak{E}(a, b, c, \ldots) = \mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Dabei ist aber bei einer rationalen Zahl ω stets nur der eigentliche $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ anzusetzen[16]; denn zu jedem der unendlich vielen uneigentlichen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω würde man eine andere assoziierte Zahl erhalten. Ferner aber müssen wir zur eindeutigen Festlegung des Begriffs der assoziierten Zahlen eine bestimmte Klasse von Zahlen ausschließen. Die irrationale Zahl $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist gleich dem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}(1, 1, 1, \ldots)$ mit der Charakteristik $- + - + - + - + \ldots$. Die hierzu assoziierte Charak-

[16]) Dies ist auch aus dem Grunde gerechtfertigt, weil sich zu einem uneigentlichen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$, der immer das Element 1 (und zwar nicht als Anfangselement) enthält, keine Indexkette angeben läßt.

eristik ist $- - - - - - - - - \ldots$, sie entspricht der Zahl ∞. Es äre also die Zahl t mit ∞ assoziiert. Dasselbe ergibt sich durch die $\mathfrak{EK}$-Darstellung $t = \mathfrak{E}(\infty)$, also die assoziierte Zahl $\mathfrak{M}(\infty) = \infty$. Zur eziproken Zahl $\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist dann die Zahl 0 assoziiert. Der reguläre ettenbruch für eine mit t äquivalente Zahl zeigt von einer bestimmten telle an die Teilnenner $1, 1, 1, \ldots$; ihnen entspricht in dem assoziierten ettenbruch der Teilnenner ∞, d. h. die assoziierte Zahl wird *rational*, nd umgekehrt erhält man zu jeder rationalen Zahl ω eine mit t äquialente Zahl als assoziiert, wenn man den regulären Kettenbruch für ω it dem Teilnenner ∞ endigen läßt. Somit wäre jede rationale Zahl mit wei Zahlen, einer rationalen und einer irrationalen Zahl assoziiert. Um ies zu vermeiden, setzen wir fest:

Die mit $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *äquivalenten Zahlen*[17]*, sowie die Zahlen* 0 *und* ∞ *eißen singuläre Zahlen. Sie werden von der Betrachtung ausgeschlossen.*

Um auch zu einer *negativen* Zahl eine assoziierte Zahl finden zu önnen, bedürfen wir einer *Definition von Elementarkettenbrüchen, bei enen der erste Abschnitt* 0 *oder eine negative Zahl ist.* Der $\mathfrak{EK}$ mit em vollständigen Quotienten x:

$$y = \mathfrak{E}(a, b, c, \ldots, s \| x)$$

st gleichbedeutend mit der linearen Substitution

$$y = U^{a-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots U^{s-1} V(x),$$

orin

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

st; man wird also folgerichtig unter dem $\mathfrak{EK}$

$$\mathfrak{E}(-a, b, c, \ldots, s \| x)$$

ie Substitution

22) $$U^{-a-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots U^{s-1} V(x)$$

erstehen. Nun gelten für die Substitutionen U und V die Formeln

$$V^2 = 1, \quad U^{-1} = V^2 U V^2,$$

erner bedeutet $V^2 U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = N$ lediglich eine Umkehrung des Vorzeichens. Ist nun

[17]) Diese Zahlen nehmen auch sonst in der Lehre von den Kettenbrüchen eine Ausnahmestellung ein. Vgl. Hurwitz, Acta mathematica, Bd. 12 (1889); Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig 1913, S. 178–180; ferner $\mathfrak{EK}$ I, § 3. Entsprechendes singuläres Verhalten zeigt die zu diesen Zahlen gehörige Klasse der mit der Form $(2, -1, -2)$ äquivalenten Formen. Vgl. $\mathfrak{EK}$ II.

1. $a = 0$, so ist die Substitution (22):

$$U^{-1}VU^{b-1}VU^{c-1}V\ldots = V^2U^bVU^{c-1}V\ldots$$
$$= NU^{b-1}VU^{c-1}V\ldots,$$

folglich ist

$$\mathfrak{E}(0, b, c, d, \ldots) = -\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots) \tag{23}$$

zu setzen. Ist aber

2. $a > 0$, so bilden wir

$$U^{-2} = V^2UVUV^2 = NV(UV)V$$
$$U^{-3} = NV(UV)^2V,$$

allgemein

$$U^{-a-1} = NV(UV)^aV = NV(UV)^{a-1}UV^2.$$

Dies in (22) eingesetzt, ergibt

$$U^{-a-1}VU^{b-1}VU^{c-1}V\ldots = NV(UV)^{a-1}U^bVU^{c-1}V\ldots,$$

und dies bedeutet, *daß*

$$\mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots) = -\mathfrak{E}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots) \tag{24}$$

zu nehmen ist.

Wir können nun zu der negativen Zahl

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots)$$

als assoziierte Zahl die Zahl

$$\mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots)$$

erklären. Ist

1. $a = 0$, so ist, wenn wir durch das Zeichen $\sim$ andeuten, daß zwei Zahlen assoziiert sind:

$$\mathfrak{M}(0, b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{E}(0, b, c, d, \ldots),$$

oder

$$-\frac{1}{\mathfrak{M}(b, c, d, \ldots)} \sim -\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots).$$

Es ist aber

$$\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{M}(b, c, d, \ldots),$$

folglich haben wir den Satz:

7. *Ist ω assoziiert zu $\overline{\omega}$, so ist $-\omega$ assoziiert zu $-\frac{1}{\overline{\omega}}$.*

Man kann diesen Satz auch in folgender Form aussprechen:

7a. *Ist $\mathfrak{E}(a', b', c', \ldots)$ der zu $\mathfrak{E}(a, b, c, \ldots)$ reziproke $\mathfrak{EK}$, so ist*

$$-\mathfrak{M}(a, b, c, \ldots) \sim -\mathfrak{E}(a', b', c', \ldots).$$

Dasselbe ergibt sich, wenn

2. $a > 0$. Dann ist

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots)$$

der nach (15) und (24)

$$-\frac{1}{\mathfrak{M}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots)} \sim -\mathfrak{E}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots),$$

nd dies entspricht dem Satz 7.

So ist z. B.

$$\mathfrak{M}(-5, 3, 2, 4) = -\tfrac{92}{17}$$

soziiert zu

$$\mathfrak{E}(-5, 3, 2, 4) = -\mathfrak{E}(1, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 4) = -\tfrac{111}{181},$$

muß also $\frac{92}{17}$ zu $\frac{181}{111}$ assoziiert sein. In der Tat ist

$$\tfrac{92}{17} = \mathfrak{M}(6, 2, 4, 2, 2), \quad \tfrac{181}{111} = \mathfrak{E}(6, 2, 4, 2, 2).$$

Wir können nunmehr den folgenden Satz aussprechen:

8. *Nach Ausschluß der singulären Zahlen gehört zu jeder reellen ahl eine bestimmte assoziierte Zahl. Zu einer rationalen Zahl gehört ne rationale Zahl vom gleichen Rang*[18]*). Die assoziierten Zahlen von ziproken Zahlen sind reziprok.*

Es sei $\omega = \mathfrak{M}(a, a_1, a_2, \ldots)$ eine irrationale Zahl. Der reziproke $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ sei $= \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots)$. Die zu ω assoziierte Zahl ist $\bar{\omega} = \mathfrak{E}(a, a_1, a_2, \ldots)$. ann ist $\frac{1}{\bar{\omega}} = \mathfrak{E}(b, b_1, b_2, \ldots)$.

Irgendeine mit ω *eigentlich* äquivalente Zahl ω' wird eine $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$-ntwicklung von der Form

$$\omega' = \mathfrak{M}(c, c_1, c_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots)$$

sitzen. Ihre assoziierte Zahl ist

$$\bar{\omega}' = \mathfrak{E}(c, c_1, c_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots),$$

ist also nach Satz 5 mit $\bar{\omega}$ *gerade* äquivalent.

Ist aber ω' mit ω *uneigentlich* äquivalent, so ist

$$\omega' = \mathfrak{M}(d, d_1, d_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots),$$

o die assoziierte Zahl

$$\bar{\omega}' = \mathfrak{E}(d, d_1, d_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots),$$

d diese ist mit $\bar{\omega}$ *ungerade* äquivalent. Es besteht also der Satz:

[18]) Den Rang einer negativen rationalen Zahl kann man dem der entgegengezten Zahl gleichsetzen.

9. *Die assoziierten Zahlen von zwei äquivalenten Zahlen sind ebenfalls äquivalent, und je nachdem das eine Zahlenpaar eigentlich oder uneigentlich äquivalent ist, ist das zu ihnen assoziierte Paar gerade oder ungerade äquivalent.*

Die Theorie der *periodischen* $\mathfrak{ER}$ und $\mathfrak{MR}$, die wir hier nicht eingehend darstellen können, führt unmittelbar zu dem folgenden Satz:

10. *Zu einer quadratischen Irrationalzahl ist stets eine quadratische Irrationalzahl assoziiert, und die zu zwei konjugierten Zahlen assoziierten Zahlen sind wiederum konjugiert.*

Der Gesamtheit der $\mathfrak{MR}$ mit derselben Periode entspricht eine *Klasse eigentlich* äquivalenter binärer quadratischer Formen; der Gesamtheit der $\mathfrak{ER}$ mit derselben Periode entspricht ein *Stamm gerade* äquivalenter Formen[19]). Man sieht also:

11. *Jede Klasse binärer quadratischer Formen ist assoziiert mit einem bestimmten Stamm solcher Formen.*

Die Determinanten der Klasse und des Stammes sind im allgemeinen verschieden.

Die Periode eines periodischen $\mathfrak{ER}$ kann immer in der Form

$$(25) \qquad q_1+2, [2]_{q_2-1}, \quad q_3+2, [2]_{q_4-1}, \quad q_5+2, \ldots, [2]_{q_n-1}$$

geschrieben werden. Darin ist n gerade und jede Zahl $q_1, q_3, \ldots, q_n \geqq 1$. Ist eine Zahl mit geradem Index $q_{2i}=1$, so fehlt der entsprechende Zweierkomplex. So ist z. B. die Periode

$$3, 5, 2, 2, 2, 4, 3 = 3, [2]_0, 5, [2]_3, 4, [2]_0, 3, [2]_0,$$

also $q_1=1$, $q_2=1$, $q_3=3$, $q_4=4$, $q_5=2$, $q_6=1$, $q_7=1$, $q_8=1$.

Der reziproke $\mathfrak{ER}$ wird ebenso gebildet, wie der reziproke $\mathfrak{MR}$. Es ist also nach (13b) *die zu* (25) *reziproke Periode*

$$(26) \qquad [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, [2]_{q_5-1}, \ldots, q_n+2.$$

Die zu obigem Beispiel reziproke Periode ist

$$[2]_0, 3, [2]_2, 6, [2]_1, 3, [2]_0, 3 = 3, 2, 2, 6, 2, 3, 3.$$

Zu den $\mathfrak{ER}$ mit reziproken Perioden sind reziproke $\mathfrak{MR}$ mit den gleichen Perioden assoziiert. Der $\mathfrak{MR}$ mit der Periode (25) ist aber gleich einem regulären Kettenbruch mit der Periode $\overline{q_1, q_2, \ldots, q_n}$, also folgt

---

[19]) In meiner Arbeit $\mathfrak{ER}$ II habe ich die Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen innerhalb der Gruppe der geraden Substitutionen durchgeführt. Sie ist gleichbedeutend mit der Theorie der periodischen $\mathfrak{ER}$. Eine Gesamtheit von Formen, die miteinander gerade äquivalent sind, bildet einen Stamm.

12. *Der ER mit der Periode* (25) *ist assoziiert zu einem regulären Kettenbruch mit der Periode* $\overline{q_1, q_2, \ldots, q_n}$.

Wir wollen drei besondere Arten von periodischen ER betrachten, die für die Theorie der quadratischen Formen von Wichtigkeit sind.

I. Die Periode (25) heißt *involutorisch*, wenn der reziproke ER die gleiche Periode hat, also wenn die Periode (25) einfach durch Verschiebung in die reziproke Periode übergeht. Ist (25) eine einfache Periode und involutorisch, so kann die Verschiebung nur so geschehen, daß q_1 in $q_{\frac{n}{2}+1}$ übergeht, also folgt:

13. *Die Periode* (25) *ist involutorisch, wenn*

$$q_1 = q_{\frac{n}{2}+1},\ q_2 = q_{\frac{n}{2}+2},\ \ldots,\ q_{\frac{n}{2}} = q_n$$

ist.

Es muß dann überdies $\frac{n}{2} + 1$ eine gerade Zahl sein, also:

Bei einer involutorischen Periode ist $n \equiv 2 \bmod 4$.

Aus den Sätzen 12. und 13. ergibt sich weiter:

14. *Der Periode eines involutorischen ER sind im assoziierten regulären Kettenbruch zwei einfache Perioden mit ungerader Gliederzahl zugeordnet.*

Umgekehrt ist *zu jedem regulären Kettenbruch mit einer Periode von ungerader Gliederzahl ein involutorischer ER assoziiert.* So ist z. B. zu dem Kettenbruch $\mathfrak{K}(\ldots \overline{2, 5, 3} \ldots)$ mit $q_1 = q_4 = 2$, $q_2 = q_5 = 5$, $q_3 = q_6 = 3$ ein ER mit der Periode

$$4, [2]_4, 5, [2]_1, 7, [2]_2 = 4, 2, 2, 2, 2, 5, 2, 7, 2, 2$$

assoziiert und man überzeugt sich leicht, daß dies eine involutorische Periode ist.

Eine Zahl $\omega = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$ hat bekanntlich dann und nur dann eine reguläre Kettenbruchperiode von ungerader Gliederzahl, wenn die Gleichung

(27) $$x^2 - Dy^2 = -\sigma^2$$

in relativ primen Zahlen lösbar ist, wobei $\sigma = 1$ oder 2, je nachdem die der Zahl ω zugeordnete quadratische Form eigentlich oder uneigentlich primitiv ist. Es folgt also auf Grund von Satz 11 und 14:

15. *Jeder involutorische Stamm ist assoziiert zu einer Klasse quadratischer Formen einer solchen Determinante, für die die Gleichung* (27) *lösbar ist.*

II. Die Periode eines ER heißt *selbstkonjugiert*, wenn die reziproke Periode die Umkehrung der ursprünglichen Periode ist. Man sieht also aus (25) und (26):

16. *Die Periode* (25) *ist selbstkonjugiert, wenn es einen Index i derart gibt, daß*

$$q_1 = q_{2i}, \quad q_2 = q_{2i-1}, \quad q_3 = q_{2i-2}, \cdots, q_i = q_{i+1},$$

$$q_{2i+1} = q_n, \quad q_{2i+2} = q_{n-1}, \cdots, \quad q_{\frac{n}{2}+i} = q_{\frac{n}{2}+i+1}.$$

Hieraus schließt man nach Satz 12:

17. *Die Periode des regulären Kettenbruchs, der einem selbstkonjugierten* EK *assoziiert ist, besteht aus zwei flachsymmetrischen Teilen*[20].

So ist z. B. dem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}(\ldots 1, 2, 2, 1, 3, 3, \ldots)$ ein EK mit der Periode

$$3, [2]_1, 4, [2]_0, 5, [2]_2 = 3, 2, 4, 5, 2, 2$$

assoziiert. Die reziproke Periode ist

$$[2]_0, 4, [2]_1, 3, [2]_2, 5 = 4, 2, 3, 2, 2, 5,$$

also die Umkehrung der vorhergehenden; die Perioden sind selbstkonjugiert.

Der EK für die quadratische Irrationalzahl ω ist selbstkonjugiert, wenn ω mit der konjugierten Zahl ω' *gerade* äquivalent ist[21] (vgl. EK II). Es ist dann nach Satz 9 die assoziierte Zahl $\bar{\omega}$ mit ihrer konjugierten Zahl $\bar{\omega}'$ *eigentlich* äquivalent, also:

$$\bar{\omega}' = \frac{\alpha\bar{\omega} + \beta}{\gamma\bar{\omega} + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Hieraus folgt

$$\gamma\bar{\omega}\bar{\omega}' + \tfrac{1}{2}(\delta + \alpha)(\bar{\omega}' - \omega) + \tfrac{1}{2}(\delta - \alpha)(\bar{\omega}' + \bar{\omega}) - \beta = 0.$$

Sei (a, b, c) die zu $\bar{\omega}$ gehörige Form von der Determinante D. Dann ist

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}' = -\frac{2b}{a}, \quad \bar{\omega}\bar{\omega}' = \frac{c}{a}, \quad \bar{\omega} - \bar{\omega}' = \frac{2\sqrt{D}}{a},$$

also

$$\gamma\frac{c}{a} - (\delta + \alpha)\frac{\sqrt{D}}{a} - (\delta - \alpha)\frac{b}{a} - \beta = 0,$$

folglich

$$\alpha + \delta = 0, \qquad \beta a - 2\alpha b - \gamma c = 0. \tag{28}$$

$\delta = -\alpha$ ergibt

$$-\beta\gamma = \alpha^2 + 1,$$

folglich sind β und $-\gamma$ Summen von zwei Quadraten:

$$\beta = \varkappa^2 + \lambda^2, \qquad -\gamma = \mu^2 + \nu^2,$$

[20]) Ein symmetrischer Bestandteil eines regulären Kettenbruchs heißt flachsymmetrisch oder spitzsymmetrisch, je nachdem er aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Gliedern besteht.

[21]) Hieraus folgt, daß z. B. der EK für jede Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl selbstkonjugiert ist.

ınd da

$$(\varkappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2)=(\varkappa\mu+\lambda\nu)^2+(\varkappa\nu-\lambda\mu)^2$$

st, so kann man zwischen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ die Beziehung

$$\varkappa\nu-\lambda\mu=1$$

ınsetzen und α durch

$$\varkappa\mu+\lambda\nu=-\alpha$$

oestimmen. Nach (28) ist dann

$$a(\varkappa^2+\lambda^2)+2b(\varkappa\mu+\lambda\nu)+c(\mu^2+\nu^2)=0$$

oder

$$a\varkappa^2+2b\varkappa\mu+c\mu^2=-(a\lambda^2+2b\lambda\nu+c\nu^2)=m, \quad \text{d. h.:}$$

Die Form (a, b, c) geht durch die Substitution $\begin{pmatrix}\varkappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix}$ in die Form $m, n, -m)$ über, und es ist

$$n=a\varkappa\lambda+b(\varkappa\nu+\lambda\mu)+c\mu\nu.$$

Damit hat man den Satz:

18. *Jeder selbstkonjugierte Stamm ist assoziiert zu einer Klasse quadratischer Formen, die mit einer Form $(m, n, -m)$ äquivalent sind.* Die Periode der zu einer solchen Klasse gehörigen regulären Kettenbrüche besteht aus zwei flachsymmetrischen Teilen.

Oder auch:

18a. *In jedem selbstkonjugierten Stamm gibt es eine Form, deren assoziierte Form die Gestalt $(m, n, -m)$ hat.*

So ist z. B. der zur Form $(5, -7, 7)$ der Determinante 14 gehörige Stamm selbstkonjugiert. Der $\mathfrak{EK}$ für die zugehörige Irrationalzahl $\omega=\frac{\sqrt{14}+7}{5}$ ist

$$\omega=\mathfrak{E}(\overline{2, 2, 3, 3, 5, \ldots}).$$

Die assoziierte Zahl ist

$$\bar{\omega}=\mathfrak{M}(\overline{2, 2, 3, 3, 5, \ldots})=\mathfrak{K}(1, 2, \overline{1, 1, 1, 1, 3, 3}, \ldots),$$

die zugehörige Form $(10, -8, 3)$ von der Determinante 34 ist eigentlich äquivalent mit $(5, -3, -5)$.

III. Die Periode eines $\mathfrak{EK}$ heißt *umkehrbar*, wenn sie aus zwei symmetrischen Teilen besteht. Aus (25) ergibt sich:

19. *Die Periode (25) ist umkehrbar, wenn es einen Index i gibt so daß*

$$q_1=q_{2i+1}, \quad q_2=q_{2i}, \quad q_3=q_{2i-1}, \ldots, q_i=q_{i+2},$$

$$q_{2i+2}=q_n, \quad q_{2i+3}=q_{n-1}, \ldots, \quad q_{\frac{n}{2}+i}=q_{\frac{n}{2}+i+2}.$$

Hieraus folgt:

20. *Die Periode des regulären Kettenbruchs, der einem umkehrbaren* EK *assoziiert ist, besteht aus zwei spitzsymmetrischen Teilen.*

Der EK für die quadratische Irrationalzahl ω ist umkehrbar, wenn ω und $-\frac{1}{\omega'}$ gerade, also ω und ω' *ungerade* äquivalent sind (vgl. EK II). Dann ist also die assoziierte Zahl $\overline{\omega}$ mit ihrer konjugierten Zahl $\overline{\omega}'$ *uneigentlich* äquivalent. Dies bedeutet aber, daß die zu ω gehörige Form *ambig* ist, es besteht daher der Satz:

21. *Jeder umkehrbare Stamm ist zu einer ambigen Klasse assoziiert.* Die Periode der zu einer solchen Klasse gehörigen regulären Kettenbrüche besteht aus zwei spitzsymmetrischen Teilen.

Ein regulärer Kettenbruch, dessen Periode aus einem spitzsymmetrischen und einem flachsymmetrischen Teil besteht, ist zunächst ein Kettenbruch von der in Satz 14 auftretenden Art. Andererseits aber läßt sich die doppelte Periode sowohl in zwei flachsymmetrische, wie auch in zwei spitzsymmetrische Teile zerlegen:

$$\underbrace{q_1, q_2, \cdots, q_m, q_{m+1}, q_m, \cdots, q_2, q_1,}\ \underbrace{r_1, \cdots, r_n, r_n, \cdots, r_1, q_1, \cdots, q_m, q_{m+1}, q_m, \cdots, q_1,}\ \overline{r_1, \cdots, r_n, r_n,}$$

Es gehört also ein solcher Kettenbruch zu jeder der drei in Satz 14, 18 und 21 auftretenden Arten und es besteht der Satz:

22. *Zu jedem regulären Kettenbruch, dessen Periode aus einem spitzsymmetrischen und einem flachsymmetrischen Teil besteht, gehört eine ambige Klasse mit einer Form $(m, n, -m)$, für deren Determinante die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -\sigma^2$ lösbar ist. Der assoziierte Stamm ist gleichzeitig involutorisch, selbstkonjugiert und umkehrbar.*

Es ist z. B. der reguläre Kettenbruch $\mathfrak{K}(\overline{2, 1, 1, 2, 1, 3, 1}, \ldots) = \omega$ Lösung der Gleichung $33\omega^2 - 59\omega - 67 = 0$. Die entsprechende Form $(66, -59, -134)$ ist eigentlich äquivalent mit der Form $(50, -125, 66)$, gehört also zu einer ambigen Klasse. Zu dieser Klasse gehört auch die Form $(106, 33, -106)$ und für die Determinante $D = 106^2 + 33^2 = 25 \cdot 493$ ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -4$ lösbar $(x = 111, y = 1)$. Die Periode des assoziierten EK ist 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 4. Sie ist involutorisch, selbstkonjugiert und umkehrbar.

(Eingegangen am 15. Mai 1918.)

Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen.

Von

Kurt Hensel in Marburg.

Der Gegenstand der Theorie der algebraischen Zahlen in ihrem allgemeinsten Umfange ist erstens die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften aller algebraischen Zahlen eines durch die Wurzel ξ einer ganzzahligen Gleichung $F(x) = 0$ definierten Zahlkörpers $\Re(\xi)$ und zweitens die Betrachtung der Größenbeziehungen zwischen diesen Zahlen.

Mit der ersten von diesen beiden Aufgaben beschäftigt sich die folgende Abhandlung. Im ersten Abschnitte gebe ich die einfachsten Sätze an, welche für die Kongruenzringe und Kongruenzkörper gelten, und zeige besonders, wie die Untersuchung der ersteren vollständig auf die jener Kongruenzkörper zurückgeführt wird. Für die Beweise der einfachsten und bereits bekannten Sätze jener Theorie darf ich auf die grundlegende Abhandlung von E. Steinitz, „Algebraische Theorie der Körper", Crelles Journal, Bd. 137 (1910), S. 167—308 verweisen, welche ich im folgenden kurz durch St. zitieren werde.

Im zweiten Abschnitte zeige ich, daß die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften aller Zahlen eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers n^{ten} Grades in bezug auf eine beliebige Primzahl p vollständig zurückführbar ist auf die Betrachtung eines bestimmten Kongruenzkörpers mit beliebigen p-adischen Koeffizienten. Ein solcher p-adischer Kongruenzkörper ist nun gleich einem bestimmten Körper von algebraischen π-adischen Zahlen, welche ganz genau dieselben arithmetischen Eigenschaften haben, wie die rationalen p-adischen Zahlen, deren Erforschung ja den Gegenstand der elementaren Zahlentheorie bildet. Algebraisch betrachtet ist dieser π-adische Zahlkörper ein algebraischer Erweiterungskörper desjenigen der p-adischen Zahlen.

Der folgende Abschnitt ist dem Beweise des Fundamentalsatzes gewidmet, daß man stets einen π-adischen Zahlkörper finden kann, innerhalb dessen die beliebig vorgelegte Grundgleichung $F(x) = 0$ genau n

Wurzeln besitzt, der also ein Galoisscher Körper für diese Gleichung ist, so daß also in ihm alle Sätze der Galoisschen Theorie gelten. So ergibt sich also für den Bereich jeder reellen Primzahl 2, 3, 5, ... je ein zugehöriger Galoisscher Körper, und so werden die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers $\Re(\xi)$ mit den algebraischen Grundeigenschaften der zugehörigen Grundgleichung $F(x) = 0$ oder ihrer Galoisschen Gruppe in die allerengste Beziehung gesetzt.

Der Hauptsatz dieser Theorie wird in dem letzten kurzen Abschnitt bewiesen, der Satz nämlich, daß jede Gleichung $F(x) = 0$ innerhalb eines jeden p-adischen Zahlkörpers $K(p)$ algebraisch, d. h. durch Wurzelzeichen auflösbar ist.

Dieser Satz zeigt besonders deutlich, daß die Einführung der p-adischen Zahlen für die allgemeine Theorie der algebraischen Zahlkörper ebenso naturgemäß und notwendig ist, wie für die elementare Zahlentheorie.

Die Grundlagen der hier für beliebige algebraische Körper dargestellten Theorie habe ich in beschränkterem Umfange und nur in dem allereinfachsten Falle der quadratischen Zahlkörper im Jahre 1914 veröffentlicht (K. Hensel, „Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper", Crelles Journal, Bd. 144 (1914), S. 57—70). Den im letzten Abschnitt bewiesenen Fundamentalsatz habe ich im August 1915 in meinen Vorlesungen über höhere Zahlentheorie an der Marburger Universität genau in der hier gegebenen Form vorgetragen.

I. Einleitung. Die Kongruenzringe und ihre Zurückführung auf Kongruenzkörper.

Es sei $\Re$ ein beliebiger Körper, und $F(x)$ irgendeine ganze Funktion n^{ten} Grades mit Koeffizienten aus $\Re$, welche nur, falls sie in $\Re$ zerfällt, keine mehrfachen Faktoren haben soll. Ich untersuche dann den Ring $R = R_{\Re}(x, \bmod F(x))$ aller modulo $F(x)$ ganzen Funktionen von x mit Koeffizienten aus $\Re$ für diesen Modul $F(x)$. Dieser Ring ist bekanntlich stets und nur dann ein Körper, wenn $F(x)$ in $\Re$ unzerlegbar ist.

Dieser Ring ist vom n^{ten} Grade, da ja z. B. die n Elemente $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ modulo $F(x)$ unabhängig sind, während je $n+1$ Elemente $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig werden. Jedes System $(x_1, \ldots, x_n)$ von n linear unabhängigen Elementen von R heißt eine Basis des Ringes. Jedes Element y des Ringes genügt modulo $F(x)$ einer Gleichung n^{ten} Grades innerhalb $\Re$, weil ja die $n+1$ Elemente $(1, y, \ldots, y^n)$ linear ab-

ängig sind. Eine dieser Gleichungen, die sog. Hauptgleichung für y, indet man, indem man aus den n Gleichungen

1) $$yx_i = \sum_1^n l_{ik} x_k \qquad (\mathrm{mod}\, F(x)),$$

durch welche sich die n Produkte $(yx_1, \ldots, yx_n)$ von y und den Elementen einer Basis (x_k) durch diese Elemente darstellen, die x_k eliminiert, n der Form

2) $$g(t) = (-1)^n |b_{ik} - \delta_{ik} t| = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ \delta_{ik} = 0,\ i \gtrless k,\ \delta_{ii} = 1 \end{matrix} \right).$$

ie ist wegen des Multiplikationssatzes der Determinanten unabhängig von ler gewählten Basis (x_i). Für das Element x selbst ist diese Hauptleichung $F(x) = 0$.

Ich nenne das mit $(-1)^n$ multiplizierte konstante Glied in dieser Gleichung die Norm $n(y)$ von y in bezug auf R; dann besteht für sie lie Gleichung:

3) $$n(y) = |b_{ik}|,$$

nd man erhält für zwei beliebige Elemente y und z unmittelbar die Gleichung:

3a) $$n(yz) = n(y)\, n(z).$$

nsbesondere ergibt sich für die linke Seite der Hauptgleichung sofort die Normdarstellung

3b) $$g(t) = n(t - y).$$

Ist $F(x)$ in $\mathfrak{R}$ zerlegbar, und ist

4) $$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x)$$

lie eindeutig bestimmte Zerlegung in irreduzible Faktoren, so läßt sich lie Untersuchung des Ringes R in einfacher Weise auf diejenige der Kongruenzkörper

5) $$K_i = K_{\mathfrak{R}}(x, \mathrm{mod}\, f_i(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ller modulo $f_i(x)$ ganzen rationalen Funktionen in $\mathfrak{R}$ für diesen Modul urückführen. Setzt man nämlich:

6) $$F(x) = f_1(x) F_1(x) = f_2(x) F_2(x) = \ldots = f_\nu(x) F_\nu(x),$$

o sind die ν Primteilerprodukte $(F_1(x), \ldots, F_\nu(x))$ teilerfremd. Man ann also durch das Euklidische Teilerverfahren ν komplementäre Funktionen $(G_1(x), \ldots, G_\nu(x))$ so bestimmen, daß:

6a) $$F_1(x) G_1(x) + \ldots + F_\nu(x) G_\nu(x) \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, F(x))$$

wird, wobei allgemein $G_i(x)$ nur modulo $f_i(x)$ bestimmt ist, also für diesen Modul auf seinen kleinsten Rest reduziert angenommen werden kann. Ich setze nun allgemein:

$$F_i(x)\,G_i(x) = 1_i; \tag{6b}$$

dann bestehen für die ν Funktionen $(1_1, 1_2, \ldots, 1_\nu)$ offenbar die Beziehungen:

$$\begin{aligned} &1_i \equiv 1 \pmod{f_i(x)}, \qquad 1_i \equiv 0 \pmod{f_k(x)}, \qquad (k \gtrless i) \\ &1_i^2 \equiv 1_i \pmod{F(x)}, \qquad 1_i 1_k \equiv 0 \pmod{F(x)}, \qquad (k \gtrless i) \\ &1_1 + 1_2 + \ldots + 1_\nu \equiv 1 \pmod{F(x)}. \end{aligned} \tag{6c}$$

Hierdurch erhält man sofort die folgende eindeutige additive Zerlegung eines beliebigen Elementes v des Ringes R:

$$\begin{aligned} v = v\cdot 1_1 + v\cdot 1_2 + \ldots + v\cdot 1_\nu &\equiv v_1\cdot 1_1 + v_2\cdot 1_2 + \ldots + v_\nu\cdot 1_\nu \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_\nu) \pmod{F(x)}; \end{aligned} \tag{6d}$$

wo allgemein $v_i \equiv v \pmod{f_i(x)}$, d. h. der Wert von v im Körper $K_i = K(x, \bmod f_i(x))$ ist. Sind umgekehrt $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ beliebige Elemente der Kongruenzkörper $(K_1, K_2, \ldots, K_\nu)$, so gibt es in R ein einziges Element v, nämlich $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = \sum_1^\nu v_i 1_i$, welches gerade diese Werte v_i in den Körpern K_i besitzt.

Sind ferner $v = (v_1, \ldots, v_\nu)$ und $w = (w_1, \ldots, w_\nu)$ zwei beliebige Elemente von R in dieser Darstellung, so folgen aus den Gleichungen (6c) für ihre Summe, Differenz, Produkt und ihren Quotienten die entsprechenden Darstellungen:

$$\begin{gathered} v \pm w = (v_1 \pm w_1, \ldots, v_\nu \pm w_\nu), \qquad vw = (v_1 w_1, \ldots, v_\nu w_\nu), \\ \frac{v}{w} = \left(\frac{v_1}{w_1}, \ldots, \frac{v_\nu}{w_\nu}\right); \end{gathered} \tag{7}$$

die letzte Gleichung besteht aber dann und nur dann, wenn $\frac{v}{w}$ dem Ringe R angehört, denn allein in diesem Falle sind ja alle Komponenten w_i von Null verschieden. Durch diese Darstellung $v = (v_i)$ aller Elemente von R wird der Ring R einstufig isomorph auf das System $(K_1, K_2, \ldots, K_\nu)$ der ν Kongruenzkörper K_i abgebildet, wenn für zwei solche Elemente (v_i) und (w_i) die Addition und die Multiplikation durch die Gleichungen

$$(v_i) + (w_i) = (v_i + w_i), \qquad (v_i)\,(w_i) = (v_i w_i) \tag{7a}$$

definiert wird.

Es sei allgemein λ_i der Grad des Faktors $f_i(x)$, also der Grad von K_i, und $(x_1^{(i)}, \ldots, x_{\lambda_i}^{(i)})$, etwa $(1, x, \ldots, x^{\lambda_i - 1})$, je eine Basis für diese Körper; dann bilden die $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = n$ Elemente von R:

(8) $$x_{k_1}^{(1)} \cdot 1_1, \quad x_{k_2}^{(2)} \cdot 1_2, \quad \ldots, \quad x_{k_\nu}^{(\nu)} \cdot 1_\nu \qquad \begin{pmatrix} k_i = 1, 2, \ldots, \lambda_i \\ i = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

offenbar eine Basis für R. Ist $y = (y_1, \ldots, y_\nu)$ ein beliebiges Element von R, so ergibt die Darstellung (1) für y unter Benutzung dieser Basis (8) sofort die Gleichung:

(9) $$n_R(y) = \prod_i n_{K_i}(y),$$

wenn $n_R(y)$ und $n_{K_i}(y)$ die Normen von y für den Ring R und für die Körper K_i bedeuten; und aus den Gleichungen $g_R(t) = n_R(t - y)$, $g_{K_i}(t) = n_{K_i}(t - y)$ folgt hiernach die Gleichung:

(9a) $$g_R(t) = \prod_i g_{K_i}(t).$$

Die linke Seite der Hauptgleichung $g_R(t)$ für ein beliebiges Element von R zerfällt also innerhalb $\mathfrak{R}$ stets in ein Produkt von ν Faktoren $g_{K_i}(t)$, welche gleich Null gesetzt die Hauptgleichungen desselben Elementes y innerhalb der Körper K_i sind.

Hierdurch ist die Untersuchung jedes Elementes des Ringes R vollständig auf diejenige desselben Elementes innerhalb der einzelnen Körper K_i zurückgeführt. Ist speziell der Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ ein Auflösungskörper für $F(x)$, so daß in ihm $F(x) = \prod_1^n (x - \alpha_i)$ vollständig, d. h. in Linearfaktoren zerfällt, so wird hierdurch die Untersuchung des Ringes $R_{\mathfrak{R}}(x, \bmod F(x))$ vollständig auf diejenige der n Kongruenzkörper $K_{\mathfrak{R}}(x, \bmod (x - \alpha_i))$, d. h. der n „konjugierten" Körper $K_{\mathfrak{R}}(\alpha_i)$ reduziert, die sämtlich mit $\mathfrak{R}$ identisch sind. Jedes Element dieses Ringes entspricht einem System von n Zahlen aus $\mathfrak{R}$.

Es sei nun $f(x)$ einer der ν irreduziblen Faktoren von $F(x)$, λ sein Grad, und $K = K_{\mathfrak{R}}(x, \bmod f(x)) = K_x$ der zu $f(x)$ gehörige Kongruenzkörper λ^{ten} Grades. Ist dann v ein beliebiges Element desselben, so bildet die Gesamtheit aller modulo $f(x)$ ganzen rationalen Funktionen von v einen Teilkörper $K_{\mathfrak{R}}(v, \bmod f(x))$ von K_x, und er selbst ist ein Oberkörper des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$. Sind die f Potenzen $(1, v, \ldots, v^{f-1})$ modulo $f(x)$ noch linear unabhängig, aber $(1, v, \ldots, v^{f-1}, v^f)$ abhängig, so genügt v in $\mathfrak{R}$ einer irreduziblen Gleichung f^{ten} Grades

(10) $$g_0(t) = t^f + b_1 t^{f-1} + \ldots + b_f = 0,$$

und der Körper $K(v, \bmod f(x))$ ist einstufig isomorph dem Kongruenzkörper $K_v = K(v, \bmod g_0(v))$, welcher nun genau dieselben Eigenschaften besitzt, wie sein Oberkörper $K_x = K(x, \bmod f(x))$. Jedes Element $w = \chi(v)$ von K_v genügt also einer Hauptgleichung f^{ten} Grades

(11) $$h(t) = n_K(t - w) = 0,$$

welche, wenn speziell $w = v$ ist, mit $g_0(t)$ zusammenfällt, also irreduzibel ist.

Der Kongruenzkörper $K_x = K(x, \bmod f(x))$ ist in bezug auf seinen Unterkörper $K_v = K(v, \bmod g_0(v))$ von einem endlichen Grade e. Ist $(x_1, x_2, \ldots, x_e)$ eine Basis desselben in bezug auf diesen Unterkörper, und ist $(v_1, v_2, \ldots, v_f)$, etwa $(1, v, \ldots, v^{f-1})$, eine Basis dieses letzteren für den Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$, so bilden die $ef = \lambda$ Elemente $(\ldots x_i v_k \ldots)$ bekanntlich eine Basis von K_x in bezug auf $\mathfrak{R}$ (vgl. z. B. St. S. 200. [2]). Benutzt man speziell diese zur Bildung der Hauptgleichung (2) $g(t) = 0$ von v in bezug auf K_x, so ergibt sich die Gleichung:

$$g(t) = g_0(t)^e. \tag{12}$$

Jedes Element v des Kongruenzkörpers $K(x, \bmod f(x))$ genügt also einer Hauptgleichung λ^{ten} Grades, deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer irreduzibeln Funktion ist.

II. Die Kongruenzringe und Kongruenzkörper im Bereiche der p-adischen Zahlen. Die π-adischen Zahlen.

Es sei nun $F(x) = 0$ eine im Körper $\mathfrak{R}(1)$ aller rationalen Zahlen irreduzible Gleichung n^{ten} Grades, und ξ eine Wurzel derselben in irgendeinem Erweiterungskörper $\mathfrak{R}(\xi)$. Dann ist $\mathfrak{R}(\xi)$, dessen Teilbarkeitseigenschaften den Gegenstand dieser Abhandlung bilden, einstufig isomorph dem Kongruenzkörper $K_{\mathfrak{R}(1)}(x, \bmod F(x)) = K(x, 1)$ aller modulo $F(x)$ ganzen rationalen Funktionen von x mit rationalen Zahlkoeffizienten, für diese Funktion als Modul. Es kann und soll daher statt $\mathfrak{R}(\xi)$ dieser Kongruenzkörper $K(x, 1)$ untersucht werden.

Die in der Einleitung gestellte Aufgabe ist nun vollständig gelöst, wenn man die Teilbarkeitsbeziehungen aller Zahlen von $\mathfrak{R}(\xi)$ oder, was dasselbe ist, aller Funktionen von $K(x, 1)$ zu einer beliebigen reellen Primzahl p kennt. Ich wende mich daher zur Lösung dieser letzten Aufgabe.

Zu diesem Zwecke denke ich mir die rationalen Zahlkoeffizienten der Elemente des Kongruenzkörpers $K(x, 1)$ nach Potenzen von p entwickelt, also als p-adische Zahlen dargestellt. Dann bildet dieser Bereich einen Teilkörper des größeren Bereiches

$$R(x, p) = R_p(x, \bmod F(x)) \tag{13}$$

aller modulo $F(x)$ ganzen Funktionen von x mit *beliebigen* p-adischen Koeffizienten in der Weise, daß jedes Element von $K(x, 1)$ einem solchen von $R(x, p)$ gleich ist, während umgekehrt jedes Element von $R(x, p)$ der Grenzwert einer Folge von Elementen von $K(x, 1)$ ist. Es kann und soll daher statt des Zahlkörpers $\mathfrak{R}(\xi)$ bzw. des Kongruenzkörpers

$K(x, 1)$ dieser Bereich $R(x, p)$ auf die Teilbarkeitseigenschaften seiner Elemente untersucht werden.

Der neue Koeffizientenkörper $K(p)$ des Bereiches $K(x, p)$ ist nun in (transzendenter) Erweiterungskörper des Körpers $K(1)$ der rationalen Zahlen (vgl. St. S. 183), und der neue Bereich $R(x, p)$ unterscheidet sich von dem zuerst betrachteten $K(x, 1)$ ganz wesentlich dadurch, daß in $K(1)$ $F(x)$ unzerlegbar ist, während dieser Modul in dem größeren Körper $K(p)$ in ein Produkt von eindeutig bestimmten voneinander verschiedenen p-adischen Primfaktoren zerfällt. Es kann auch, wie hier nur erwähnt werden mag, durch eine endliche Anzahl von Versuchen entschieden werden, in wieviel p-adische Primfaktoren niederen Grades $F(x)$ zerfällt und welches ihre Grade sind; und jene Primfaktoren können mit jeder vorgegebenen Genauigkeit bestimmt werden (vgl. Hensel, „Theorie der algebraischen Zahlen", S. 66 u. ff.).

Es sei nun

$$F(x) = f_1(x, p) f_2(x, p) \dots f_\nu(x, p) \qquad (p)$$

eine Zerlegung von $F(x)$ in p-adische Primfaktoren, und $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ seien ihre Grade. Dann ist der Bereich $R(x, p)$ ein Zahlenring, welcher sich nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes auf die ν Kongruenzkörper

$$K_i(x, p) = K_i(x, \bmod f_i(x); p) \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

aller modulo $f_i(x)$ ganzen rationalen Funktionen von x mit p-adischen Koeffizienten, für diesen Modul $f_i(x)$ betrachtet, reduziert. Sind nämlich $1_1, 1_2, \dots, 1_\nu$ die in (6b) eingeführten Einheitsfunktionen, so ist jedes Element $v = v(x)$ von $R(x, p)$ eindeutig in der Form:

$$v \equiv v_1 \cdot 1_1 + v_2 \cdot 1_2 + \dots + v_\nu \cdot 1_\nu = (v_1, v_2, \dots, v_\nu) \pmod{F(x)}$$

darstellbar, wo allgemein v_i den Wert von v innerhalb des Körpers $K_i(x, p)$ bedeutet, und umgekehrt gehört zu jedem System $v_1, v_2, \dots, v_\nu$, dessen Elemente in den Körpern $K_1(x, p), \dots, K_\nu(x, p)$ ganz beliebig ausgewählt sind, ein einziges Element $v = (v_1, \dots, v_\nu)$, welches allgemein in $K_i(x, p)$ den Wert v_i hat. Hierdurch ist die allgemeine Aufgabe dieser Arbeit vollständig auf die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften aller Elemente eines p-adischen Kongruenzkörpers $K_i(x, p) = K_i(x, \bmod f_i(x); p)$ zurückgeführt, zu der ich jetzt übergehe.

Es sei jetzt $f(x, p)$ eine beliebige p-adische Primfunktion λ^{ten} Grades, und $K(x, p) = K(x, \bmod f(x); p)$ der zugehörige Kongruenzkörper λ^{ten} Grades. Ist nun $(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$, etwa $(1, x, \dots, x^{\lambda-1})$, irgendeine Basis desselben, so genügt jedes Element $v = v(x)$ desselben einer Hauptgleichung λ^{ten} Grades

$$g(t) = (-1)^\lambda |b_{ik} - \delta_{ik} t| = t^\lambda - b_1 t^{\lambda-1} + \dots + (-1)^\lambda b_\lambda = 0,$$

deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen p-adischen Funktion $g(t)$ ist.

Ich nenne nun ein Element v des Körpers $K(x, p)$ *algebraisch ganz*, wenn die irreduzible Funktion $g_0(t)$, deren Wurzel v ist, oder, was dasselbe ist, wenn die linke Seite ihrer Hauptgleichung $g(t) = n(t - v)$ *ganze* p-adische Zahlkoeffizienten hat; im anderen Falle heißt v ein gebrochenes Element. Die Untersuchung der Frage, ob ein vorgelegtes Element v ganz oder gebrochen ist, bietet beträchtliche Schwierigkeiten, solange v einem Ringe, etwa dem Ringe $R(x, p)$ angehört. In dem vorliegenden Falle wird diese Aufgabe dadurch wunderbar vereinfacht, daß nur festgestellt zu werden braucht, ob der letzte der λ Koeffizienten $(b_1, b_2, \ldots, b_\lambda)$, d. h. ob $n(v)$ eine ganze oder eine gebrochene p-adische Zahl ist. Es gilt nämlich der Fundamentalsatz:

Ein Element v des Körpers $K(x, p)$ ist algebraisch ganz oder gebrochen, je nachdem seine Norm $n(v)$ eine ganze oder gebrochene p-adische Zahl ist.

Dieser Satz kann folgendermaßen leicht bewiesen werden: Es sei $g(t) = g_0(t)^e$, und die irreduzible p-adische Funktion

$$g_0(t) = t^f + c_1 t^{f-1} + \ldots + c_f.$$

Ich setze allgemein $c_i = \frac{C_i}{C_0}$, wo C_0 den Generalnenner aller c_i bedeutet, also eine Potenz von p ist, und betrachte statt $g_0(t)$ die irreduzible *ganzzahlige* Funktion

$$G_0(t) = C_0 g_0(t) = C_0 t^f + C_1 t^{f-1} + \ldots + C_f,$$

deren Koeffizienten nicht alle p als Faktor enthalten. Ist nun einer der beiden äußeren Koeffizienten C_0 und C_f, für welchen offenbar C_f gewählt werden kann, durch p teilbar, so folgt aus der Irreduzibilität von $G_0(t)$, daß auch alle inneren Koeffizienten $C_1, \ldots, C_{f-1}$ p enthalten müssen, daß also $G_0(t) \equiv C_0 t^f \pmod p$ sein muß. Wäre nämlich C_r der letzte unter ihnen, welcher durch p nicht teilbar ist, so bestände für $G_0(t)$ die Kongruenz:

$$G_0(t) \equiv (C_0 t^r + \ldots + C_r) t^s \equiv H_0(t) K_0(t) \pmod p \quad (r + s = f),$$

$G_0(t)$ zerfiele also modulo p in zwei Faktoren $H_0(t)$ und $K_0(t) = t^s$, welche modulo p teilerfremd sind, da $(H_0(t), t^s)$ ein Teiler von

$$(H_0(t)^s, t^s) = (H_0(t), t)^s \quad \text{und} \quad (H_0(t), t) = (C_r, t) = 1$$

ist. Daher kann man durch das Euklidische Teilerverfahren zwei Funktionen, $H_1(t)$ und $K_1(t)$, von denen die letzte höchstens den $(s-1)^{\text{ten}}$

rad besitzt, so bestimmen, daß für die Funktionen $(H_0(t) + pH_1(t))$ und $K_0(t) + pK_1(t))$ die Kongruenz:

$$G_0(t) \equiv (H_0(t) + pH_1(t))(K_0(t) + pK_1(t)) \pmod{p^2}$$

esteht; denn hierzu müssen $H_1(t)$ und $K_1(t)$ nur die Bedingung:

$$H_0(t)K_1(t) + K_0(t)H_1(t) \equiv \frac{G_0(t) - H_0(t)K_0(t)}{p} \pmod{p}$$

rfüllen. In derselben Weise kann man beliebig weit fortfahren, d. h. an kann zwei ganze Funktionen mit p-adischen Koeffizienten

18) $$H(t) = H_0(t) + pH_1(t) + p^2H_2(t) + \ldots,$$
$$K(t) = K_0(t) + pK_1(t) + p^2K_2(t) + \ldots$$

bestimmen, daß $G_0(t) = H(t) \cdot K(t) \ (p)$ ist; von diesen beiden Fakoren ist der letzte genau vom s^{ten} Grade, weil sein Anfangsglied $K_0(t) = t^s$ iesen Grad hat, während alle folgenden Glieder $K_i(t)$ höchstens bis zum $s-1)^{\text{ten}}$ Grade ansteigen; hieraus folgt weiter, daß der komplementäre aktor $H(t)$ genau vom r^{ten} Grade sein muß. Da dieses Ergebnis mit er vorausgesetzten Unzerlegbarkeit von $G(t)$ im Widerspruch steht, so lgt ohne weiteres die Richtigkeit des obigen Satzes, welcher jetzt so usgesprochen werden kann:

19) *Zerfällt eine ganze ganzzahlige p-adische Funktion $G_0(x)$ modulo p n das Produkt $H_0(x)K_0(x)$ von zwei teilerfremden Faktoren niedrigeren rades, so zerfällt sie auch für den Bereich von p in ein Produkt $(x)K(x)$ von zwei teilerfremden p-adischen Faktoren derselben Grade, eren Näherungswerte modulo p die vorigen Faktoren $H_0(x)$ und $K_0(x)$ ind.*

Durch diesen Satz wird die Untersuchung der ganzen Zahlen sowie lle Fragen der Teilbarkeit im Körper $K(x, p)$ außerordentlich einfach nd durchsichtig, denn man braucht nur die für die p-adischen Zahlen $(v), n(w), \ldots$ geltenden Definitionen und Sätze auf die algebraischen lemente $v, w, \ldots$ zu übertragen. Es sollen daher nur jene Sätze kurz usgesprochen werden:

Von zwei reziproken Elementen v und $\frac{1}{v}$ ist stets wenigstens eins gebraisch ganz. Das Produkt zweier ganzen Elemente ist wieder ganz. t v ganz, so gilt dasselbe für $1 - v$ und $1 + v$, weil dann $n(t - v) = g(t)$ anzzahlige Koeffizienten hat, also $n(1 - v) = g(1)$ ganz ist. Hieraus lgt, daß auch die Summe $v + w$ von zwei ganzen Elementen ganz ist, eil dann $v + w = v\left(1 + \frac{w}{v}\right)$ ganz ist, wobei $\frac{w}{v}$ als ganz vorausgesetzt erden kann. Also bilden die ganzen Elemente von $K(x, p)$ einen Ring.

Von zwei Elementen v und w heißt das erste durch das zweite teilbar, wenn $\frac{v}{w}$ ganz, wenn also $n(v)$ durch $n(w)$ teilbar ist; sie heißen äquivalent, wenn jede durch die andere teilbar ist, wenn also ihre Normen gleiche Ordnungszahl haben. Ein Element ε heißt eine Einheit, wenn $n(\varepsilon)$ eine p-adische Einheit ist. Alle Einheiten bilden also eine Gruppe, da sie sich durch Multiplikation und Division wiedererzeugen. Äquivalente Elemente unterscheiden sich also nur durch einen Einheitsfaktor.

Da die Norm jedes ganzen Elementes, welches keine Einheit ist, eine positive Ordnungszahl besitzt, so muß es mindestens eine solche π geben, für welche die Ordnungszahl von $n(\pi)$ positiv und möglichst klein ist. Jedes solche Element soll eine Primzahl im Körper $K(p)$ heißen, und die Ordnungszahl f ihrer Norm werde ihr Grad genannt. Der Körper $K(x, p)$ enthält unendlich viele solche Primzahlen $\pi, \pi', \ldots$, aber alle sind untereinander äquivalent; ist also π ein Primteiler, so sind alle anderen in der Form $\pi' = \varepsilon\pi$ enthalten. Allgemeiner ist jedes Element v des Körpers $K(p)$ eindeutig in der Form darstellbar:

$$v = \varepsilon\pi^a,$$

wo a eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche dann und nur dann nicht negativ ist, wenn v algebraisch ganz ist. a heißt die Ordnungszahl von v. Die Ordnungszahl eines Produktes (Quotienten) zweier Zahlen v und w ist also die Summe (Differenz) der Ordnungszahlen der beiden Komponenten v und w. Hat $v = \varepsilon\pi^a$ die Ordnungszahl a, so ist af diejenige ihrer Norm. Ist also speziell $p = \varepsilon\pi^e$, ist also e die Ordnungszahl von p im Körper $K(x, p)$, so besitzt $n(p) = p^\lambda$ die Ordnungszahl ef, es ist also $\lambda = ef$. Die Zahl e soll im folgenden die Ordnung der Primzahl π genannt werden. Das Produkt ef der Ordnung und des Grades der Primzahl π ist also stets gleich dem Grade λ des Körpers $K(x, p)$.

Im Körper $K(x, p)$ verliert hiernach die reelle Zahl p ihren Primzahlcharakter stets und nur dann, wenn $e > 1$ ist, und an ihre Stelle tritt in jedem Falle die zugehörige Primzahl π oder jede ihr äquivalente, während p äquivalent der Primzahlpotenz π^e wird. Die Untersuchung der Teilbarkeitsbeziehungen der Elemente v des Kongruenzkörpers $K(x, p)$, welche den Gegenstand dieser Arbeit bildet, wird also vollständig durch diejenige jener Elemente zu einer Primzahl π ersetzt, zu der ich jetzt übergehe.

Diese Untersuchung erfordert zunächst eine vollständige Übersicht über alle *ganzen* Elemente des Körpers $K(x, p)$. Ist nun $(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ irgendeine Basis von lauter ganzen Elementen, so sind in der Form $c_1x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda$ mit ganzzahligen p-adischen Koeffizienten unendlich viele ganze Elemente des Körpers enthalten, welche alle voneinander ver-

chieden sind, im allgemeinen jedoch noch nicht alle ganzen Größen. Man zeigt nun auf dem bekannten Wege, der sich aber hier noch sehr wesentlich einfacher gestaltet, daß man jene ganzzahlige Basis (x_i) von vornherein so auswählen kann, daß in der obigen Form $c_1 x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda$ *alle* ganzen Elemente des Körpers enthalten sind. Eine solche Basis, welche stets durch eine endliche Anzahl von Versuchen gefunden werden kann, heißt ein Fundamentalsystem für den Körper $K(x, p)$.

Unter Zugrundelegung eines solchen Fundamentalsystems $(x_1, \ldots, x_\lambda)$ kann nun die Untersuchung der Teilbarkeitsbeziehungen aller Elemente v zu der Primzahl π genau ebenso durchgeführt werden, wie diejenige der p-adischen Zahlen in bezug auf p, und sie führt zu genau den gleichen Ergebnissen. Ein ganzes oder gebrochenes Element $v = c_1 x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda$ heißt durch eine beliebige Primzahlpotenz π^b teilbar, wenn $\frac{v}{\pi^b} = d_1 x_1 + \ldots + d_\lambda x_\lambda$ ganz ist, also ganzzahlige Koeffizienten d_i hat. Speziell ist also v durch $p^\nu \sim \pi^{\nu e}$ teilbar, wenn $\frac{v}{p^\nu} = \frac{c_1}{p^\nu} x_1 + \ldots + \frac{c_\lambda}{p^\nu} x_\lambda$ ganz ist, wenn also alle λ Koeffizienten c_i den Teiler p^ν enthalten. Hieraus folgt, daß ein Element $= \Sigma c_i x_i$ dann und nur dann durch jede noch so hohe Potenz von p, also auch von π teilbar ist, wenn das gleiche für alle ihre Koeffizienten c_i gilt, wenn also diese sämtlich verschwinden, oder wenn $v = 0$ ist. Hieraus folgt sofort:

Zwei Elemente v und w sind stets und nur dann gleich, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von π kongruent sind.

Hierdurch erlangt man die Möglichkeit, die Elemente v des Körpers $K(p, x)$ in genau derselben Weise wie die rationalen p-adischen Zahlen durch Reihen darzustellen, welche nach steigenden Potenzen der Primzahl π fortschreiten. Hierzu führt die Untersuchung der ganzen Zahlen dieses Körpers für die Primzahl π als Modul und die Aufstellung eines vollständigen Restsystems modulo π.

Es sei wieder $(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ ein Fundamentalsystem für $K(x, p)$; dann bildet der Bereich aller ganzen Zahlen $\gamma = c_1 x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda$ modulo π betrachtet einen, und zwar einen endlichen Kongruenzkörper $K(\gamma, \mathrm{mod}\,\pi)$, in jedes solche Element γ für diesen Modul demjenigen unter den p Elementen:

$$c_1^{(0)} x_1 + \ldots + c_\lambda^{(0)} x_\lambda \qquad (c_i^{(0)} = 0, 1, \ldots, p-1)$$

kongruent ist, dessen Koeffizienten $c_i^{(0)}$ die Anfangsglieder der p-adischen Koeffizienten $c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} p + \ldots$ sind; diese p^λ Elemente bilden auch ein vollständiges Restsystem modulo π, wenn keines von ihnen außer null durch π teilbar ist. Ist das nicht der Fall, besteht also zwischen den Elementen x_i wenigstens eine lineare Relation:

$$d_1 x_1 + \ldots + d_\lambda x_\lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \qquad (d_i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

in welcher etwa d_λ nicht Null ist, so ist das System $(x_1, \ldots, x_{\lambda-1}, x_\lambda)$ äquivalent dem kleineren Systeme $(x_1, \ldots, x_{\lambda-1})$, wenn zwei solche Systeme äquivalent heißen, falls jedes durch das erste modulo π homogen und linear darstellbare Element auch durch das zweite in gleicher Weise dargestellt werden kann. Durch Fortsetzung dieser Reduktion ergibt sich zuletzt, daß aus dem Fundamentalsystem $(x_1, \ldots, x_\mathfrak{f}, \ldots, x_\lambda)$ ein ihm modulo π äquivalentes $(x_1, \ldots, x_\mathfrak{f})$ nicht weiter reduzierbares System von nur $\mathfrak{f}$ Elementen ausgewählt werden kann, welches in der Weise ein Fundamentalsystem modulo π bildet, daß jedes ganze Element γ einer einzigen unter den $p^\mathfrak{f}$ inkongruenten Größen

$$\varepsilon = d_1 x_1 + \ldots + d_\mathfrak{f} x_\mathfrak{f}$$

modulo π kongruent ist, daß diese also modulo π ein vollständiges Restsystem

$$(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(\sigma-1)}) \qquad (\sigma = p^\mathfrak{f}) \tag{20}$$

bilden.

Es sei nun $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ eine unendliche Reihe von Elementen dieses Restsystems (20). Dann ist die aus ihnen gebildete unendliche Reihe

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \pi + \varepsilon_2 \pi^2 + \ldots$$

einer bestimmten ganzen Zahl γ des Bereiches $K(p, x)$ gleich. In der Tat sind ja alle einzelnen Summanden:

$$\varepsilon_i \pi^i = c_1^{(i)} x_1 + \ldots + c_\lambda^{(i)} x_\lambda$$

Elemente dieses Bereiches, deren Koeffizienten $c^{(i)}$ ganze p-adische Zahlen sind, welche mit wachsendem Index i durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar werden, weil diese Zahlen durch die Reihe von unbegrenzt wachsenden Potenzen π^i algebraisch teilbar sind. Also ergibt sich für die obige Reihe in der Tat eine Darstellung:

$$\sum \varepsilon_i \pi^i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_\lambda x_\lambda = \gamma,$$

deren Koeffizienten $c_k = \sum_0^\infty c_k^{(i)}$ bestimmte ganze p-adische Zahlen sind, und diese Zahl γ besitzt modulo π^k den Näherungswert

$$\gamma \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \pi + \ldots + \varepsilon_{k-1} \pi^{k-1} \pmod{\pi^k} \tag{21}$$

für jeden Modul π^k. Hieraus folgt, daß zwei solche Reihen nur dann dieselbe Zahl γ darstellen, wenn sie identisch sind. Jede solche Reihe soll *eine ganze π-adische Zahl* genannt werden.

Umgekehrt ist jedes ganze Element γ des Körpers $K(p, x)$ einer

eindeutig bestimmten ganzen π-adischen Zahl gleich. In der Tat besteht ür jedes γ eine eindeutig bestimmte Gleichung:

$$\gamma = \varepsilon_0 + \pi\gamma^{(1)},$$

wo ε_0 dem Restsysteme (20) angehört, und $\gamma^{(1)}$ wieder ganz ist; und durch Fortsetzung desselben Verfahrens ergibt sich eine unbegrenzte Reihe von entsprechenden Gleichungen:

$$\gamma^{(i)} = \varepsilon_i + \pi\gamma^{(i+1)},$$

aus denen die für jeden Exponenten k gültige Gleichung:

$$\gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \ldots + \varepsilon_{k-1}\pi^{k-1} + \gamma^{(k)}\pi^k$$

oder die Kongruenz:

(21a) $$\gamma \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \ldots + \varepsilon_{k-1}\pi^{k-1} \pmod{\pi^k}$$

hervorgeht. Hieraus, in Verbindung mit (21) folgt, daß dieses Element γ des Bereiches $K(p, x)$ gleich der aus diesem Koeffizienten ε_i gebildeten p-adischen Zahl $\sum \varepsilon_i \pi^i$ ist, weil beide Zahlen für jede noch so hohe Potenz π^k als Modul kongruent sind. Offenbar gilt derselbe Satz auch für gebrochene Elemente des Körpers $K(p, x)$.

Aus der für jeden Modul gültigen Kongruenz (21) folgt noch weiter, daß die Anzahl aller modulo π^k inkongruenten ganzen Elemente von $K(p, x)$ gleich p^{fk} ist; und da dieselbe Anzahl für den Modul $p \sim \pi^e$ offenbar gleich $p^\lambda = p^{fe}$ wird, so muß $\mathfrak{f} = f$ sein.

Ist also $\sigma = p^f$ die Anzahl der Elemente eines vollständigen Restsystems modulo π, so ist f der Grad dieser Primzahl.

Der Körper $K(\pi) = K(x, p)$ ist ein algebraischer Körper λ^{ten} Grades über dem Körper $K(p)$ der rationalen p-adischen Zahlen, welcher seinerseits ein transzendenter Körper über $K(1)$ war.

Jede rationale Funktion $\varphi(x)$ mit p-adischen Koeffizienten ist modulo $f(x, p)$ kongruent einer eindeutig bestimmten π-adischen Zahl. Hiernach ist also speziell x selbst für diesen Modul kongruent einer Zahl

$$x \equiv \alpha_1 \equiv \varepsilon_a\pi^a + \varepsilon_{a+1}\pi^{a+1} + \ldots \pmod{f(x, p)},$$

und somit $f(\alpha_1, p) \equiv f(x, p) \equiv 0 \pmod{f(x, p)}$, oder α_1 ist im Körper $K(\pi)$ eine Wurzel der Gleichung $f(x, p) = 0$; daher ist

(22) $$f(x, p) \equiv f(x, p) - f(\alpha_1, p) \equiv (x - \alpha_1)\overline{f}(x, \alpha_1) \pmod{f(x, p)},$$

d. h. $f(x, p)$ besitzt im Körper der π-adischen Zahlen mindestens den einen Linearfaktor $(x - \alpha_1)$.

III. Die zu einer Gleichung gehörigen π-adischen Galoisschen Körper und die in ihnen enthaltenen Kreisteilungskörper.

Die Ausführungen des vorigen Abschnittes sollen jetzt zur Bildung eines solchen Erweiterungskörpers $K(\pi)$ von π-adischen Zahlen benutzt werden, daß in ihm die linke Seite der vorgelegten Gleichung $F(x)$ vollständig, d. h. in ein Produkt $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$ von n Linearfaktoren zerfällt.

Zerlegen wir die Funktion $F(x)$, wie in II. im Körper $K(p)$ eindeutig in das Produkt von p-adischen Primfaktoren

$$F(x) = f_1(x, p)\dots f_\nu(x, p) \qquad (p), \tag{23}$$

und sind diese bereits alle vom ersten Grade, ist also $\nu = n$, so ist die hier gestellte Aufgabe bereits durch den Körper $K(p)$ gelöst. Ist dagegen $\nu < n$, so sei etwa der Grad λ_1 von $f_1(x, p)$ größer als Eins. Dann sei der zugehörige Kongruenzkörper des λ_1^{ten} Grades

$$K_p(x, \bmod f_1(x, p)) = K(\pi_1)$$

gleich dem algebraischen π_1-adischen Körper vom λ_1^{ten} Grade, dessen Primzahl π_1 die Ordnung e_1 und den Grad f_1 hat, so daß $e_1 f_1 = \lambda_1$ ist. Zerlegt man nun die Grundfunktion $F(x)$ in dem Oberkörper $K(\pi_1)$ von $K(p)$ wiederum in ihre π_1-adischen Primfaktoren, was genau auf dem im vorigen Abschnitt für $K(p)$ angegebenen Wege mit jeder vorgegebenen Annäherung durch eine endliche Anzahl von Versuchen ausgeführt werden kann, so erhält man eine neue Zerlegung:

$$F(x) = f_1^{(1)}(x, \pi_1)\dots f_{\nu_1}^{(1)}(x, \pi_1) \qquad (\pi_1), \tag{23a}$$

welche, weil $K(\pi_1)$ ein Oberkörper von $K(p)$ ist, darin besteht, daß jeder der p-adischen Faktoren $f_i(x, p)$ in (23) jetzt noch weiter, und zwar wieder nur in verschiedene π_1-adische Primfaktoren zerfällt. Die Anzahl ν_1 dieser neuen Primfaktoren ist sicher größer als ν, da von jenen ν ersten Primfaktoren jedenfalls $f_1(x, p) = (x-\alpha_1)\bar{f}_1(x, \pi_1)$ wegen (22) mindestens in zwei π_1-adische Faktoren zerfällt. Ist jetzt $\nu_1 = n$, so zerfällt $F(x)$ in $K(\pi_1)$ vollständig in Linearfaktoren und die Aufgabe ist gelöst.

Es sei also jetzt auch $\nu_1 < n$, und $f^{(1)}(x, \pi_1)$ sei irgendeiner dieser ν_1 irreduziblen π_1-adischen Faktoren $f_i^{(1)}(x, \pi_1)$, dessen Grad λ_2 größer als 1 ist; dann ist der zugehörige Kongruenzkörper $K(x, \bmod f^{(1)}(x, \pi_1)) = K(x, \pi_1)$ aller modulo $f^{(1)}(x, \pi_1)$ ganzen Funktionen von x mit π_1-adischen Koeffizienten für den Modul $f^{(1)}(x, \pi_1)$ betrachtet, ebenfalls vom λ_2^{ten} Grade, und jedes Element v desselben genügt einer Hauptgleichung vom λ_2^{ten} Grade, mit π_1-adischen Koeffizienten, deren linke Seite selbst irredu-

ibel, oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist; der mit $(-1)^{\lambda_2}$ nultiplizierte letzte Koeffizient der Hauptgleichung ist eine π_1-adische Zahl, welche wieder die Norm von v (in bezug auf $K(\pi_1)$) genannt und durch $n_{\pi_1}(v)$ bezeichnet werde. Auch hier nenne ich v ganz oder gebrochen n bezug auf $K(\pi_1)$, je nachdem alle Koeffizienten der Hauptgleichung ganze π_1-adische Zahlen sind oder nicht, und ich beweise wörtlich ebenso vie in II., daß v dann und nur dann algebraisch ganz ist, wenn $n(v)$ ine ganze π_1-adische Zahl ist. Hieraus folgt, daß alle an diesen Satz geknüpften Folgerungen sowie die auf ihn aufgebauten Definitionen auch ür den Körper $K(x, \pi_1)$ ihre Gültigkeit behalten.

Unter den ganzen Elementen von $K(x, \pi_1)$ gibt es also wieder mindestens eines π_2, dessen Norm von positiver, aber möglichst kleiner Ordnung f_2 ist, so daß also $n_{\pi_1}(\pi_2) \sim \pi_1^{f_2}$ wird. Eine solche Zahl heißt eine Primzahl des Bereiches $K(x, \pi_1)$, und f_2 wird ihr Grad genannt. Jedes andere Element v ist dann eindeutig in der Form $v = \varepsilon_2 \pi_2^{a_2}$ darstellbar, wo ε_2 eine Einheit, a_2, die Ordnungszahl von v, eine ganze Zahl oder Null bedeutet. Ist speziell $\pi_1 = \varepsilon_2 \pi_2^{e_2}$ die entsprechende Darstellung der früheren Primzahl π_1, so heißt e_2 die Ordnung der Primzahl π_2 in bezug auf $K(\pi_1)$; auch hier ist $e_2 f_2 = \lambda_2$. Das Element π_1 verliert also im Körper $K(x, \pi_1)$ wieder seinen Primzahlcharakter; es wird aber einer Potenz der neuen Primzahl π_2 äquivalent. Endlich wird $p = \varepsilon_1 \pi_1^{e_1} = \varepsilon_1 \varepsilon_2^{e_1} \pi_2^{e_1 e_2} \sim \pi_1^{e_1 e_2}$, und $n_p n_{\pi_1}(\pi_2) \sim p^{f_1 f_2}$.

Im Körper des λ_2^{ten} Grades $K(x, \pi_1)$ kann man wieder eine Basis von λ_2 ganzen Elementen $(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_2})$ so finden, daß in der homogenen linearen Form

$$\gamma = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_{\lambda_2} x_{\lambda_2}$$

mit *ganzzahligen* π_1-adischen Koeffizienten d_i alle ganzen Zahlen dieses Körpers enthalten sind; eine solche Basis werde ein Fundamentalsystem von $K(x, \pi_1)$ in bezug auf den Körper $K(\pi_1)$ genannt. Unter ihnen kann man genau f_2 Elemente $(x_1, \ldots, x_{f_2})$ so auswählen, daß die $p^{f_1 f_2}$ Elemente:

(23b) $\quad d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_{f_2} x_{f_2} \quad (d_i = (\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(\sigma_1 - 1)})), \quad \sigma_1 = p^{f_1}$

ein vollständiges Restsystem modulo π_2 bilden, wenn die Koeffizienten d_i ein vollständiges Restsystem modulo π_1 in dem Koeffizientenkörper $K(\pi_1)$ durchlaufen. Die Anzahl aller modulo π_2 inkongruenten ganzen Zahlen des Kongruenzkörpers $K(x, \pi_1)$ ist also $\sigma_2 = p^{f_1 f_2}$, und die σ_2 Elemente des soeben in (23b) gefundenen Restsystems mögen durch

$$(\varepsilon_2^{(i)}) = (\varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_2^{(1)}, \ldots, \varepsilon_2^{(\sigma_2 - 1)})$$

bezeichnet werden.

Hieraus folgt endlich, genau wie auf S. 444, daß jedes Element γ des

Kongruenzkörpers $K(x, \pi_1)$ einer eindeutig bestimmten π_2-adischen Zahl

$$\gamma = \varepsilon_a^{(2)} \pi_2^a + \varepsilon_{a+1}^{(2)} \pi_2^{a+1} + \dots \qquad (\pi_2)$$

modulo $f_1^{(1)}(x, \pi_1)$ kongruent ist, deren Koeffizienten eindeutig bestimmte Zahlen des Restsystems $(\varepsilon_2^{(i)})$ sind, und daß auch umgekehrt jede π_2-adische Zahl einem Elemente von $K(x, \pi_1)$ gleich wird, daß also $K(x, \pi_1)$ dem π_2-adischen Zahlkörper $K(\pi_2)$ gleich wird. Derselbe ist also ein algebraischer Körper des λ_2^{ten} Grades über $K(\pi_1)$, dessen Primzahl π_2 in bezug auf jenen die Ordnung e_2 und den Grad f_2 hat. Da ferner $K(\pi_1)$ ein algebraischer Körper des Grades λ_1 über $K(p)$ ist, so ist der Körper $K(\pi_2)$ ein algebraischer Körper des Grades $\lambda_1 \lambda_2$ über $K(p)$. Ferner beweist man wie auf S. 445, daß $f^{(1)}(x, \pi_1)$ in dem Körper $K(\pi_2)$ den Linearfaktor $x - \alpha_2$ hat, wenn α_2 die π_2-adische Entwicklung des Elementes x ist. Hieraus folgt, daß in diesem neuen Erweiterungskörper $K(\pi_2)$ die Grundfunktion $F(x)$ ähnlich wie in (23) und (23a) in ein Produkt

$$F(x) = f_1^{(2)}(x, \pi_2) \dots f_{\nu_2}^{(2)}(x, \pi_2) \qquad (\pi_2) \tag{23c}$$

von ν_2 π_2-adischen Primfaktoren so zerfällt, daß jeder der Primteiler $f_i^{(1)}(x, \pi_1)$ von (23a) noch weiter zerlegt wird; und da wenigstens der erste von ihnen mindestens in zwei solche Faktoren zerfällt, weil sich von ihm der Linearfaktor $x - \alpha_2$ abspaltet, so ist $\nu_2 > \nu_1$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich nach einer endlichen Zahl von Schritten ein π-adischer Zahlkörper von der Art, daß in ihm die Funktion $F(x)$ vollständig zerfällt, daß also eine Gleichung besteht:

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \qquad (\pi) \tag{24}$$

in welcher alle α_i eindeutig bestimmte π-adische Zahlen sind. Der hier gefundene Zerlegungskörper $K(\pi)$ ist ein algebraischer Körper über $K(p)$, dessen Grad gleich λ sei; seine Primzahl π möge die Ordnung e und den Grad f in bezug auf $K(p)$ besitzen, d. h. es möge $p \sim \pi^e$ sein, und die Anzahl aller modulo π inkongruenten ganzen Zahlen sei $\sigma = p^f$. Dann ist wieder $ef = \lambda$.

Die genauere algebraische Untersuchung der π-adischen Zahlkörper $K(\pi)$ zeigt nun, daß sie stets sehr einfache Kreisteilungskörper als Unterkörper enthalten, deren Kenntnis für die höhere Zahlentheorie von größter Bedeutung ist. Ist nämlich der Grad der Primzahl π wieder gleich f und seine Ordnung gleich e, so besteht der Satz:

Der Körper $K(\pi)$ enthält den Körper $K(w, p)$ der primitiven $(p^f - 1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln mit p-adischen Koeffizienten als Unterkörper. Derselbe ist ein algebraischer Körper f^{ten} Grades über $K(p)$, während $K(\pi)$ ein Körper e^{ten} Grades über $K(w, p)$ ist.

Es sei nämlich wieder $\sigma = p^f$ und $(\varepsilon^{(0)} = 0, \varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(\sigma-1)})$ irgendein vollständiges Restsystem modulo π für die ganzen Zahlen von $K(\pi)$. Dann genügt jede Einheit ε dieses Körpers modulo π nach dem kleinen Fermatschen Satze der Kongruenz:

$$H(x) = x^{p^f-1} - 1 \equiv 0 \pmod{\pi}, \tag{25}$$

es besteht also modulo π die Zerlegung:

$$H(x) \equiv \prod_{i=1}^{\sigma-1} (x - \varepsilon^{(i)}) \pmod{\pi}, \tag{25a}$$

aus welcher hervorgeht, daß die (p^f-1) inkongruenten Einheiten $\varepsilon^{(i)}$ modulo π sämtlich $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln sind. Ist speziell ε eine primitive $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, so sind die f Einheiten $\varepsilon, \varepsilon^p, \ldots, \varepsilon^{p^{f-1}}$ sämtlich modulo π inkongruent, und es ist erst $\varepsilon^{p^f} \equiv \varepsilon \pmod{\pi}$.

Es sei ferner:

$$H(x) = x^{p^f-1} - 1 \equiv \prod h_i(x) \pmod{p} \tag{25b}$$

die eindeutige Zerlegung derselben Funktion $H(x)$ in ihre ganzzahligen Primfaktoren modulo p. Dann sind auch diese alle modulo p inkongruent, und jeder von ihnen zerfällt modulo π vollständig in Linearfaktoren $x - \varepsilon^{(i)}$. Ist $h(x)$ derjenige unter ihnen, dessen Wurzel eine primitive Einheitswurzel ε ist, so folgt aus der dann bestehenden Kongruenz:

$$0 \equiv h(\varepsilon)^p \equiv h(\varepsilon^p) \pmod{\pi},$$

daß $h(x)$ die f Potenzen $(\varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^{p^2}, \ldots, \varepsilon^{p^{f-1}})$ als Wurzeln hat, und da schon ihre elementaren symmetrischen Funktionen modulo π rationalen ganzen Zahlen kongruent sind, so ergibt sich für $h(x)$ die Darstellung:

$$h(x) \equiv (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^p) \ldots (x - \varepsilon^{p^{f-1}}) \pmod{\pi}. \tag{26}$$

Wendet man nun auf die beiden Zerlegungen modulo π in (25a) und modulo p in (25b) von $H(x)$ den Satz (19) auf S. 441 an, so ergibt sich, daß aus jeder von ihnen eine entsprechende Zerlegung für den Bereich von π bzw. von p folgt, und hieraus erhält man leicht den Beweis unserer Behauptung. In der Tat folgt zuerst aus (25a) eine Zerlegung von $H(x)$ für den Bereich von π in Linearfaktoren:

$$H(x) = x^{p^f-1} - 1 = \prod_{1}^{\sigma-1} (x - w_i) \quad (\pi), \tag{27}$$

in welcher die σ Nullstellen:

$$w_i = \varepsilon^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)}\pi + \varepsilon_2^{(i)}\pi^2 + \ldots \tag{27a}$$

als Anfangsglieder $\varepsilon^{(i)}$ die $(\sigma - 1)$ inkongruenten Einheiten modulo π besitzen, und hieraus geht hervor, daß im Körper $K(\pi)$ in der Tat genau (p^f-1)

$(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln enthalten sind. Ist ε eine primitive Einheitswurzel modulo π und $w=\varepsilon+\varepsilon_1\pi+\ldots$ die zugehörige π-adische Einheitswurzel, so ist auch sie eine primitive $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel; also bilden auch die p^f Zahlen: $(0, 1, w, w^2, \ldots, w^{p^f-2})$ ein vollständiges Restsystem modulo π, und dieses kann und soll im folgenden statt des Systems $(\varepsilon^{(\varkappa)})$ zugrunde gelegt werden.

Ebenso folgt aus der Zerlegung (25 b) von $H(x)$ modulo p durch die Anwendung desselben Satzes (19), daß für dieselbe Funktion für den Bereich von p eine entsprechende Zerlegung in p-adische Primfaktoren

$$H(x)=\prod \bar{h}_i(x) \qquad (p) \tag{28}$$

besteht, in welchen allgemein

$$\bar{h}_i(x)=h_i(x)+p\,h_i^{(1)}(x)+\ldots \tag{28a}$$

ist, so daß also die Anfangsglieder $h_i(x)$ der einzelnen Faktoren die entsprechenden in (25 b) auftretenden Primfaktoren sind. Auch hier besitzt jeder dieser Primfaktoren $h_i(x)$ so viele Einheitswurzeln w als Nullstellen, als sein Grad angibt, und dann und nur dann ist $w=\varepsilon+\varepsilon_1\pi+\ldots$ eine Wurzel dieser Gleichung $\bar{h}(x)=0$, wenn ihr Anfangsglied der zugehörigen Kongruenz $h(x)\equiv 0 \pmod{\pi}$ genügt.

Hieraus folgt: Ist $w=\varepsilon+\varepsilon_1\pi+\ldots$ eine primitive $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel und $\bar{h}(x)=0$ die zugehörige irreduzible p-adische Gleichung, so besitzt diese im ganzen die f Wurzeln $(w, w^p, \ldots, w^{p^{f-1}})$, und es besteht die Zerlegung:

$$\bar{h}(x)=(x-w)(x-w^p)\ldots(x-w^{p^{f-1}}) \qquad (\pi). \tag{29}$$

Also ist in der Tat der durch w konstituierte Körper $K(p, w)$ genau vom f^{ten} Grade in bezug auf $K(p)$; in ihm ist p Primzahl, und w selbst ist ein primitives Element desselben; hieraus folgt von selbst, daß $K(\pi)$ genau vom e^{ten} Grade in bezug auf $K(p, w)$ ist, und man erkennt leicht, daß π selbst ein primitives Element dieses Körpers in bezug auf $K(p, w)$ sein muß; denn genügte π innerhalb $K(p, w)$ einer Gleichung von niedrigerem als dem e^{ten} Grade, so wären für ein $k<e$ $(1, \pi, \ldots, \pi^k)$ linear abhängig; es bestünde also zwischen diesen Elementen eine homogene lineare Gleichung $g(\pi)=d_0+d_1\pi+\ldots+d_k\pi^k=0$, deren Koeffizienten d_i als ganze Zahlen von $K(p, w)$ angenommen werden können, von denen mindestens einer eine Einheit ist; ist aber d_i die Einheit vom kleinsten Index, so sieht man sofort, daß $g(\pi)\equiv d_i\pi^i \gtrless 0 \pmod{\pi^{i+1}}$ ist, und damit ist der Beweis geführt.

IV. Jede Gleichung ist in jedem p-adischen Zahlkörper algebraisch auflösbar.

Ich benutze jetzt die bisher durchgeführten Untersuchungen zum Beweise des folgenden wichtigen Satzes, durch den der enge Zusammenhang zwischen der Theorie der p-adischen Zahlen mit der Galoisschen Theorie deutlich hervortritt:

Jede algebraische Gleichung $F(x)$ ist im Körper der p-adischen Zahlen algebraisch auflösbar.

Der Beweis braucht nur für eine der irreduziblen Gleichungen $f(x, p) = 0$ geführt zu werden, deren linke Seite einer der p-adischen Primfaktoren von $F(x)$ ist.

Es sei nun $K(\pi)$ ein Galoisscher π-adischer Zahlkörper, in dem also $f(x, p)$ in Linearfaktoren zerfällt. Ist λ sein Grad, und sind wieder e und f die Ordnung und der Grad der zugehörigen Primzahl π, so ist $K(\pi)$ ein Körper e^{ten} Grades über dem Körper $K(p, w)$, welcher aus $K(p)$ durch Adjunktion der $(p^f - 1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzel w hervorgeht. Da somit w Wurzel einer auflösbaren Gleichung ist, so ist nur noch zu zeigen, daß der Körper e^{ten} Grades $K(\pi)$ über $K(p, w)$ ebenfalls auflösbar ist. Dieser Beweis soll jetzt geführt werden.

Es sei $\pi = \pi_0$ eine beliebige Primzahl des Körpers $K(\pi)$, also ein primitives Element desselben, und

$$\psi(x) = (x - \pi_0)(x - \pi_1) \dots (x - \pi_{e-1}) \qquad (\pi) \tag{30}$$

die in $K(p, w)$ irreduzible Gleichung, welcher π genügt. Jedes der e zu π konjugierten Elemente π_i ist ebenfalls eine Primzahl, welche also mit π durch eine Gleichung

$$\pi_i = w_i \pi + w_i' \pi^2 + \dots \qquad (\pi) \tag{31}$$

zusammenhängt, in der w_i eine $(p^f - 1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, während die übrigen Koeffizienten auch zum Teil Null sein können. Die Gleichung $\psi(x) = 0$ ist eine Galoissche Resolvente der Grundgleichung. Ist also σ_i allgemein die Substitution, welche π in π_i überführt, so daß also $\pi/\sigma_i = \pi_i$ ist, so ist $G_1 = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{e-1})$ die zu untersuchende Gruppe der Gleichung; es ist also zu zeigen, daß zu ihr eine Fundamentalreihe $(G_1, G_2, G_3, \dots)$ von Normalteilern von der Art gehört, daß die komplementären Gruppen G_i/G_{i+1} kommutative oder Abelsche Gruppen sind.

Jede zwischen den konjugierten Elementen π_i bestehende ganzzahlige Gleichung im Körper $K(p, w)$ bleibt bei Anwendung irgendeiner Substitution σ_k der Galoisschen Gruppe ungeändert. Dasselbe gilt auch für jede Kongruenz für einen beliebigen Modul π^r, da ja eine solche eine Gleichung:

$$\Phi(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{s-1}) = \pi^r \cdot g(\pi)$$

vertritt, deren rechte Seite bei jener Substitution in $\pi_k^r \cdot g(\pi_k)$ übergeht, also ebenfalls durch π^r teilbar ist.

Um nun den Beweis für die Auflösbarkeit der Gruppe G_1 zu erbringen, fasse ich in einem Teilbereich G_k alle und nur die Substitutionen $(\sigma^{(k)})$ zusammen, für welche die zugehörigen $\pi' = \pi/\sigma^{(k)} = \pi + w_k \pi^k + \ldots$ mindestens modulo π^k kongruent π sind. Dann fällt der erste dieser Teilbereiche offenbar mit G_1 selbst zusammen, und von einem gewissen k ab sind alle G_k gleich der Einheitsgruppe (σ_0), da alle konjugierten π' von π verschieden sind.

Jeder dieser Teilbereiche G_k ist eine Gruppe, da aus

$$(32) \quad \pi/\sigma_1^{(k)} \equiv \pi \quad \text{und} \quad \pi/\sigma_2^{(k)} \equiv \pi \quad \text{sofort} \quad \pi/\sigma_1^{(k)}\sigma_2^{(k)} \equiv \pi/\sigma_2'^{(k)} \equiv \pi \pmod{\pi^k}$$

folgt, ferner ist jede Gruppe G_{k+1} ein Teiler der nächst vorhergehenden G_k, da jede Kongruenz modulo π^{k+1} auch modulo π^k gilt.

Sind endlich σ_1 und σ_2 irgendwelche zwei Substitutionen von G_k, so gelten nach der Annahme, je nachdem $k = 1$ oder $k > 1$ ist, die Kongruenzen:

$$(33) \quad \begin{cases} \pi/\sigma_1 \equiv w_1\pi, \ \pi/\sigma_2 \equiv w_2\pi, \ \text{also} \ \pi/\sigma_1\sigma_2 \equiv \pi/\sigma_2\sigma_1 \equiv w_1 w_2 \pi \pmod{\pi^2}; \\ \qquad \pi/\sigma_1 \equiv \pi + w_1\pi^k, \quad \pi/\sigma_2 \equiv \pi + w_2\pi^k, \\ \text{also} \quad \pi/\sigma_1\sigma_2 \equiv \pi/\sigma_2\sigma_1 \equiv \pi + (w_1 + w_2)\pi^k \pmod{\pi^{k+1}}; \end{cases}$$

hiernach ist in den beiden unterschiedenen Fällen:

$$\pi/\sigma_1^{-1} \equiv w_1^{-1}\pi \pmod{\pi^2} \quad \text{und} \quad \pi/\sigma_1^{-1} \equiv \pi - w_1\pi^k \pmod{\pi^{k+1}}.$$

Ist also $\bar{\sigma}$ irgendeine Substitution von G_{k+1}, σ_1 eine solche von G_k, so ist stets:

$$(34) \quad \pi/\sigma_1^{-1}\bar{\sigma}\sigma_1 \equiv \pi \pmod{\pi^{k+1}},$$

d. h. G_{k+1} ist ein Normalteiler von G_k, und aus der oben abgeleiteten Kongruenz

$$\pi/\sigma_1\sigma_2 \equiv \pi/\sigma_2\sigma_1 \pmod{\pi^{k+1}}$$

erschließt man endlich, daß die komplementäre Gruppe G_k/G_{k+1} eine Abelsche Gruppe sein muß. Damit ist jener Fundamentalsatz vollständig bewiesen.

Marburg a. d. L., den 27. April 1918.

(Eingegangen am 8. Juni 1918.)

Über die Möbiussche Figur zweier einander ein- und umbeschriebener Tetraeder, und die Figur einer einem Tetraeder umbeschriebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung.

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Nr. 1. F. Möbius[1]) zeigte zuerst, unter Anwendung seiner barycentrischen Koordinaten, wie man zu einem gegebenen Tetraeder T ein zweites, T′, findet, das dem ersteren zugleich ein- und umbeschrieben ist; sind von den acht Bedingungen der Figur sieben erfüllt, so ist es auch die achte. Möbius stellte auch den organischen Zusammenhang der Figur mit einem linearen Komplex (Nullsystem) her.

Von J. Steiner[2]) rührt der Satz her: Sind A_i, A_i' $(i = i, k, l, m)$ die Ecken der beiden Tetraeder, A_i, A_i' deren Gegenebenen, und befindet sich A_i' in A_i und A_i in A_i', so liegen einerseits die Geraden $(A_i A_k)$, $(A_l A_m)$, $(A_i' A_k')$, $(A_l' A_m')$, andererseits die Geraden $(A_i A_k')$, $(A_k A_i')$, $(A_l A_m')$, $(A_m A_l')$ in den beiden Geradenscharen eines einschaligen Hyperboloides. Ist das eine der beiden Tetraeder, etwa T, fest gegeben, und zählt man A_i' in A_i, A_k' in A_k beliebig, aber fest, so kann die Gegenkante $(A_l' A_m')$ in der einen Geradenschar eines bestimmten — nämlich des obigen — Hyperboloides verschoben werden.

---

[1]) Möbius, Journal f. Math. 3 (1828), S. 273–278; Werke 1, S. 439–446. Verallgemeinerung für Polyeder, Journal f. Math. 10 (1833), S. 317–341; Werke 1, S. 491–515. Vgl. F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Göttingen 1892/93, S. 138–140, und den Artikel von M. Zacharias über Elementargeometrie in der Enzykl. d. math. Wiss. III. AB 9, Nr. 21, S. 1065.

[2]) Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin 1832, Kap. 3, Nr. 58; Werke 1, S. 405. Vgl. auch Neuberg, Mém. Liège (2) 11 (1885), Nr. 7.

Bei Verteilung der Seitenflächen von T′ auf die Ecken von T auf alle möglichen Arten ergeben sich 24 Fälle, die sich aber nach P. Muth, Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), S. 117–122, auf 5 verschiedene Typen reduzieren.

Nr. 2. Im folgenden wird, bei analytischer Behandlung, der erforderliche Rechenapparat auf eine möglichst einfache Gestalt gebracht. Danach erscheint als algebraisches Bild der Möbiusschen Figur das Schema einer *alternierenden* vierreihigen Determinante. Hieraus läßt sich eine Reihe weiterer bemerkenswerter Eigenschaften der Figur ableiten.

Von Interesse ist die nahe Verwandtschaft und andererseits der Gegensatz zu der anderen Figur von vier, durch die Ecken eines Tetraeders T laufenden Geraden einer Regelschar zweiter Ordnung, die dem Schema einer *symmetrischen* vierreihigen Determinante korrespondiert.

Beachtenswerte Ergänzungen ergeben sich, wenn man umgekehrt einer vorgegebenen elliptischen Raumkurve vierter Ordnung ein solches Tetraeder T einbeschreibt, das mit dem Tetraeder T′ der Restschnittpunkte (der Ebenen von T) eine der beiden obigen Figuren bildet; zu dem Behuf empfiehlt es sich, mit dem elliptischen Parameter der Kurve zu operieren.

Nr. 3. Man wähle T als Koordinatentetraeder, und nehme auf jeder Ebene A_i von T einen *beliebigen* — nur nicht einer Kante von T angehörenden — Punkt A_i' an, mit den Koordinaten $c_{ii} = 0$, c_{ik}, c_{il}, c_{im} ($c_{rs} \neq 0$ für $r \neq s$). Stellt man die Gleichung der Ebene $A_m'(A_i' A_k' A_l')$ auf, so ist der Koeffizient von x_m der m^{te} Hauptminor γ_{mm} der Determinante $|c_{ik}|$:

$$\gamma_{mm} = c_{ik} c_{kl} c_{li} + c_{ki} c_{lk} c_{il}. \tag{1}$$

Soll jetzt im besondern das Tetraeder T′ dem Tetraeder T zugleich umbeschrieben sein — also je A_i auf A_i' liegen —, so hat man, unter Verwendung der Abkürzungen:

$$q_{rs} = \frac{c_{rs}}{c_{sr}}; \qquad \pi_m = q_{ik} q_{kl} q_{li}, \qquad \pi_l = q_{ki} q_{im} q_{mk},$$
$$\pi_k = q_{il} q_{lm} q_{mi}, \qquad \pi_i = q_{km} q_{ml} q_{lk}, \tag{2}$$

die vier notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$\pi_m = -1, \quad \pi_l = -1, \quad \pi_k = -1, \quad \pi_i = -1. \tag{3}$$

Daß irgend drei dieser erfüllt gedachten Bedingungen das Erfülltsein der vierten nach sich ziehen, liegt auf der Hand. Denn die Multiplikation der vier Ausdrücke $\pi(2)$ liefert zwischen denselben die Identität[3]) (Syzygie):

$$\pi_i \pi_k \pi_l \pi_m \equiv 1. \tag{4}$$

Besitzen also irgend drei der vier Ausdrücke π den Wert -1, so auch der vierte. Es gibt somit ∞^5 Tetraeder T′, die dem gegebenen Tetraeder T zugleich ein- und umbeschrieben sind.

---

[3]) Vgl. W. Fr. Meyer, Berichte der Deutschen Math. Ver. 9_1 (1901), S. 91–99.

Nr. 4. Es soll jetzt gezeigt werden, daß dann und nur dann, wenn ie Bedingungen (3) erfüllt sind, das Schema der Größen c_{rs} $(c_{rr}=0)$ in n alternierendes umgeformt werden kann. Da die Elemente jeder Reihe on $|c_{ik}|$, z. B. der i^{ten}, homogene Punktkoordinaten — nämlich des unktes A_i' — darstellen, so sind sie jeweils nur bis auf einen Pro-ortionalitätsfaktor $\varrho_i(\neq 0)$ bestimmt.

Man verfüge nun über die drei Verhältnisse $\frac{\varrho_k}{\varrho_i}$, $\frac{\varrho_l}{\varrho_i}$, $\frac{\varrho_m}{\varrho_i}$ eindeutig so, aß für die neuen „kanonischen", wiederum mit c_{rs} bezeichneten Elemente ie drei Bedingungen erfüllt sind:

5) $$q_{ik}=-1, \qquad q_{il}=-1, \qquad q_{im}=-1.$$

ann folgt der Reihe nach aus der ersten, zweiten und dritten Bedin-ung (3), daß auch

5′) $$q_{kl}=-1, \qquad q_{km}=-1, \qquad q_{lm}=-1.$$

Damit bilden aber die c_{rs} ein alternierendes Schema $(c_{sr}=-c_{rs})$; mgekehrt, geht man von einem solchen aus, so sind die Bedingungen (3) rsichtlich erfüllt. Daher gilt der Satz:

I. *Die Möbiussche Figur läßt sich durch ein alternierendes Schema on nicht verschwindenden Größen c_{rs} $(r, s=i, k, l, m)$ eindeutig cha-akterisieren. Dient das eine der beiden Tetraeder*, T, *als Koordinaten-etraeder, so sind $c_{ii}=0$, c_{ik}, c_{il}, c_{im} die kanonischen Koordinaten der cken A_i' des zweiten Tetraeders* T′.

Nr. 5. Auf Grund des Satzes I ist der Steinersche Satz leicht be-eisbar. Man zeige zunächst, daß eine Fläche zweiter Ordnung $F^{(ik)}$ ein-eutig existiert, die die beiden Gegenkanten (A_iA_k) und (A_lA_m) von T anz enthält, und dem Tetraeder T′ umbeschrieben ist. Gemäß der rsteren Forderung ist die Gleichung der Fläche von der Gestalt:

6) $$d_{il}x_ix_l+d_{im}x_ix_m+d_{kl}x_kx_l+d_{km}x_kx_m=0$$

ie Bedingungen dafür, daß diese Fläche die Ecken A_i', A_k', A_l', A_m' von T′ nthält, lauten:

7) $$\begin{cases} d_{kl}c_{il}+d_{km}c_{im}=0, & d_{il}c_{kl}+d_{im}c_{km}=0, \\ d_{im}c_{li}+d_{km}c_{lk}=0, & d_{il}c_{mi}+d_{kl}c_{mk}=0. \end{cases}$$

Diese vier Relationen sind aber, da stets $c_{sr}=-c_{rs}$, mit der einen ortlaufenden Proportion gleichwertig:

7′) $$d_{il}:d_{im}:d_{kl}:d_{km}=-c_{km}:c_{kl}:c_{im}:-c_{il}.$$

Mithin ist die Gleichung der gesuchten Fläche:

8) $$F^{(ik)}\equiv(x_ix_lc_{km}+x_kx_mc_{il})-(x_ix_mc_{kl}+x_kx_lc_{im})=0.$$

Diese Fläche enthält aber auch die Gegenkanten $(A_i' A_k')$ und $(A_l' A_m')$ von T'. Denn irgendein Punkt etwa der ersteren Geraden hat, für λ als einen Parameter, die Koordinaten:

$$(9) \qquad (A_i' A_k') : -\lambda c_{ik},\ c_{ik},\ c_{il} + \lambda c_{kl},\ c_{im} + \lambda c_{km}.$$

Setzt man diese Werte für die x_i in (8) ein, so liest man sofort ab, daß der Koeffizient von λ identisch verschwindet. Und entsprechend für die Gerade $(A_l' A_m')$.

Andererseits liegen aber auf der Fläche $F^{(ik)}(8)$ auch die vier Geraden $(A_i A_k')$, $(A_k A_l')$, $(A_l A_m')$, $(A_m A_l')$. Denn die Koordinaten eines laufenden Punktes etwa von $(A_i A_k')$ besitzen, für μ als einen Parameter, die Werte:

$$(10) \qquad (A_i A_k') : \mu - c_{ik},\ 0,\ c_{kl},\ c_{km}.$$

Auch hier ist ersichtlich, daß beim Einsetzen für die x_i in (6′) der Koeffizient von μ identisch verschwindet. Und entsprechend für die drei anderen Geraden.

Nr. 6. Um den zweiten Teil des Steinerschen Satzes einzusehen, denke man sich irgend zwei Ecken von T', etwa A_i' und A_k', in den bezüglichen Ebenen A_i und A_k von T beliebig gegeben, und suche den Ort der Gegenkante $(A_l' A_m')$ von $(A_i' A_k')$. Dann bleibt von den c_{rs} nur noch c_{lm} willkürlich. Irgendein Punkt von $(A_l' A_m')$ hat, unter ν einen Parameter verstanden, die Koordinaten:

$$(9') \quad (A_l' A_m') : x_i = c_{il} + \nu c_{im},\quad x_k = c_{kl} + \nu c_{km},\quad x_l = \nu c_{lm},\quad x_m = -c_{lm}.$$

Die Elimination von ν und c_{lm} führt aber sofort zur Gleichung (8) des Hyperboloides $F^{(ik)}$. Dies war vorauszusehen. Denn die Fläche (8), auf der $(A_l' A_m')$ diejenige Regelschar durchlaufen muß, der $(A_i' A_k')$ angehört, ist bereits durch die drei windschiefen Geraden $(A_i A_k)$, $(A_l A_m)$, $(A_i' A_k')$ völlig bestimmt. Dies läßt sich auch leicht durch Rechnung bestätigen. Denn zu den beiden ersten Bedingungen (7), denen die Fläche (6) genügen muß, da sie die Punkte A_i', A_k' enthalten soll, tritt dann noch als dritte hinzu:

$$(7a) \qquad d_{il} c_{il} + d_{im} c_{im} - d_{kl} c_{kl} - d_{km} c_{km} = 0.$$

Diese drei Bedingungen sind aber wiederum mit der fortlaufenden Proportion (7′) gleichwertig. Die so festgelegte Fläche $F^{(ik)}(8)$ enthält dann von selbst auch die gegebenen Geraden $(A_i A_k')$ und $(A_k A_i')$.

Nr. 7. Dem Hyperboloid $F^{(ik)}(8)$ treten zwei gleichberechtigte, $F^{(il)}$, $F^{(im)}$, zur Seite, deren Gleichungen aus (8) durch Indizesvertauschung hervorgehen ($c_{rs} = -c_{sr}$):

8a) $$\begin{cases} F^{(il)} \equiv (x_i x_k c_{ml} + x_l x_m c_{ki}) + (x_i x_m c_{lk} + x_k x_l c_{im}) = 0, \\ F^{(im)} \equiv (x_i x_k c_{ml} + x_l x_m c_{ik}) + (x_i x_l c_{km} + x_k x_m c_{li}) = 0. \end{cases}$$

Diese drei Flächen zweiter Ordnung, die als die drei Steinerschen Hyperboloide bezeichnet seien, bilden ein Netz mit den Grundpunkten A_i, A_i'; demselben Netze gehören offenbar auch die vier Ebenenpaare (A_i, A_i') an. Umgekehrt sei T' zunächst wieder ein *beliebiges*, T einbeschriebenes Tetraeder. Verlangt man jetzt, daß die acht Ecken A_i, A_i' beider Tetraeder assoziiert sein sollen, so müssen die vier Ebenenpaare (A_i, A_i') einem Netze von Flächen zweiter Ordnung mit den Grundpunkten A_i, A_i' angehören, da sie je sieben derselben enthalten; mithin ist T' dem Tetraeder T auch umbeschrieben.

Damit ist der Satz bewiesen:

II. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß wenn von zwei Tetraedern das erstere dem letzteren einbeschrieben ist, auch umgekehrt das letztere dem ersteren einbeschrieben ist, lassen sich dahin zusammenfassen, daß die acht Ecken beider Tetraeder ein System assoziierter Punkte bilden.*

Nr. 8. Nunmehr werde die Gleichung der schon in Nr. 3 betrachteten Ebene $A_m'(A_i' A_k' A_l')$ von T' explizite aufgestellt, wiederum zunächst unter der Annahme, daß T' ein *beliebiges*, T einbeschriebenes Tetraeder sei:

$$A_m' \equiv -\begin{vmatrix} 0 & c_{ik} & c_{il} & c_{im} \\ c_{ki} & 0 & c_{kl} & c_{km} \\ c_{li} & c_{lk} & 0 & c_{lm} \\ x_i & x_k & x_l & x_m \end{vmatrix}$$

11) $$\begin{aligned} \equiv & -x_m(c_{ik}c_{kl}c_{li} + c_{ki}c_{lk}c_{il}) \\ & + x_l\{c_{ik}(c_{li}c_{km} - c_{ki}c_{lm}) + c_{ki}c_{lk}c_{im}\} \\ & + x_k\{c_{il}(c_{ki}c_{lm} - c_{li}c_{km}) + c_{li}c_{ki}c_{im}\} \\ & + x_i\{c_{lk}(c_{il}c_{km} - c_{kl}c_{im}) + c_{kl}c_{ik}c_{lm}\} = 0. \end{aligned}$$

Läßt man jetzt im besondern die Bedingungen $c_{sr} = -c_{rs}$ für die Möbiussche Figur eintreten und setzt zur Abkürzung:

12) $$\Pi = c_{ik}c_{lm} + c_{il}c_{mk} + c_{im}c_{kl},$$

so geht (11) über in:

11') $$A_m' \equiv \Pi \cdot (x_i c_{kl} + x_k c_{li} + x_l c_{ik}) = 0,$$

oder, wenn man den singulären Fall des Verschwindens von Π (s. u.) ausschließt:

13) $$A_m' \equiv x_i c_{kl} + x_k c_{li} + x_l c_{ik} = 0.$$

Dieser Gleichung steht dualistisch, gemäß Satz I, die der Ecke A'_m von T' gegenüber:

$$(13') \qquad A'_m \equiv u_i c_{mi} + u_k c_{mk} + u_l c_{ml} = 0.$$

Man führe dementsprechend den linearen Komplex (das Nullsystem) C mit den Koeffizienten $c_{rs} = -c_{sr}$ ein:

$$(14) \qquad \begin{aligned} C \equiv\ & r_{ik} c_{lm} + r_{lm} c_{ik} + r_{il} c_{mk} + r_{mk} c_{il} \\ & + r_{im} c_{kl} + r_{kl} c_{im} \equiv \Sigma\Sigma r_{ik} c_{lm} = 0, \end{aligned}$$

wo unter den r_{tu} die laufenden Strahlenkoordinaten $(xy)_{tu} = x_t y_u - x_u y_t$ einer Geraden $\{(x), (y)\}$ zu verstehen sind. Hier läßt sich C zugleich als alternierende Korrelation zwischen zugeordneten (konjugierten) Punkten $(x), (y)$ auffassen.

Dann sagen die Gleichungen (13), (13′) aus, daß die mit den Ecken je eines der beiden Tetraeder inzidenten Ebenen des andern die Nullebenen jener Ecken im Nullsystem C sind.

Der lineare Komplex C (14) läßt sich auch dual mittels Achsenkoordinaten $\varrho_{ik} = (uv)_{ik}$ — wo je ϱ_{ik} proportional mit r_{lm} ist (i, k, l, m in zyklischer Folge zu nehmen) — darstellen:

$$(14') \qquad \Gamma \equiv \varrho_{ik} c_{ik} + \varrho_{lm} c_{lm} + \ldots \equiv \Sigma\Sigma \varrho_{ik} c_{ik} = 0,$$

und der Komplex Γ läßt sich wiederum zugleich als alternierende Korrelation zwischen zugeordneten Ebenen $(u), (v)$ auffassen. Die Transversalen (A_i, A'_i) erscheinen dann als diejenigen Geraden durch die Ecken A_i resp. A'_i von T resp. T', die zu deren Gegenebenen A_i resp. A'_i im Nullsysteme konjugiert sind, und entsprechend für die Schnittachsen $(\mathsf{A}_i, \mathsf{A}'_i)$.

Daher gilt der Satz:

III. *Die Möbiussche Figur zweier einander ein- und umbeschriebener Tetraeder* T, T' *ist, für* T *als Koordinatentetraeder, und für kanonische alternierende Koordinaten* c_{rs} *der Ecken von* T', *durch ein beliebiges Nullsystem* $C = \Gamma$ *eindeutig charakterisiert.*

Der oben, bei (11′) ausgeschlossene Fall des Verschwindens von Π (12) entspricht der Ausartung des Komplexes in einen „speziellen", wo sich also die Ebenen A'_i des uneigentlichen Tetraeders T' in einer Geraden schneiden.

Nr. 9. Aus den Gleichungen (13) für die Ebenen von T:

$$13) \quad \begin{cases} \mathsf{A}'_m \equiv x_i c_{kl} + x_k c_{li} + x_l c_{ik} = 0, & \mathsf{A}'_l \equiv x_i c_{mk} + x_k c_{im} + x_m c_{ki} = 0, \\ \mathsf{A}'_k \equiv x_i c_{lm} + x_l c_{mi} + x_m c_{il} = 0, & \mathsf{A}'_i \equiv x_k c_{ml} + x_l c_{km} + x_m c_{lk} = 0 \end{cases}$$

folgt sofort für die vier Produkte $\mathsf{B}_i \equiv x_i \mathsf{A}'_i$ die Identität:

$$(15) \qquad \sum \mathsf{B}_i \equiv 0.$$

In der Tat gehören ja nach Nr. 7 die vier Ebenenpaare (A_i, A_i) einem etze von Flächen zweiter Ordnung an, so daß die B_i an eine lineare lentität gebunden sind. Vermöge der B_i lassen sich die drei Steiner-hen Hyperboloide $F^{(ik)}$, $F^{(il)}$, $F^{(im)}$ einfach und übersichtlich darstellen, ie folgt:

$$\begin{cases} (8_{ik}) & F^{(ik)} \equiv B_i + B_k \equiv -(B_l + B_m) = 0, \\ (8_{il}) & F^{(il)} \equiv B_i + B_l \equiv -(B_k + B_m) = 0, \\ (8_{im}) & F^{(im)} \equiv B_i + B_m \equiv -(B_k + B_l) = 0. \end{cases}$$

Nun sind seit J. Plücker die Folgerungen bekannt, die man an eine lentität von der Struktur (15) knüpfen kann. Sind, wie bei Plücker, ie B_i lineare Formen in Koordinaten eines Punktes (resp. einer Geraden) der Ebene, so stellt der Verein der vier Gleichungen $B_i = 0$ ein voll-ändiges Vierseit (resp. Viereck) dar, und die Gleichungen (8) die Seiten esp. Ecken) von dessen Hauptdreieck.

Auf Grund der weiteren Identitäten:

$$(B_i + B_k) - (B_i + B_l) \equiv B_k - B_l, \text{ usf.}$$

elangt Plücker unmittelbar zu den harmonischen Eigenschaften des ierseits (Vierecks).

Die obigen Gleichungen (15), (8) vermitteln dann eine eineindeutige bbildung der ebenen Figur auf den Raum. Den Geraden der Ebene ntsprechen die Flächen zweiter Ordnung des durch die vier Ebenenpaare $_i = (A_i A_i')$ gebildeten Netzes, den Punkten der Ebene die Schnittkurven zweier Flächen des Netzes.

Insbesondere korrespondieren den Seiten des Hauptdreiecks die drei teinerschen Hyperboloide. Wir fassen das Wesentliche zusammen in em Satze:

IV. *Faßt man die Figur der vier Ebenenpaare* (A_i, A_i') *zweier Möbiusscher Tetraeder als ein vollständiges Vierflach auf, so erscheinen ie drei Steinerschen Hyperboloide als dessen Diagonalflächen. Die Figur eist dieselben harmonischen Eigenschaften auf, wie ein vollständiges ierseit der Ebene.*

Nr. 10. Die Ebene A_m' von T' treffe irgendeine der drei Kanten der ntsprechenden Ebene A_m von T, z. B. $(A_i A_k)$ in den Punkten P_{ik}, $'_{ik}$; diese sind zugleich die Projektionen von A_i', von A_m aus, auf A_m, nd von A_m', von A_l aus, auf A_l. Bezeichnet man die Koordinaten von $_{ik}$, P'_{ik} mit $x_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$, $x'_{ik} = \frac{x'_i}{x'_k}$, so ergibt sich sofort:

16) $$x_{ik} = \frac{c_{il}}{c_{kl}}, \quad x'_{ik} = \frac{c_{im}}{c_{km}},$$

und damit für deren Produkt $p_{ik} = x_{ik} x'_{ik}$:

$$(16') \qquad p_{ik} = \frac{c_{il} c_{im}}{c_{kl} c_{km}}.$$

Stellt man die analogen Formeln auf für die Punkte P_{li}, P_{li} der Kante $(A_l A_i)$, und für die Punkte P_{kl}, P'_{kl} der Kante $(A_k A_l)$, so liefert die Multiplikation:

$$(17) \qquad p_{ik} p_{kl} p_{li} = q_{ki} q_{il} q_{lk},$$

folglich gemäß (5) und (5'):

$$(17') \qquad p_{ik} p_{kl} p_{li} = -1 \text{ usf.}$$

Der Carnotsche Satz[4]) lehrt daher, daß die drei in Rede stehenden Punktepaare *nicht* auf einem Kegelschnitte liegen. Um aber zu drei verwandten Punktepaaren eines Kegelschnitts zu gelangen, hat man nur auf jeder Kante $(A_i A_k)$ von T das zu deren Ecken und zum Paare (P_{ik}, P'_{ik}) zugleich harmonische Paar (Π_{ik}, Π'_{ik}) zu konstruieren. Bedeuten ξ_{ik}, ξ'_{ik} die Koordinaten von Π_{ik}, Π'_{ik}, und π_{ik} das Produkt $\xi_{ik} \xi'_{ik}$, so lehrt die Betrachtung der Funktionaldeterminante zweier quadratischer Formen unmittelbar, daß:

$$(18) \qquad \pi_{ik} = -p_{ik}, \qquad \xi_{ik} + \xi'_{ik} = 0, \text{ usf.},$$

also:

$$(18') \qquad \pi_{ik} \pi_{kl} \pi_{li} = 1 \text{ usf.}$$

Dann geht aber aus dem Carnotschen Satze hervor, daß nicht nur die drei Punktepaare (Π_{ik}, Π'_{ik}), (Π_{kl}, Π'_{kl}), (Π_{li}, Π'_{li}) auf den T-Kanten $(A_i A_k)$, $(A_k A_l)$, $(A_l A_i)$ der Ebene A_m einem Kegelschnitt angehören, sondern auch die sechs entsprechenden Punktepaare aller sechs Kanten von T einer Fläche zweiter Ordnung G. Die Gleichung dieser Fläche ist ersichtlich:

$$(19) \quad G \equiv x_i^2 c_{km} c_{ml} c_{lk} + x_k^2 c_{il} c_{lm} c_{mi} + x_l^2 c_{ki} c_{im} c_{mk} + x_m^2 c_{ik} c_{kl} c_{li} = 0,$$

wo die Indizesfolge bei den Koeffizienten dieselbe ist, wie in den Ausdrücken π_i (3). Aus (19) geht zugleich hervor, daß T ein Poltetraeder von G ist.

Wegen der Gleichberechtigung der beiden Tetraeder T, T' müssen aber auch die $2 \cdot 6$ Endpunkte der Transversalen $(A'_l A_m)$, $(A_m A'_l)$ auf den Kanten $(A'_i A'_k)$ von T' einer Fläche zweiter Ordnung G' angehören, die T' als Poltetraeder besitzt. Es läßt sich indessen nachweisen, daß beide Flächen G, G' zusammenfallen.

---

[4]) Vgl. loc. cit.[3]).

Der laufende Punkt irgendeiner Kante $(A_i' A_k')$ von T' hat gemäß (9) die Koordinaten:

$$(A_i' A_k') \quad y_k c_{ki},\quad y_i c_{ik},\quad y_i c_{il} + y_k c_{kl},\quad y_i c_{im} + y_k c_{km}. \tag{9'}$$

Hier kann man die y_i $(i = i, k, l, m)$ als neue Koordinaten eines Raumpunktes, mit T' als Koordinatentetraeder ansehen; insbesondere kommt einem Punkte (9') der Kante $(A_i' A_k')$ die nichthomogene Koordinate $y_{ik} = \frac{y_i}{y_k}$ zu.

Für die gemeinsamen Punkte Q_{ik}, Q_{ik}' von $(A_i' A_k')$ mit der Transversalen $(A_m A_l')$ resp. $(A_l A_m')$ ist einfach die l^{te} resp. m^{te} Koordinate in (9') gleich Null zu setzen, so daß sich ergibt:

$$(Q_{ik}) \qquad y_{ik} = -\frac{c_{kl}}{c_{il}}, \tag{20}$$

$$(Q_{ik}') \qquad y_{ik}' = -\frac{c_{km}}{c_{im}},$$

und damit für deren Produkt:

$$y_{ik} y_{ik}' = \frac{c_{kl} c_{km}}{c_{il} c_{im}}. \tag{21}$$

Konstruiert man wiederum auf $(A_i' A_k')$ das zu den Ecken A_i', A_k' und den Punkten Q_{ik}, Q_{ik}' zugleich harmonische Paar $\mathsf{K}_{ik}, \mathsf{K}_{ik}'$, mit den Koordinaten η_{ik}, η_{ik}', so gilt für diese Schnittpunkte der Fläche G' mit $(A_i' A_k')$, analog zu (18):

$$\eta_{ik} \eta_{ik}' = -\frac{c_{kl} c_{km}}{c_{il} c_{im}}, \tag{22a}$$

$$\eta_{ik} + \eta_{ik}' = 0. \tag{22b}$$

Andererseits schneide man die Fläche G (19) mit $(A_i' A_k')$. Die Einsetzung der Werte (9') für die x_i in (19) liefert eine quadratische Gleichung für $\frac{y_i}{y_k}$, die, nach Hebung mit dem Faktor c_{ik}, wo Π den Ausdruck (13) bedeutet, lautet:

$$y_i^2 c_{il} c_{im} - c_{kl} c_{km} = 0. \tag{23}$$

Für die beiden Schnittpunkte von G mit $(A_i' A_k')$ sind daher die Relationen (22) ebenfalls erfüllt, d. h. die beiden Flächen G und G' fallen zusammen. Zugleich geht aus (23) hervor, daß die Gleichung von $G = G'$ in den neuen Koordinaten y_i wird:

$$G \equiv \sum_i y_i^2 c_{ik} c_{il} c_{im} = 0. \tag{19'}$$

Damit ist der Satz bewiesen:

V. *Schneidet man in der Möbiusschen Figur jede Ebene irgendeines der beiden Tetraeder* T, T′ *mit den Kanten der entsprechenden Ebene des andern, so ergeben sich auf jeder Kante* (A_iA_k) *von* T *zwei Punkte* P_{ik}, P'_{ik}, *und auf jeder Kante* $(A'_iA'_k)$ *von* T′ *zwei Punkte* Q_{ik}, Q'_{ik}. *Konstruiert man auf jeder Kante* (A_iA_k) *das zu deren Ecken und den Punkten* P_{ik}, P'_{ik} *gleichzeitig harmonische Paar, und entsprechend auf jeder Kante* $(A'_iA'_k)$, *so liegen die so entstehenden* $2 \cdot 6$ *Punktepaare auf einer Fläche zweiter Ordnung, die* T *und* T′ *zu Poltetraedern besitzt.*

Nr. 11. Nunmehr gehen wir zu der zweiten Figur über, die einem symmetrischen Schema von 12 Größen $c_{rs}(r \neq s)$ entsprechen wird.

Sei wieder T das Koordinatentetraeder, und $A'_i(0\, c_{ik}\, c_{il}\, c_{im})$ $(i = i, k, l, m)$ ein vorerst beliebiger Punkt in der Ebene A_i von T; mit t_i sei die Transversale $(A_iA'_i)$ bezeichnet.

Versteht man unter den $r_{ik} = (xy)_{ik}$ die Strahlenkoordinaten einer beweglichen Geraden $\{(x), (y)\}$, unter s_{ik} die jeweils festen Strahlenkoordinaten der Transversalen t_i, so besitzen für t_i die s_{ik} die Werte

$$(24) \qquad (t_i) \quad s_{ik} : s_{il} : s_{im} = c_{ik} : c_{il} : c_{im}, \qquad s_{kl} = s_{km} = s_{lm} = 0.$$

Somit lauten die Gleichungen der vier Transversalen t_i:

$$(25) \quad \begin{cases} t_i \equiv r_{lm}c_{ik} + r_{mk}c_{il} + r_{kl}c_{im} = 0, \\ t_k \equiv r_{ml}c_{ki} + r_{li}c_{km} + r_{im}c_{kl} = 0, \\ t_l \equiv r_{km}c_{li} + r_{mi}c_{lk} + r_{ik}c_{lm} = 0, \\ t_m \equiv r_{lk}c_{mi} + r_{il}c_{mk} + r_{ki}c_{ml} = 0. \end{cases}$$

Man verlange jetzt, daß die vier Transversalen t_i einer Regelschar zweiter Ordnung angehören.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür lassen sich dahin zusammenfassen, daß die vier Ausdrücke t_i an eine lineare Identität mit konstanten Koeffizienten α_i gebunden sind:

$$(26) \qquad \sum_i t_i \alpha_i \equiv 0.$$

Die Elimination der α liefert, mittels der in (2) eingeführten Abkürzungen $q_{rs} = \frac{c_{rs}}{c_{sr}}$, die mit (26) gleichwertigen Bedingungen:

$$(27) \quad \begin{cases} \pi_m \equiv q_{ik}q_{kl}q_{li} = 1, \quad \pi_l \equiv q_{ki}q_{im}q_{mk} = 1, \\ \pi_k \equiv q_{il}q_{lm}q_{mi} = 1, \quad \pi_i \equiv q_{km}q_{ml}q_{lk} = 1, \end{cases}$$

wie sich, wenn auch weniger einfach, durch Nullsetzen aller vierreihigen Determinanten der Koeffizientenmatrix von (25) bestätigen läßt. Die Bedingungen (27) unterscheiden sich von den Bedingungen (3) für die

Möbiussche Figur nur dadurch, daß die dort rechts stehenden negativen Einer jetzt durch positive Einer ersetzt sind.

Wie in Nr. 3 beweist man aber, auf Grund von (4), daß irgend drei der erfüllt gedachten Bedingungen (27) das Erfülltsein der vierten nach sich ziehen; ferner, wie in Nr. 4, daß wenn man, wie erlaubt, die Elemente jeder Reihe der Matrix $|c_{ik}|$ (mit $c_{ii}=0$) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ_i $(i=i, k, l, m)$ versieht, und deren Verhältnisse so normiert, daß $q_{ik}=q_{il}=q_{im}=1$, alsdann vermöge (27) auch $q_{kl}=q_{km}=q_{lm}=1$ wird, d. h. daß die c_{rs} ein *symmetrisches* Schema bilden. Die Umkehrung liegt auf der Hand.

Die Syzygie (26) nimmt dann die kanonische Gestalt an:

(28) $$\sum_i t_i \equiv 0.$$

Mittels der sechs homogenen Größen $c_{rs}=c_{sr}$ bilde man die Gleichung der Ebenenkorrelation[5]):

(29) $$\Gamma \equiv \sum_{i,k} u_i v_k c_{ik} = 0.$$

Dann erscheinen, vermöge Γ die Ecken A_i' von T′ als die Pole der Ebenen A_i von T, und die Transversalen t_i als diejenigen Geraden durch die Ecken A_i von T, die zu den Gegenebenen A_i konjugiert sind. Umgekehrt bleiben diese Beziehungen der A_i' und t_i zu den A_i ungeändert, wenn man die Korrelation Γ (29) durch die allgemeinere ersetzt:

(29′) $$\Gamma' \equiv \sum_i u_i v_i c_{ii} + \Gamma = 0,$$

wo die c_{ii} ganz willkürlich sind.

Demnach gilt der Satz:

VI. *Die Figur von vier, durch die Ecken A_i des Koordinatentetraeders* T *laufenden Geraden t_i einer Regelschar zweiter Ordnung, mit den Fußpunkten A_i' in den Ebenen A_i von* T, *läßt sich, nach geeigneter Normierung von deren Koordinaten, durch das Schema einer symmetrischen vierreihigen Determinante $|c_{ik}|$ $(c_{ii}=0)$ vollständig charakterisieren.*

Diese Figur heiße kurz die „der Regeltransversalen“. In dem metrisch ausgezeichneten Falle, wo die Relation (29) zur Bedingung für die Orthogonalität zweier Ebenen wird, so daß die c_{rs} die Koeffizienten der Kugelkreisform sind, hat man es mit den Höhen t_i eines Tetraeders zu tun.

[5]) Vgl. W. Fr. Meyer, Archiv f. Math. u. Phys. (3) 8 (1905), S. 135–150.

Nr. 12. Für das Weitere empfiehlt es sich, die beiden Fälle eines alternierenden und eines symmetrischen Schemas $|c_{ik}|$ in ein einziges System von drei unabhängigen Bedingungen zwischen den vier Reihen von je drei homogenen Elementen c_{rs} zusammenzufassen.

Man führe, entsprechend den drei Paaren von Gegenkanten eines Tetraeders oder auch den drei in ihm enthaltenen windschiefen Vierecken, folgende drei Produktbildungen ein:

$$(30)\qquad \begin{cases} [iklm] = [imlk] = q_{ik}q_{kl}q_{lm}q_{mi}, \\ [ikml] = [ilmk] = q_{ik}q_{km}q_{ml}q_{li}, \\ [ilkm] = [imkl] = q_{il}q_{lk}q_{km}q_{mi}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen sich in einfacher Weise aus den Größen π_i {(3) resp. (27)} zusammensetzen. Da stets $q_{rs}q_{sr} = 1$, so hat man z. B. für $[iklm]$ die Umformung:

$$[iklm] = q_{ik}q_{kl}q_{li} = q_{lm}q_{mi}q_{il} = \pi_m\pi_k,$$

und damit die Produktzerlegungen:

$$(30')\qquad [iklm] = \pi_m\pi_k, \qquad [ikml] = \pi_m\pi_i, \qquad [ilkm] = \pi_k\pi_i.$$

Man verstehe unter ε einen Faktor, der beständig entweder gleich der positiven oder aber der negativen Einheit ist, so ist die Behauptung die, daß das System der Bedingungen:

$$(31\,a)\qquad \pi_i = \pi_k = \pi_l = \pi_m = \varepsilon$$

mit dem andern:

$$(34\,b)\qquad [iklm] = [ikml] = [ilkm] = 1,$$

gleichwertig ist.

Daß (31 b) aus (31 a) folgt, geht direkt aus (30′) hervor. Umgekehrt folgt aus (31 b), vermöge (30′), und unter Berücksichtigung der Identität (4), daß zunächst $\pi_i = \pi_k = \pi_m$; sodann daß $\pi_i^2 = \pi_k^2 = \pi_m^2 = 1$, somit $\pi_i = \pi_k = \pi_m = \varepsilon$, und wegen (4) auch $\pi_l = \varepsilon$ wird. Dies liefert den Hilfssatz:

VII. *Die beiden Fälle eines symmetrischen und alternierenden Schemas von vier je homogenen Größentripeln c_{ik}, c_{il}, c_{im} $(i = i, k, l, m)$ lassen sich durch die drei unabhängigen Bedingungen* (31 b) *zusammenfassen.*

Nr. 13. Als eine Anwendung des Satzes VII erscheint eine teilweise Umkehrung des ersten Steinerschen Satzes der Nr. 5.

Sei wieder T′ ein vorerst beliebiges, dem Koordinatentetraeder T einbeschriebenes Tetraeder. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Fläche zweiter Ordnung $F^{(ik)}$ existiert, die die Gegenkanten (A_iA_k) und (A_lA_m) von T enthält, und T′ umbeschrieben ist,

waren in Nr. 5 für den Fall der Möbiusschen Figur durch (7) angegeben. Wie aber aus der Ableitung hervorgeht, bleiben diese Bedingungen äußerlich *genau dieselben*, auch wenn die Größen c_{rs} unabhängig voneinander sind. Eliminiert man sodann aus (7) die vier Koeffizienten der Fläche $F^{(ik)}$, und verfährt entsprechend für die beiden gleichberechtigten Flächen $F^{(il)}$ und $F^{(im)}$, so wird man gerade zu den Bedingungen (31 b) geführt.

Auf Grund des Hilfssatzes VII gilt demnach der Satz:

VIII. *Ist* T' *ein, einem Tetraeder* T *einbeschriebenes Tetraeder, und verlangt man, daß die drei Flächen zweiter Ordnung existieren, die* T' *umbeschrieben sind, und je ein Paar von Gegenkanten von* T *enthalten, so findet dies nur in den beiden Fällen der Möbiusschen Figur und der Figur der Regeltransversalen statt.*

Im Falle der Figur der Regeltransversalen, also für $c_{rs} = c_{sr}$, bemerkt man sofort, daß die sechs, in den Gleichungen (8) (Nr. 5) und (8a) (Nr. 7) der Steinerschen Hyperboloide $F^{(ik)}$, $F^{(il)}$, $F^{(im)}$ auftretenden Klammerausdrücke jetzt zu je zweien zusammenfallen. Setzt man entsprechend ($c_{rs} = c_{sr}$):

$$(32) \qquad \begin{cases} X_{ik} \equiv c_{ik}x_l x_m + c_{lm}x_i x_k, \\ X_{il} \equiv c_{il}x_k x_m + c_{km}x_i x_l, \\ X_{im} \equiv c_{im}x_k x_l + c_{kl}x_i x_m, \end{cases}$$

so lauten die Gleichungen der drei Flächen:

$$(8') \qquad F^{(ik)} \equiv X_{il} - X_{im} = 0, \quad F^{(il)} \equiv X_{im} - X_{ik} = 0, \quad F^{(im)} \equiv X_{ik} - X_{il} = 0.$$

Zwischen den drei Formen F besteht daher die lineare Identität:

$$(33) \qquad F^{(ik)} + F^{(il)} + F^{(im)} = 0,$$

d. h. die drei Flächen zweiter Ordnung $F^{(ik)}$, $F^{(il)}$, $F^{(im)}$ gehören einem Büschel an, dessen Grundkurve die durch die acht Ecken A_i, A_i' bestimmte Raumkurve vierter Ordnung ist.

Mit Hilfe der Formen (8') läßt sich auch leicht[6]) die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung H aufstellen, der die vier Transversalen $t_i(A_i A_i')$ angehören:

$$(34) \qquad \begin{aligned} H \equiv X_{ik}(c_{il}c_{km} - c_{im}c_{kl}) + X_{il}(c_{im}c_{kl} - c_{ik}c_{lm}) \\ + X_{im}(c_{ik}c_{lm} - c_{il}c_{km}) = 0. \end{aligned}$$

Andererseits gehen durch die Ecken A_i von T vier Gerade t_i', mit den Fußpunkten B_i' in den Ebenen A_i, die der zweiten Regelschar von H angehören; diese t_i' mögen die „Nebentransversalen" heißen. Die Koordi

[6]) Vgl. loc. cit. [5]).

naten der Fußpunkte B_i' befolgen, wie man ohne weiteres an (34) bestätigt, das einfache Gesetz:

$$(35) \qquad (B_i') \qquad 0, \ \frac{1}{c_{lm}}, \ \frac{\cdot}{c_{km}}, \ \frac{1}{c_{kl}}.$$

Nr. 14. Zu der Erweiterung der Möbiusschen Figur in Nr. 8 lassen sich im Falle symmetrischer c_{rs} zwei Analoga herstellen. Einmal lege man in jeder Ebene A_m von T die drei Transversalen (A_iA_m'), (A_kA_m'), (A_lA_m'), und schneide sie mit den Gegenseiten des Dreiecks $(A_iA_kA_l)$; andererseits schneide man jede Ebene A_m' von T' mit den Kanten der zugeordneten Ebene A_m von T.

In beiden Fällen ergeben sich im ganzen je sechs Punktepaare auf den Kanten von T, von denen sich zeigen wird, daß sie je einer Fläche zweiter Ordnung angehören.

Ist P_{ik}, resp. P_{ik}' der Schnittpunkt von (A_lA_m'), resp. (A_mA_l') mit der Kante (A_iA_k), so ergibt sich für die Koordinaten x_{ik}, x_{ik}' von P_{ik}, P_{ik}' sofort:

$$(36) \qquad x_{ik} = \frac{c_{il}}{c_{kl}}, \qquad x_{ik}' = \frac{c_{im}}{c_{km}},$$

und damit für deren Produkt p_{ik}:

$$(36') \qquad p_{ik} = \frac{c_{il}\,c_{im}}{c_{kl}\,c_{km}}.$$

Durch Multiplikation von p_{ik}, p_{kl}, p_{li} folgt:

$$(37) \qquad \pi_m \equiv p_{ik}p_{kl}p_{li} = 1, \text{ usf.}$$

Auf Grund des Carnotschen Satzes gelangt man so zu dem Ergebnis, das ein Seitenstück zu dem Satze III bildet:

IX. *Ist* T' *ein einem Tetraeder* T *einbeschriebenes Tetraeder, so gehören die, die Ecken* A_i *von* T *mit den zugeordneten Ecken* A_i' *von* T' *verbindenden Transversalen dann und nur dann einer Regelschar zweiter Ordnung an, wenn die sechs Paare von Fußpunkten der Transversalen* (A_iA_m'), (A_kA_m'), (A_lA_m') *irgendeiner Ebene* A_m *von* T *auf den Gegenkanten* (A_kA_l), (A_lA_i), (A_iA_k) *einer Fläche zweiter Ordnung angehören.*

Die Gleichung dieser Fläche läßt sich auf Grund von (36) sofort hinschreiben:

$$(38) \qquad \sum x_i^2\pi_i - \sum \Sigma_{ik}(c_{il}c_{km} + c_{im}c_{kl}) = 0.$$

Hier lassen sich die Paare von Schnittpunkten der Teilfläche $\Sigma x_i^2\pi_i = 0$ mit den Kanten von T geometrisch einfach charakterisieren:

Man konstruiere auf irgendeiner Kante (A_iA_k) von T das Punktepaar, das einerseits zu den Ecken A_i, A_k harmonisch ist, andererseits mit diesem Eckenpaar und dem Paar (P_{ik}, P_{ik}') derselben Involution angehört.

Durch Heranziehung der Fußpunkte B_i' (35) der Nebentransversalen t_i' läßt sich der Satz IX noch weiter ausbauen. Wie aus (35) sofort hervorgeht, fällt der Fußpunkt P_{ik} der Transversale $(A_l A_m')$ auf der Kante $(A_i A_k)$ zusammen mit dem Fußpunkte der Transversalen $(A_m B_l')$ auf der nämlichen Kante. Es gilt also die Ergänzung zu Satz IX:

IX'. *Die sechs Paare von Fußpunkten des Satzes* IX *fallen im ganzen zusammen mit den sechs Paaren von Fußpunkten der Transversalen, die in jeder Ebene* A_m *von* T *den Endpunkt* B_m' *der Nebentransversale* t_m' *von den Ecken* A_i, A_k, A_l *auf die Gegenseiten projizieren.*

Nr. 15. Wir fassen jetzt die zweite Analogie zu Nr. 8 ins Auge, die Spuren der Ebenen A_m' von T' in den Ebenen A_m von T. Die in Nr. 8 unter (11) für beliebige c_{rs} aufgestellte Gleichung von A_m' reduziert sich für $c_{rs} = c_{sr}$ auf

$$(11') \quad \mathsf{A}_m' \equiv -2x_m\pi_m + x_l c_{ik}(\Pi - 2c_{ik}c_{lm}) + x_k c_{il}(\Pi - 2c_{il}c_{km}) + x_i c_{kl}(\Pi - 2c_{kl}c_{im}) = 0.$$

Für die Koordinaten y_{ik}, y_{ik}' der Schnittpunkte Q_{ik}, Q_{ik}' der Ebenen A_m', A_l' mit der Kante $(A_i A_k)$ ergibt sich daher:

$$(36a) \quad -y_{ik} = \frac{c_{il}(\Pi - 2c_{il}c_{km})}{c_{kl}(\Pi - 2c_{kl}c_{im})}, \qquad -y_{ik}' = \frac{c_{im}(\Pi - 2c_{kl}c_{lm})}{c_{km}(\Pi - 2c_{il}c_{km})},$$

und somit für deren Produkt q_{ik}:

$$(36a') \quad q_{ik} = \frac{c_{il}c_{im}}{c_{kl}c_{km}}.$$

Hieraus folgt wiederum $q_{ik}q_{kl}q_{li} = 1$, usf., und damit der Satz:

X. *Die sechs Paare von Schnittpunkten* Q_{ik}, Q_{ik}' *der Kanten* $(A_i A_k)$ *von* T *mit den Ebenen* A_m', A_l' *von* T', *oder auch die vier Schnittachsen* $(\mathsf{A}_m, \mathsf{A}_m')$ *liegen auf einer Regelschar zweiter Ordnung.*

Dies Ergebnis kommt aber nur auf einen bekannten Satz über zwei Tetraeder in hyperboloidischer Lage hinaus; da nach Annahme die Verbindungsgeraden (A_i, A_i') der Ecken von T und T' einer Regelschar zweiter Ordnung angehören, so auch dualistisch die Schnittachsen $(\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_i')$ der Ebenen von T und T'.

NB. Zwei solche, im übrigen *beliebige* Tetraeder in hyperboloidischer Lage werden gemäß Satz VII durch ein symmetrisches Schema $|c_{ik}|$ mit *beliebigen* c_{ii} charakterisiert.

Die Gleichung der letzteren Fläche zweiter Ordnung mittels (36a) aufzustellen, sei dem Leser überlassen. Dagegen ziehen wir noch eine Folgerung aus der Übereinstimmung der rechten Seiten von (36a) und (36a'):

X'. *Auf jeder Kante* (A_i, A_k) *des Tetraeders gehören das Punktepaar* P_{ik}, P'_{ik} *des Satzes* IX, *das Punktepaar* Q_{ik}, Q'_{ik} *des Satzes* X. *und das Paar der Ecken* A_i, A_k *derselben Involution an.*

Nr. 16. Wir fragen jetzt nach den Besonderheiten, die eintreten, wenn zwei oder mehrere der Transversalen $t_i = (A_i, A'_i)$ inzident sind. Auf Grund der allgemeinen Inzidenzbedingung $\Sigma r_{ik} s_{lm} = 0$ für zwei Gerade $(r), (s)$ ergibt sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen (25) der t_i, als notwendige und hinreichende Bedingung für die Inzidenz von t_i und t_k:

$$c_{il} c_{km} = c_{im} c_{kl}. \tag{39}$$

Ersichtlich ist dies zugleich die Inzidenzbedingung für t_l und t_m. Andererseits liest man aus (29) ab, daß (39) auch aussagt, daß die Gegenkanten $(A_i A_k)$ und $(A_l A_m)$ von T in der symmetrischen Korrelation (Polarität) Γ konjugiert sind.

Sind zwei der Bedingungen (39) erfüllt, so daß:

$$c_{il} c_{km} = c_{im} c_{kl} = c_{ik} c_{lm}, \tag{39a}$$

so auch die dritte: dann und nur dann treffen sich alle vier Transversalen t in einem Punkte T. Andererseits folgt, daß wenn zwei Paare Gegenkanten von T in Γ konjugiert sind, so auch das dritte Paar. Ist nur die Bedingung (39) erfüllt, so zerfällt offenbar die Fläche H (34), der die vier Transversalen t angehörten, in ein Paar von Ebenen, nämlich $(A_i A_k t_i t_k)$ und $(A_l A_m t_l t_m)$, dessen Gleichung direkt aus (34) mittels (39) hervorgeht.

Sind aber die beiden Bedingungen (39a) erfüllt, so artet nicht etwa [7]) die Fläche H in einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze T aus, sondern die Gleichung (34) von H verschwindet identisch, d. h. wird durch jeden Raumpunkt befriedigt. Geometrisch entspricht dem, daß jeder Raumpunkt mit den vier (durch T gehenden) Transversalen t einer gewissen Fläche zweiter Ordnung angehört, nämlich einem Kegel (eines Büschels), der die vier Geraden t als Kanten enthält.

Einfacher verhält sich die Fläche H bei den Besonderheiten (39), (39a) als Klassenfläche H. Berechnet man die ersten Minoren der Determinante $|a_{ik}|$, so ergibt sich als Gleichung von H:

$$\mathsf{H} \equiv \sum_i u_i^2 c_{ik} c_{il} c_{im} + \sum_{i,k} (u_i u_k c_{ik} + u_l u_m c_{lm})(c_{il} c_{km} + c_{im} c_{kl}) = 0, \tag{39'}$$

wo sich die zweite Summe auf die drei Indizeskombinationen (ik), (il),

[7]) Diese unrichtige Angabe findet sich für den metrischen Spezialfall der Höhen eines Tetraeders bei Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit usw., Berlin 1832, Anhang, Nr. 78; Ges. math. Werke I, S. 454.

l) erstreckt. Wie man ohne Mühe durch Ausrechnung bestätigt, zerfällt e Form unter der Bedingung (39) in ein Paar von Linearformen, die ann und nur dann zusammenfallen, wenn die beiden Bedingungen (39a) füllt sind. Dementsprechend artet die Fläche H aus in das Paar der nzidenzpunkte $(t_i t_k)$, $(t_l t_m)$, resp. in den doppeltzählenden Punkt T.

Nr. 17. Wir gehen noch kurz auf die Doppelverhältnisse ein, die einerits die vier Transversalen t_i resp. t_i' auf der Fläche H (34), andererseits r die Möbiussche Figur die beiden Geradenquadrupel auf irgendeiner er drei Steinerschen Flächen, z. B. $F^{(ik)}$ (Nr. 6), bilden. Für die vier ransversalen t_i (25) berechnet man[5]) als Wert des Doppelverhältnisses D_t:

$$D_t = \frac{c_{ik}c_{lm} - c_{im}c_{kl}}{c_{il}c_{km} - c_{im}c_{kl}}. \tag{40}$$

ieraus geht das Doppelverhältnis D_t' der vier Nebentransversalen t_i' geäß (35) dadurch hervor, daß an Stelle eines jeden der drei Produkte $_k c_{lm}$ dessen reziproker Wert tritt. Bei der Möbiusschen Figur lagen f der einen Regelschar der Fläche $F^{(ik)}$ die Geradenpaare (α) $(A_i A_k)$, $_i' A_k')$; $(A_l A_m)$, $(A_l' A_m')$, auf der andern die Geradenpaare (β) $(A_i A_k')$, $_k A_i')$; $(A_l A_m')$, $(A_m A_l')$.

Um das (geeignet normierte) Doppelverhältnis $\delta_{ik} = \delta_{lm}$ der beiden aare (α) zu bestimmen, schneide man etwa mit der Geraden $(A_i A_k')$ von (β), daß A_i und A_k' die Grundpunkte bilden.

Die Punktreihen $(A_i A_k')$ und $(A_l' A_m')$ sind, für λ und μ als Parameter, dargestellt durch:

$$\begin{cases} (A_i A_k') & (c_{ki} + \lambda,\ 0,\ c_{kl},\ c_{km}), \\ (A_l' A_m') & (c_{li} + \mu c_{mi},\ c_{lk} + \mu c_{mk},\ \mu c_{kl},\ c_{lm}). \end{cases} \tag{41}$$

Für den Treffpunkt P_1 der ersteren Geraden mit $(A_l A_m)$ ergibt sich, egen $x_i = 0$, der Parameterwert $\lambda = \lambda_1$ durch:

$$\lambda_1 = -c_{ki} = c_{ik}. \tag{42$_1$}$$

Für den Schnittpunkt P_2 von $(A_i A_k')$ mit $(A_l' A_m')$ findet man zuchst den μ-Parameterwert $\mu_2 = -\frac{c_{kl}}{c_{km}}$; setzt man diesen in die zweite eihe von (41) ein und vergleicht mit der ersten Reihe, so ergibt sich r den λ-Parameterwert λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{c_{ik}c_{lm} + c_{il}c_{mk} + c_{im}c_{kl}}{c_{lm}} = \frac{\Pi}{c_{lm}}. \tag{42$_2$}$$

Aus (42$_1$) und (42$_2$) folgt durch Division:

$$1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{c_{il}c_{mk} + c_{im}c_{kl}}{c_{ik}c_{lm}}. \tag{2}$$

Das gesuchte Doppelverhältnis $\delta_{ik} = \delta_{lm} = \frac{1}{\delta_{kl}} = \frac{1}{\delta_{ml}}$ werde so normiert, daß es mit der rechten Seite von (42) übereinstimmt. Verfährt man entsprechend mit den beiden andern Flächen $F^{(il)}$ und $F^{(km)}$, so stellt sich das gleichmäßige Gesetz heraus.

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \delta_{ik} &= \delta_{lm} = \frac{1}{\delta_{kl}} = \frac{1}{\delta_{ml}} = -\frac{\pi_{il}+\pi_{im}}{\pi_{ik}},\\ \delta_{il} &= \delta_{mk} = \frac{1}{\delta_{li}} = \frac{1}{\delta_{km}} = -\frac{\pi_{ik}+\pi_{im}}{\pi_{il}},\\ \delta_{im} &= \delta_{kl} = \frac{1}{\delta_{mi}} = \frac{1}{\delta_{lk}} = -\frac{\pi_{ik}+\pi_{il}}{\pi_{im}}, \end{aligned}\right.$$

wo unter den Größen π die zyklisch genommenen Produkte zu verstehen sind:

$$(44)\quad \pi_{ik} = \pi_{lm} = c_{ik}c_{lm},\quad \pi_{il} = \pi_{mk} = c_{il}c_{mk},\quad \pi_{im} = \pi_{kl} = c_{lm}c_{kl}.$$

Noch einfacher bestimmt sich das Doppelverhältnis für die beiden Geradenpaare (β) der zweiten Schar, die man etwa mit der Geraden (A_iA_k) der ersten Schar schneide. Für die Koordinaten x_{ik}, x'_{ik} der beiden Schnittpunkte von (A_iA_k) mit $(A_lA'_m)$ und $(A_mA'_l)$ findet sich sofort:

$$(45)\qquad x_{ik} = \frac{c_{mi}}{c_{mk}},\qquad x'_{ik} = \frac{c_{li}}{c_{lk}}.$$

Indem man dividiert und das Doppelverhältnis $\delta'_{ik} = \delta'_{lm} = \frac{1}{\delta'_{kl}} = \frac{1}{\delta'_{ml}}$ geeignet normiert, und wieder entsprechend mit den beiden andern Flächen $F^{(il)}$, $F^{(km)}$ verfährt, gelangt man zu der Tabelle:

$$(43')\quad \left\{\begin{aligned} \delta'_{ik} &= \delta'_{lm} = \frac{1}{\delta'_{kl}} = \frac{1}{\delta'_{ml}} = -\frac{\pi_{il}}{\pi_{im}},\\ \delta'_{il} &= \delta'_{mk} = \frac{1}{\delta'_{li}} = \frac{1}{\delta'_{km}} = -\frac{\pi_{im}}{\pi_{ik}},\\ \delta'_{im} &= \delta'_{kl} = \frac{1}{\delta'_{mi}} = \frac{1}{\delta'_{kl}} = -\frac{\pi_{ik}}{\pi_{il}}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus geht sofort die Relation hervor:

$$(43'a)\qquad \delta'_{ik}\,\delta'_{il}\,\delta'_{im} = -1.$$

Eine weniger einfache Relation besteht zwischen den δ_{ik}, δ_{il}, δ_{im}; man gelangt zu ihr durch Elimination der Verhältnisse der π_{ik}, π_{il}, π_{im} aus (43), worauf hier nicht näher eingegangen werde. Dagegen liest man noch durch Vergleichung von (43) mit (43′) die einfachen Beziehungen zwischen den beiderseitigen Doppelverhältnissen ab:

$$(46)\qquad \delta_{ik} = \delta'_{il} + \delta'_{mi},\qquad \delta_{il} = \delta_{im} + \delta'_{ki},\qquad \delta_{im} = \delta_{ik} + \delta'_{km}.$$

Nr. 18. Anhangsweise mögen noch die beiden bisher behandelten Tetraederfiguren derart umgekehrt werden, daß man von einer beliebig

gegebenen elliptischen Raumkurve vierter Ordnung c_4 ausgeht, der die eiden Tetraeder T, T' einbeschrieben werden sollen. Bei der Möbius-hen Figur waren die acht Ecken A_i, A_i' von T, T' assoziiert, so daß urch sie noch ∞^2 Kurven c_4 hindurchgehen; bei der Transversalenfigur gegen konnte man durch die A_i, A_i' nur ein einziges Büschel von Flächen weiter Ordnung legen, also auch nur eine einzige c_4.

Auf einer vorgegebenen c_4 führe man in bekannter[8]) Weise ein ellip-sches Integral erster Gattung u, mit den Perioden 2ω, $2i\omega'$, als Para-eter ein.

Dann ist die Bedingung dafür, daß vier Kurvenpunkte u_i $(i = i, k, l, m)$ f einer Ebene liegen, ausgedrückt durch:

$$\sum_i^m u_i \equiv c \bmod \text{per}, \tag{47}$$

o c eine Konstante bedeutet, und die Bedingung, daß acht Kurven-unkte u_i $(i = i, \ldots, m, n, p, q, r)$ assoziiert sind, durch:

$$\sum_i^r u_i \equiv 2c \bmod \text{per}^9). \tag{47'}$$

Um zur Möbiusschen Figur zu gelangen, beschreibe man der c_4 ein rerst beliebiges Tetraeder T mit den Ecken u_i $(i = i, k, l, m)$ ein. Die cken u_i' des zweiten Tetraeders T' sind die Restschnittpunkte der benen A_i von T mit der c_4, derart, daß umgekehrt auch die Ecken u_i n T die Restschnittpunkte der Ebenen A_i' von T' mit der c_4 werden. s bestehen daher die beiden Reihen von je vier Bedingungen:

$$u_i' + u_k + u_l + u_m \equiv c, \tag{48a}$$

$$u_i + u_k' + u_l' + u_m' \equiv c. \tag{48b}$$

Die Tatsache, daß die acht Ecken von T, T' einer — in das Ebenen-aar $(A_i A_i')$ zerfallenden — Fläche zweiter Ordnung angehören, entspricht r durch Addition irgend zweier zugeordneter Relationen (48a) und (48b) rvorgehenden Beziehung:

$$\sum_i^m u_i + \sum_i^m u_i' \equiv 2c, \tag{49}$$

e eben, in Übereinstimmung mit Nr. 7, aussagt, daß die acht Ecken n T, T' assoziiert sind. Umgekehrt, betrachtet man die Bedingung (49)

[8]) S. etwa den Artikel von O. Staude über Flächen zweiter Ordnung in der nzyklopädie der math. Wiss. III C 2, Abschnitt XI.

[9]) Der Zusatz: mod per (d. h. bis auf Vielfache der Perioden) werde der Kürze lber in der Folge fortgelassen.

als erfüllt, so ziehen die Relationen (48a) die Relationen (48b) nach sich, und vice versa. Andererseits besteht zwischen den u_i (oder auch u_i') für sich eine, mit (49) gleichwertige Beziehung, zu der man gelangt, wenn man die drei ersten Kongruenzen (48a) addiert und mit der letzten Kongruenz (48b) kombiniert:

$$2\sum u_i \equiv 2c. \tag{50}$$

Diese sagt aus, daß eine (sc. nicht durch die c_4 gehende) Fläche zweiter Ordnung existiert, die die Kurve in den vier Ecken von T berührt.

Die Kongruenz (50) spaltet sich, nach Division mit 2, in die vier Unterfälle:

$$\sum u_i \equiv c; \tag{50a}$$

$$\sum u_i \equiv c + \omega; \tag{50b}$$

$$\sum u_i \equiv c + i\omega'; \tag{50c}$$

$$\sum u_i \equiv c + \omega + i\omega', \tag{50d}$$

von denen aber der erstere in Wegfall kommt, da die vier Punkte u_i nicht in einer Ebene liegen sollen. Somit gehören zu drei beliebig gegebenen Punkten u_i, u_k, u_l der c_4 noch drei Punkte u_m, $u_m^{(1)}$, $u_m^{(2)}$:

$$u_m \equiv c - s_m + \omega, \tag{51}$$

$$u_m^{(1)} \equiv c - s_m + i\omega', \tag{51_1}$$

$$u_m^{(2)} \equiv c - s_m + \omega + i\omega', \tag{51_2}$$

wo unter s_m die Summe $u_i + u_k + u_l$ zu verstehen ist; jeder dieser drei Punkte bildet mit den drei gegebenen ein Tetraeder T, und damit eine Möbiussche Figur.

Die drei Punkte u_m, $u_m^{(1)}$, $u_m^{(2)}$ sind leicht zu konstruieren. Legt man an einen Punkt v_0 der c_4 irgendeine Tangentialebene, die noch zwei Restpunkte r_1, r_2 ausschneide, so gehen durch die beiden letzteren noch drei Tangentialebenen an die Kurve, deren Berührungspunkte v, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ gemäß (48a) die Argumente besitzen:

$$v \equiv v_0 + \omega, \tag{52}$$

$$v^{(1)} \equiv v_0 + i\omega', \tag{52_1}$$

$$v^{(2)} \equiv v_0 + \omega + i\omega'; \tag{52_2}$$

diese drei Punkte heißen zum Punkte v_0 „konjugiert“ oder „korresidual“. Vergleicht man (52), ... mit den entsprechenden Werten (51), ..., und setzt $v_0 \equiv c - s_m$, so wird $v_0 = u_m'$ der Restpunkt der vorgegebenen

Ebene $(u_i u_k u_l)$, und die drei Werte $v, v^{(1)}, v^{(2)}$ fallen mit $u_m, u_m^{(1)}, u_m^{(2)}$ zusammen.

Die Zusammenfassung der Ergebnisse führt zu dem Satze:

XIa. *Soll ein einer gegebenen elliptischen Raumkurve vierter Ordnung c_4 einbeschriebenes Tetraeder* T *eines der beiden Tetraeder einer Möbiusschen Figur sein, so lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür entweder dahin ausdrücken, daß eine Fläche zweiter Ordnung existiert, die die c_4 in den Ecken von* T *berührt, oder auch dahin, daß die Ecken von* T *mit den Ecken des Tetraeders* T′ *der Restpunkte, die die Ebenen von* T *aus der c_4 ausschneiden, ein assoziertes System bilden. Werden drei der Ecken von* T *willkürlich auf der c_4 angenommen, so ist die vierte Ecke dreideutig bestimmt als irgendeiner der zum Restpunkte der drei gegebenen Ecken konjugierten Punkte.*

Nr. 19. Wir gehen zur Figur der vier Regeltransversalen über und suchen analog, dieselbe von einem einer gegebenen c_4 einbeschriebenen Tetraeder T $(u_i u_k u_l u_m)$ aus zu konstruieren. Das zugehörige Tetraeder T′ $(u_i' u_k' u_l' u_m')$, als das der Restpunkte der Ebenen von T, ist wiederum durch (48a) bestimmt.

Jede der beiden Regelscharen einer durch die c_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung besteht aus ∞^1 Sehnen der Kurve; umgekehrt ist durch irgendeine Sehne (v_1, v_2) die Fläche eindeutig bestimmt. Die Sehnen (v_3, v_4) der zweiten Schar werden durch das Ebenenbüschel (v_1, v_2) aus der c_4 ausgeschnitten, sind also gemäß (47) bestimmt durch.

$$v_3 + v_4 \equiv c - (v_1 + v_2). \tag{47'}$$

Für alle Sehnen der ersten Schar ist $v_1 + v_2$ konstant, für alle Sehnen der zweiten Schar $v_3 + v_4$.

Sollen daher die vier Transversalen $t_i(u_i, u_i')$ einer Regelschar zweiter Ordnung angehören, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß:

$$u_i + u_i' \equiv u_k + u_k' \equiv u_l + u_l' \equiv u_m + u_m', \tag{53}$$

wo zwischen den u und u' die Beziehungen (48a) bestehen. Mithin unterliegen die vier Argumente u den Bedingungen:

$$2u_i \equiv 2u_k \equiv 2u_l \equiv 2u_m. \tag{54}$$

Denkt man sich daher irgendeines der vier Argumente u, z. B. u_i, willkürlich gegeben, so sind die drei anderen zu u_i konjugiert, d. h. man hat, wie in (52):

$$u_k \equiv u_i + \omega, \quad u_l \equiv u_i + i\omega', \quad u_m \equiv u_i + \omega + i\omega'. \tag{52'}$$

Umgekehrt genügt ein solches System von vier Argumenten u den gestellten Forderungen und bestimmt eindeutig eine Transversalenfigur.

Für den gemeinsamen Wert der vier Summen (53) ergibt sich auf Grund von (48a) sofort:

$$(53') \qquad u_i + u_i' \equiv c - 2u_i.$$

Dies ist zugleich der konstante Wert für die Argumentensumme der Geraden der ersten Regelschar. folglich $2u_i$ der entsprechende konstante Wert für die zweite Schar. Hieraus folgt wiederum, daß die vier, durch die Ecken von T gehenden Nebentransversalen deren Tangenten an die Kurve sind; legt man durch irgendeine dieser vier Tangenten die vier Berührungsebenen an die Kurve, so sind die Tangenten in den Berührungspunkten eben diejenigen vier Tangenten, die der zweiten Regelschar angehören. Es gilt daher der Satz:

XIb. *Soll ein einer gegebenen elliptischen Raumkurve vierter Ordnung einbeschriebenes Tetraeder* T *eine Transversalenfigur liefern, so daß die vier Transversalen, die die Ecken von* T *mit den Restpunkten der Gegenebenen von* T *auf der Kurve verbinden, einer Regelschar zweiter Ordnung angehören, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß die Ecken von* T *ein System konjugierter Punkte bilden. Die Tangenten in den Ecken von* T *ergeben dann die vier Nebentransversalen der Figur.*

(Eingegangen am 9. Juli 1918.)

Berichtigung.

S. 155 Z. 8 v. u. lies $|f_n(x)| > \varepsilon$ statt $f_n(x) > \varepsilon$,
S. 157 muß von Z. 15 an statt f stets φ stehen,
S. 157 Z. 7 v. u. lies „unendlich vielen dieser Intervallmengen“ statt „allen diesen Intervallen“.